



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x^2 + p|$ 는 $x = a$ 와 $x = b$ 에서 극대이다.
 $f(a) = f(b)$ 일 때, 실수 p 의 값은? (단, a, b 는 $a \neq b$ 인 상수이다.) [2023년 3월 09]

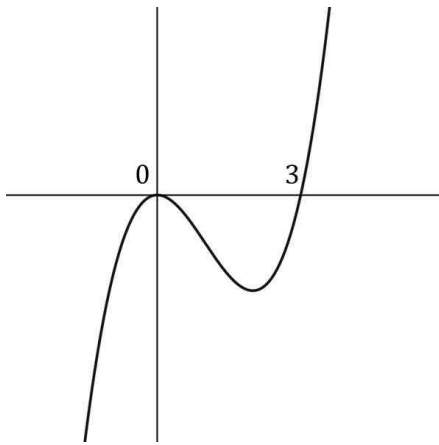
- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

1. 정답 ② [2023년 3월 09]

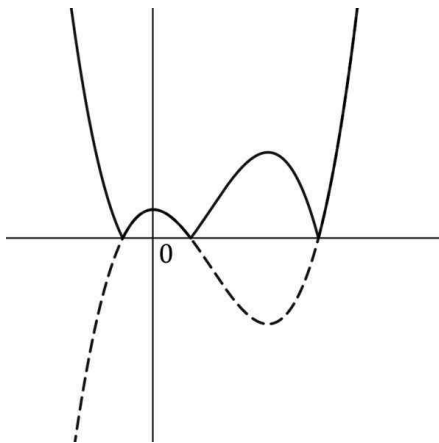
1) 절댓값 함수, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $f(x) = |x^3 - 3x^2 + p|$ 라는 함수가 있습니다. 기본적으로 $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ 이라는 함수를 위아래로 p 만큼 움직이고 절댓값을 씌운 함수이죠? 대충 그려볼게요.

원래 $y = x^2(x-3)$ 는 x 축과 $x=0$ 에서 접하고 $x=3$ 에서 그냥 지나가는 함수입니다.



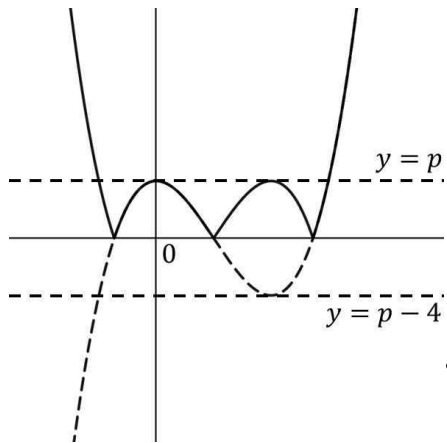
이런 함수죠. 여기서 p 만큼 움직이고 절댓값을 씌우면



대충 이렇게 그려지겠네요.

이때 $f(x)$ 가 $x=a$ 와 $x=b$ 에서 극대라고 합니다. 일단 극대인 점이 어디인지는 알겠어요. 원래 $x^2(x-3)$ 에서 극대와 극소였던 $x=0$ 과 $x=2$ 가 절댓값으로 뒤집어 올라가서 극대가 된 거죠.

이때 극댓값이 같아야 합니다. 그런데 지금 그림에서는 극댓값이 다르잖아요? 그러면 어떻게 그래프를 조정해야 할까요?



이렇게 조정해줘야 합니다.

일단 원본함수인 $x^2(x-3)$ 은 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이고 극댓값은 0, 극솟값은 -4 입니다. 이것을 p 만큼 위아래로 움직이면 극댓값은 p , 극솟값은 $p-4$ 가 되겠죠. 이때 극솟값은 음수여야 합니다. 그래야 접어 올라갈 때 양수가 되어서 극댓값과 같아지겠죠.

이때 극솟값은 부호가 뒤집히므로 $4-p$ 가 되는데 이게 극댓값인 p 와 같아야 하니까 $4-p=p$ 이고 $p=2$ 입니다. 답은 ②번이네요.

2. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,
 a_{10} 의 값은? [2023년 3월 10]

$$(가) |a_4| + |a_6| = 8$$

$$(나) \sum_{k=1}^9 a_k = 27$$

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 27

2. 정답 ② [2023년 3월 10]

1) 등차수열 a_n 은 $a + (n-1)d$ 로 놓기, 조건해석

일단 공차가 양수인 등차수열 a_n 이 있습니다. 그럼 일단 $a_n = a + (n-1)d$ (d 는 양수)라고 놓을게요.

