제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{8} \times \dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$(2^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}} = 2^0$
$= 1$ //

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 6x^2 - 2x$
$\therefore f'(1) = 4$ //

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_5 = 4,\ a_7 = 4a_6 - 16$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

$4r^2 = 4r^2 - 16 \rightsquigarrow r = 2$
$\therefore a_8 = a_5 \times r^3$
$= 32$ //

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - ax + 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - ax + 1$
$x = 1 \rightsquigarrow a = 2$
$\frac{d}{dx} \rightsquigarrow f(x) = 3x^2 - 2$
$\therefore f(2) = 12 - 2$
$= 10$ //

5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$이고 $\sin(\pi+\theta)>0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\sin\theta<0$ → 3사

$\therefore \tan\theta = 2\sqrt{2}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

i) $f(2-)=f(2+)$

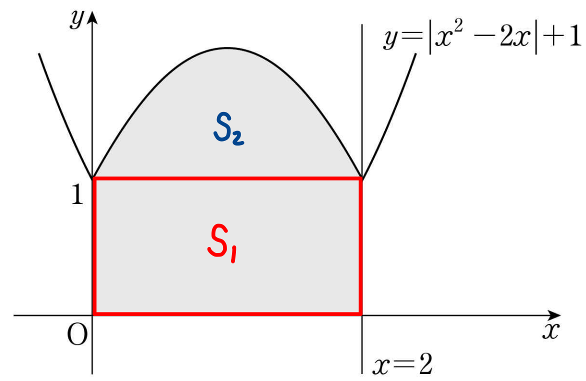
$\rightleftarrows$ $5-2a=-1$ → $a=3$

ii) $f(2-)+f(2+)=0$

$\rightleftarrows$ $5-2a-1=0$ → $a=2$

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



$S_1 = 2\times 1$ → 2

$S_2 = \frac{1}{6}(2)^3$ → $\frac{4}{3}$) → $\frac{10}{3}$

8. 두 점 $\mathrm{A}(m, m+3)$, $\mathrm{B}(m+3, m-3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

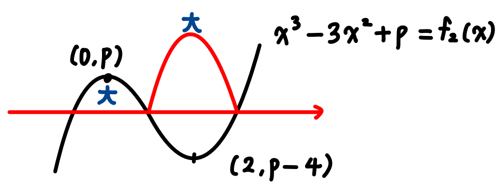
내분점 P → $(m+2, m-1)$

$\therefore m-1 = \log_4(m+10)+m-3$

→ $m=6$ //

9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? (단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$



$p+p-4=0$ $(\because f_2(0)+f_2(2)=0)$

→ $2p-4=0$ $\therefore p=2$ //

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $\lvert a_4 \rvert + \lvert a_6 \rvert = 8$
(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

(가) → $a_5=0$ or $-a_4+a_6=8$

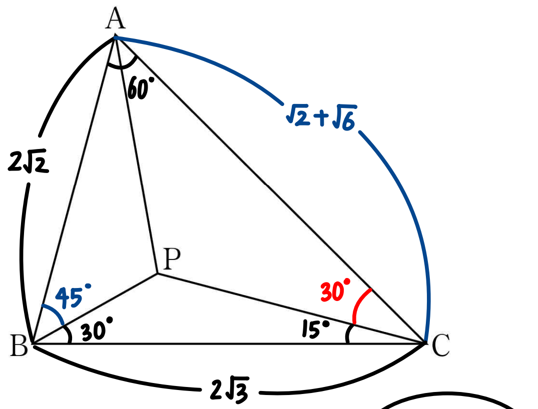
→ $d=4$

(나) → $a_5=3$

$\therefore a_{10} = 3+4\times5$

$= 23$ //

11. 그림과 같이 $\angle BAC = 60°$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30°$, $\angle PCB = 15°$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $2+\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin\angle BAC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ACB}$

$\rightarrow \angle ACB = 45°$

$\overline{AC} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

$\overline{PC} = x$

$x\cos 15° + x\sin 15° \times \frac{1}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}$