(가)조건에서 $|a_4| + |a_6| = 8$ 입니다. 일단 $|a + 3d| + |a + 5d| = 8$ 이죠?

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^9 a_k = 27$ 라고 합니다. $\frac{(a_1 + a_9)}{2} \times 9 = 27$ 이고 $a_1 + a_9 = 6$ 이네요. 그리고

$a_1 + a_9 = a + a + 8d = 6$ 입니다.

여기서 잘 생각해보세요. $a_4 + a_6$ 은 사실상 $a_1 + a_9$ 와 같지 않나요? 둘 다 $2a + 8d$ 잖아요? 따라서

$|a_4| + |a_6| = 8$ 이고 $a_4 + a_6 = 6$ 입니다.

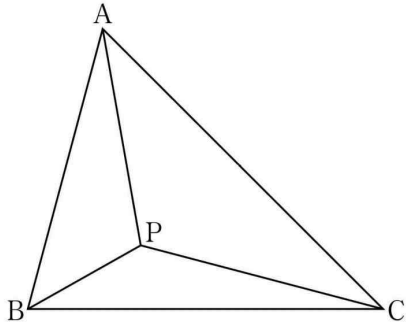
a_4 와 a_6 이 둘 다 양수라면 두 식의 결과가 다를 리가 없죠. 둘 다 음수라면 더해져 6이 나올 수 없구요.

이때 공차는 양수이므로 $a_4 < a_6$ 이어야 합니다. 따라서 a_4 는 음수, a_6 은 양수가 되어야겠네요. 그러면 a_4 만

절댓값으로 부호가 바뀌어서 $-a_4 + a_6 = 2d = 8$ 이고 $d = 4$ 입니다.

$a_4 + a_6 = 2a + 8d = 2a + 32 = 6$ 이고 $a = -13$ 이네요. $a_{10} = a + 9d = 23$ 입니다. 답은 ②번입니다.

3. 그림과 같이 $\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는?
 [2023년 3월 11]

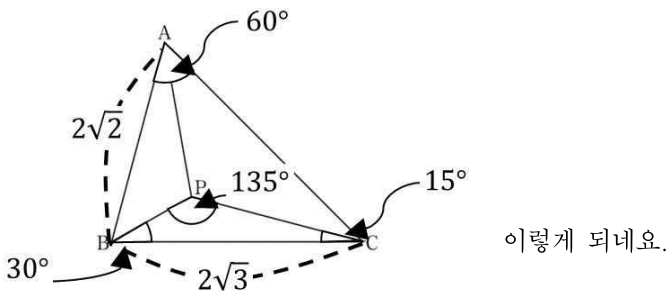


- ① $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$
 ④ $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2 + \sqrt{3}$

3. 정답 ③ [2023년 3월 11]

1) 그림 있으면 그림 보면서

$\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$ 이라고 합니다. 삼각형 APC의 넓이를 구하라네요. 일단 그림에 표시부터 해봅시다.



2) 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

일단 삼각형 ABC를 보면 두 변의 길이와 한 각이 있죠? 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다.

$\overline{AC} = k$ 라고 하면 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{k^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times k} = \frac{k^2 - 4}{4k\sqrt{2}}$ 입니다. 정리하면 $2k\sqrt{2} = k^2 - 4$ 이고

$k^2 - 2\sqrt{2}k - 4 = 0$ 입니다. 이걸 근의 공식을 사용해야겠어요. $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{24}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{6}$ 이고 음수가 될 수는 없으므로 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 입니다.

그리고 각 A와 그 반대편에 있는 $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 이 있고, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이 있으니 각 C도 구할 수 있겠죠?

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4 = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ 이고 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 입니다. C는 예각이니까 45° 겠네요. 그러면

$\angle PCA = 30^\circ$ 입니다.

또한 각 P와 그 반대편에 있는 $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 이 있고, $\angle PBC = 30^\circ$ 이 있으니 \overline{PC} 도 구할 수 있습니다.

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135^\circ} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30^\circ}$ 이고 $\overline{PC} = \sqrt{6}$ 입니다.

그러면 이제 삼각형 APC의 넓이를 구할 수 있겠어요. 일단 밑변의 길이는 $\overline{AC} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ 이고 높이는

$\overline{PC} (= \sqrt{6}) \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ 입니다. 답은

③번이네요.

4. 두 함수

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = \sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이고, $0 \leq a \leq 2$ 이다.) [2023년 3월 13]

(가) $\{g(a\pi)\}^2 = 1$

(나) $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(g(x)) = 0$ 의

모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$ 이다.

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

4. 정답 ④ [2023년 3월 13]

1) 조건해석

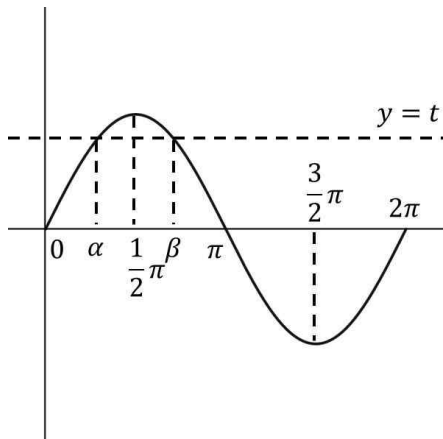
$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\sin x$ 가 있다고 합니다. 이때 $0 \leq a \leq 2$ 인데 (가)조건에서 $\{g(a\pi)\}^2 = 1$ 라고 하네요. 그러면 $g(a\pi)=1$ 이거나 $g(a\pi)=-1$ 이죠? $g(x)=\sin x$ 이므로 가능한 a 는 $\frac{1}{2}$ 이거나 $\frac{3}{2}$ 입니다.

2) 합성함수는 치환

(나)조건에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 $f(g(x))=0$ 의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$ 라고 하네요. 일단 $g(x)=t$ 라고 치환하면 $0 \leq x \leq 2\pi$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 입니다. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin x$ 의 함숫값은 -1 부터 1 까지의 범위 내에 있으니까요.

이렇게 되면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t)=0$ 가 되는 t 를 찾은 후, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin x=t$ 가 되는, 즉 $y=\sin x$ 와 $y=t$ 가 만나게 되는 x 값을 찾는 두 개의 과정을 거치는 문제가 되는 거예요.

이때 잘 생각해봐야 할 점은 합이 $\frac{5}{2}\pi$ 라는 점입니다. $y=\sin x$ 는 축에 대하여 대칭이라는 특징이 있어요.

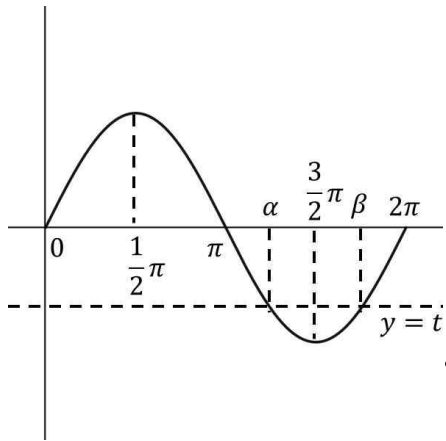


이 그림에서 이렇게 $y=t$ 를 설정하면 $g(x)=t$ 가 되는 x 의 합은 축의

x 값의 두 배인 π 이 됩니다. 왜냐하면 $g(x)=\sin x$ 는 $x = \frac{1}{2}\pi$ 라는 축에 대하여 대칭이므로 $x = \frac{1}{2}\pi$ 에서

$x = \alpha$ 까지의 거리와 $x = \frac{1}{2}\pi$ 에서 $x = \beta$ 까지의 거리가 같거든요. 따라서 $\frac{1}{2}\pi - \alpha = \beta - \frac{1}{2}\pi$ 이고

$\alpha + \beta = \pi$ 입니다. 이걸 축의 x 값의 두 배죠.



이렇게 설정해도 마찬가지로입니다. 축의 두 배인 3π 가 되죠.

$y = t = 0$ 으로 설정해도 마찬가지구요.

그런데 합은 $\frac{5}{2}\pi$ 이므로 $\frac{5}{2}\pi$ 를 초과하는 후자의 경우는 불가능합니다. 그러면 전자의 π 에 무언가를 더해야

한다는 거겠죠. $\frac{5}{2}\pi = \pi + \frac{3}{2}\pi$ 이죠? 그리고 $\sin x = t$ 를 만족시키는 x 가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 t 는 -1 이구요. 따라서 조건을

만족시키는 t 는 $0 < t < 1$ 에서 하나, $t = -1$ 이 되어야 합니다. $\sin x = t$ 를 만족시키는 t 가 -1 이므로 $f(t) = 0$ 를 만족시키는 t 역시 -1 이고, 따라서 $f(-1) = 0$ 입니다.