$\cos 30° = 2\cos^2 15° - 1 \rightsquigarrow \cos 15° = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin 30° = 2\cos 15° \sin 15° \rightsquigarrow \sin 15° = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

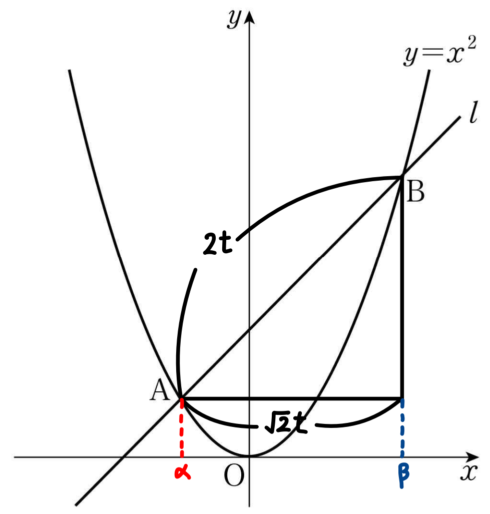
$\therefore x = \sqrt{6}$

$\therefore S = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}+\sqrt{6}) \times \sqrt{6} \times \sin 30°$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ //

12. 곡선 $y = x^2$ 과 기울기가 1인 직선 l 이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t 에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$ 가 되도록 하는 직선 l 의 y 절편을 $g(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t^2}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1



$l : x + g(t)$

$x^2 = x + g(t) \rightsquigarrow \alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = -g(t)$

$\therefore (\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$\rightsquigarrow g(t) = \frac{2t^2-1}{4}$

$\therefore \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ //

13. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

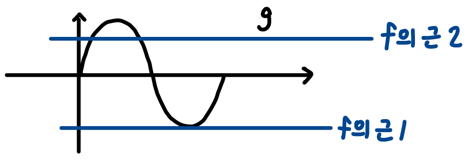
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$ (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

(가) ⇝ $a\pi$ ⇝ $\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}$

(나) ⇝



∴ $f(-1)=0$, 한 근 at $0 \le x < 1$

i) $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ ⇝ $2x^2+3x+1=2(x+1)(x+\frac{1}{2})$
모순

ii) $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ ⇝ $2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$
ok!

∴ $f(2)=\frac{9}{2}$ //

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

f 미·가 ⇝ $f(k-)=f(k+)$
⇝ $ak=-k^2+4bk-3b^2$ ⋯ ㉢
⇝ $f'(k-)=f'(k+)$
⇝ $a=-2k+4b$ ⋯ ㉣

ㄱ. $a=1$　$f'(k)=1$　∴ (ok)

ㄴ. $k=3$ ⇝ $3a=-3b^2+12b-9$ ⋯ ㉠
$a=4b-6$ ⋯ ㉡
㉠ = 3㉡
⇝ $b=\sqrt{3}$　∴ $a=4\sqrt{3}-6$ //
(ok)

ㄷ. /// = ///
$ak=a$ ⇝ $k=1$
㉢ = k × ㉣ ⇝ $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$　∴ $a=\frac{4}{\sqrt{3}}-2$
∴ $\int_0^1 (\frac{4}{\sqrt{3}}-2)x\,dx+\int_1^{\sqrt{3}} -x^2+\frac{4}{\sqrt{3}}x-1\,dx$
$=\frac{1}{3}$ //　(ok)

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

$a_1=1$ ⇝ a_2 홀짝성 ⇝ 수열 고정

i) $a_2=2k$

1 2 3 4 5 6

$1 \to 2k \to 2k+1 \to 4k+1 \to 3k+1 \to 7k+2$ (k : ㅎ)

$\searrow \frac{7k+2}{2}$ (k : ㅉ)

⇒ 모순

ii) $a_2=2k+1$

1 2 3 4 5 6

k=ㅎ

$1 \to 2k+1 \to k+1 \to 3k+2 \to 4k+3 \to \frac{7k+5}{2}=34$ ⇝ $k=9$ $\therefore a_2=19$