3) 케이스 분류

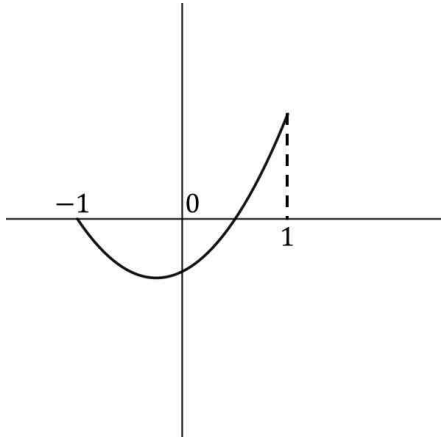
이때 $a = \frac{1}{2}$ 이거나 $a = \frac{3}{2}$ 이잖아요? 각각 하나씩 해보고 $f(-1) = 0$ 이고 $f(t) = 0$ 를 만족시키는 t 가

$0 < t < 1$ 에 있는지 확인해봅시다.

3-1) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b$ 인데 $f(-1) = 0$ 이므로 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 입니다. 축이 $x = -\frac{1}{4}$ 이고

$(0, -\frac{1}{2}), (1, 1)$ 를 지나는 그래프를 그려보면



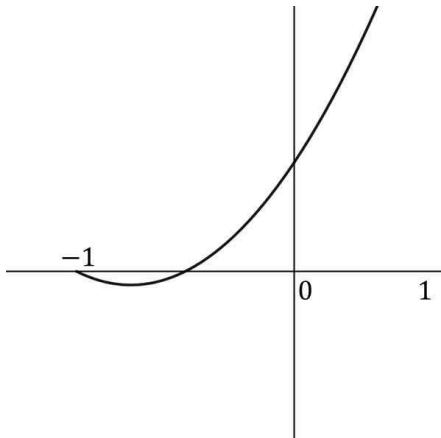
이렇게 됩니다. x 축과 만나는 점이 0과 1 사이에 있네요? 조건에

부합합니다! 따라서 $f(2) = \frac{9}{2}$ 입니다. 답은 ④번이네요.

3-2) $a = \frac{3}{2}$ 일 때

이미 답은 알지만 왜 이 경우는 안 되는지 확인은 해볼게요. $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + b$ 인데 $f(-1) = 0$ 이므로

$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 입니다. 축이 $x = -\frac{3}{4}$ 이고 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 3)$ 를 지나는 그래프를 그려보면



이렇게 됩니다. x 축과 만나는 점이 0과 1 사이에 없습니다. 조건에

부합하지 않네요.

5. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} + a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) & (a_{n+1} + a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 1$ 일 때, $a_6 = 34$ 가 되도록 하는 모든 a_2 의 값의 합은? [2023년 3월 15]

- ① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

5. 정답 ③ [2023년 3월 15]

1) 조건해석

모든 항이 자연수인 수열 a_n 이 있는데 $a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} + a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) & (a_{n+1} + a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 라고 합니다. 일단

식을 해석해볼게요.

먼저 $a_n + a_{n+1}$ 이 홀수일 때, 즉 a_n 과 a_{n+1} 둘 중 하나가 홀수, 나머지가 짝수일 때는 a_{n+2} 는 그냥 $a_n + a_{n+1}$ 이라고 합니다. 이 경우 a_{n+2} 역시 홀수가 되겠죠?

그리고 $a_n + a_{n+1}$ 이 짝수일 때, 즉 a_n 과 a_{n+1} 이 둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수일 때는 a_{n+2} 는 $a_n + a_{n+1}$ 에 $\frac{1}{2}$ 를 곱한 값이라는 거네요. 이 경우 a_{n+2} 는 짝수 혹은 홀수가 됩니다.

이때 $a_1 = 1$ 일 때 $a_6 = 34$ 이 되도록 하는 a_2 의 모든 값의 합을 구하합니다. 먼저 a_1 은 홀수이고, a_6 은 짝수입니다. 짝수가 되는 경우는 a_n 과 a_{n+1} 이 둘 다 홀수이거나 둘 다 짝수인 경우만 가능합니다. 따라서 a_4 와 a_5 는 둘 다 짝수이거나 홀수여야 합니다.

이때 a_4 와 a_5 가 둘 다 짝수라면, a_3 역시 짝수여야 합니다. 왜냐하면 a_5 가 짝수가 되는 경우는 a_3 과 a_4 둘 다 짝수거나 홀수인 경우인데, 이미 a_4 는 짝수이므로 a_3 역시 짝수여야 하죠. 마찬가지로 a_2 역시 짝수여야 하고, a_1 역시 짝수여야 합니다. 그런데 $a_1 = 1$ 이죠? 아니네요? 따라서 a_4 와 a_5 는 둘 다 홀수입니다.