$k+1 \xrightarrow{k=ㅉ} 2i+1$, $\searrow \frac{3k+2}{2} \to 5i+2 \to \frac{8i+3}{2}$

$\frac{3k+2}{2} \to 3i+1 \to 6n+1$, $\searrow \frac{5i+2}{2} \to \frac{11n+2}{2}=34$ ⇝ $n=6$

$\frac{5i+2}{2} \xrightarrow{i=ㅉ} 5n+1$, $k=24$ $\therefore a_2=49$

$\underbrace{\Sigma a_2=68}$ //

단 답 형

16. $\log_2 96-\frac{1}{\log_6 2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\underbrace{\log_2 \frac{96}{6}=4}$ //

17. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\underbrace{-2x^4+8x+5}_{f(x)}=k$

$f'(1)=0$ $\therefore k=11$ //

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{n=1}^{7}(1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n)$

$=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-5n+1)$

$=560-140+7$

$=427$ //

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\quad v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$S_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt$

$-\ S_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$

$2t^3-12t^2+kt=0$

$t(2t^2-12t+k)=0$

$D=0 \rightarrow k=18$ //

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$

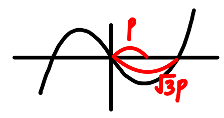
(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\geq 0)\end{cases}$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\rightarrow f'(-p)=f'(p)=0$

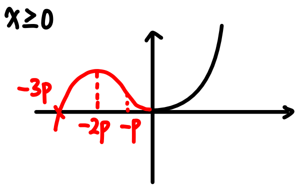
$\therefore f(x)=1+(x)(x^2-3p^2)$

($\because$



$y=1$)

$x\geq 0$



$\therefore \int_0^p g(x)dx=\int_0^p (x)^2(x+3p)\,dx$

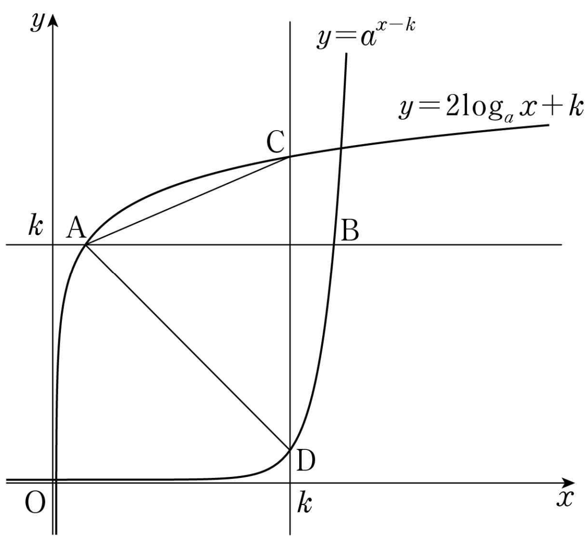
$=\frac{1}{4}p^4+p^4=20$

$\therefore p=2$ //

$\therefore f(5)=1+5(25-3\times 2^2)$

$=66$ //

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



$\log_a k = p$

A(1,k) C(k, 2p+k)
B(k+p, k) D(k, 1)

⇝ $(k+p-1)(2p+k-1)=85$
$\frac{1}{2}(2p+k-1)(k-1)=35$
$\Rightarrow k=8,\ p=\frac{3}{2}$

$\therefore a=4$

12

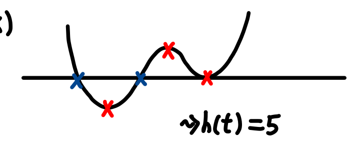
22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

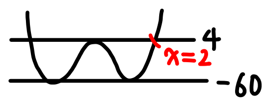
$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=$ 有 ~ 0인수 2개↑ or 0인수 1개 ∩ 꺾

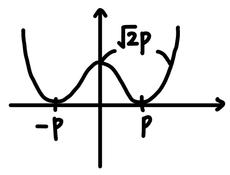
ex)



⇝ $h(t)=5$

(가)+(나) ⇝





$f(x)=(x-p)^2(x+p)^2$
$f(0)=64$ ⇝ $p^4=64$
$p=2\sqrt{2}$
$\therefore \sqrt{2}p=4$

⇝ $f(x)=4+(x-2)(x+2)^2(x+6)$
$f(4)=724$ $h(4)=5$

729

* 확인 사항
- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2}=6$ //

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$a_n=dn$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2dn-6n}{dn}=4 \Rightarrow d=-3$

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

$a_n=\frac{3}{n^2}$ $b_n=-\frac{11}{4n^2}$

$2\times(3-\frac{11}{2})=-\frac{5}{2}\times2$

$=-5$

27. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54　② $-\frac{75}{2}$　③ -24　④ $-\frac{27}{2}$　⑤ -6

$n=1 \rightsquigarrow \frac{a_1}{b_1}=3 \rightsquigarrow b_1=1$

$n\geq 2 \rightsquigarrow b_n=-\frac{n(n+1)}{6}a_n$

$\therefore b_2=4$

$\rightsquigarrow b_n=3n-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{n(n+1)}(3n-2)^2$

$=-54$ 〃

28. $a>0$, $a\neq 1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

$S_n=\frac{1}{2}(1)(a^{n+1}+a^n+2)$

$\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}=\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1^2}$

i) $a>1 \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}{S_n}=\frac{\sqrt{(a-1)^2a^{2n}}}{\frac{1}{2}(a+1)a^n}=\frac{a-1}{\frac{1}{2}(a+1)}$

$\rightsquigarrow \frac{7}{4}=a$ 〃

ii) $0<a<1 \rightsquigarrow$ 〃 $=\frac{1}{\frac{1}{2}(2)}=\frac{3}{2(a+1)}$

$\rightsquigarrow a=\frac{1}{2}$

$\Sigma a=\frac{9}{4}$ 〃

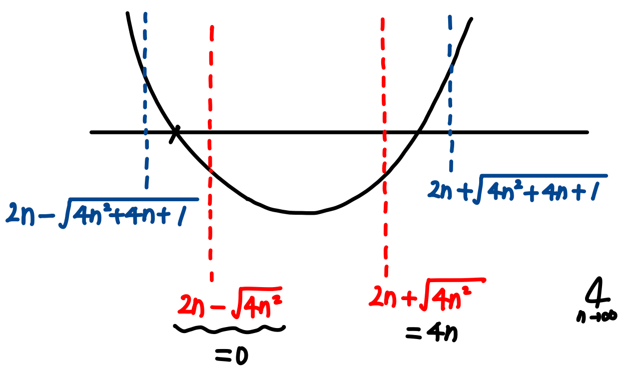
단답형

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

$x^2-4nx-n=0 \rightsquigarrow x=2n\pm\sqrt{4n^2+4n}$



$\rightsquigarrow$ 정수 : $0\sim4n$

$\therefore a_n=4n+1$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+n}-Pn=q$

$\therefore p=2$, $q=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(2n+\frac{1}{4})^2}-2n=\frac{1}{4}$

$\therefore 100pq=\underset{\sim}{50}$ //

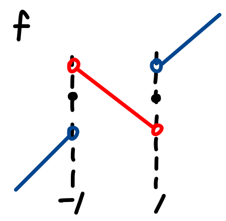
30. 함수

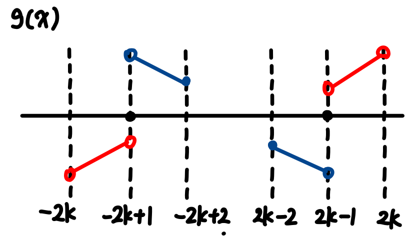
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]





$\rightsquigarrow$ 양수부

$\therefore$ (1~10)홀합

$\Rightarrow \underset{\sim}{25}$ //

---

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.