2) 케이스 분류

이러면 이제 a_2 와 a_3 만 남았네요. 가능한 경우는 짝짝, 짝홀, 홀짝, 홀홀의 4가지 경우입니다.

먼저 짝짝의 경우 불가능합니다. a_1 이 홀수이므로 $a_1 + a_2$ 는 홀수+짝수가 되어 홀수가 됩니다. a_3 는 무조건 홀수여야 하죠?

짝홀의 경우 바로 위에서 봤듯이 a_1 부터 홀짝홀홀홀이 됩니다. $a_2 + a_3$ 은 짝+홀=홀이므로 a_4 가 홀수라는 것도 맞네요. 가능합니다.

이러면 $a_2 = 2k$ (k 는 자연수)라고 하면 $a_3 = a_1 + a_2 = 2k + 1$ 입니다. $a_4 = a_2 + a_3 = 4k + 1$ 이고,

$a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = 3k + 1$ 이고 $a_6 = \frac{1}{2}(a_4 + a_5) = \frac{7k+2}{2} = 34$ 입니다. $7k = 66$ 이고 $k = \frac{66}{7}$ 인데 k 는 자연수여야 하죠? 조건에 맞지 않습니다.

홀짝의 경우 $a_2 = 2k - 1$ (k 는 자연수)라 했을 때 $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = k$ 가 됩니다. a_3 가 짝수이므로 k 역시 짝수여야겠네요. $a_4 = a_2 + a_3 = 3k - 1$, $a_5 = a_3 + a_4 = 4k - 1$ 입니다. $a_4 + a_5 = 68$ 이므로 $7k - 2 = 68$ 이고 $k = 10$ 이네요. $a_2 = 19$ 입니다.

홀홀의 경우 a_1 부터 a_5 까지 짝 다 홀수가 됩니다. 이러면 $a_2 = 2k - 1$ (k 는 자연수)라 했을 때 $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = k$, $a_4 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{3k-1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = \frac{5k-1}{4}$ 가 됩니다. 이때 $a_4 + a_5 = 68$ 이므로 $\frac{11k-3}{4} = 68$ 이고 $k = 25$ 입니다. $a_2 = 49$

모든 a_2 의 합은 $19 + 49 = 68$ 입니다. 답은 ③번이네요.

6. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양의 실수 p 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g'(0)=0$$

$$(나) \quad g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$\int_0^p g(x)dx=20$ 일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오. [2023년 3월 20]

6. 정답 66 [2023년 3월 20]

1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

삼차함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$ 인 삼차함수라고 합니다. 이때 양수인 p 와 (가)조건에서

$$g'(0)=0, \text{ (나)조건에서 } g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases} \text{인 } g(x) \text{가 있다고 하네요.}$$

일단 $g'(0)=0$ 이라는 건 $g(x)$ 는 최소한 $x=0$ 에서는 미분가능하다는 거죠? 또한 $x=0$ 에서 접선의 기울기가 0이어야 합니다. 그 전에 $g(x)$ 부터 해석해볼게요.

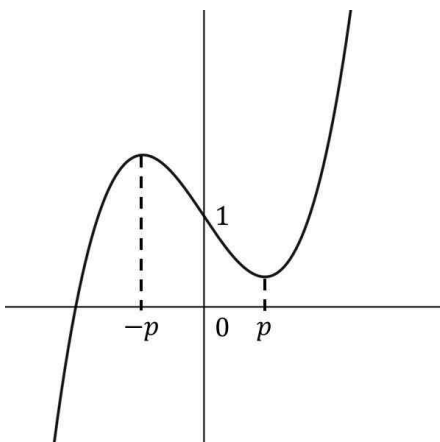
$$\text{먼저 } g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases} \text{는 } x < 0 \text{에서는 } g(x)=f(x-p)-f(-p) \text{입니다. } x=0 \text{을 넣으면}$$

$g(0)=0$ 이 나오네요. 그리고 $f(x)$ 라는 함수를 p 만큼 오른쪽으로 움직인 다음에 그걸 $f(-p)$ 만큼 위아래로 움직인 함수입니다.

또한 $x \geq 0$ 에서는 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 입니다. 이 역시 마찬가지로 $x=0$ 을 넣으면 $g(0)=0$ 이네요. 이쪽은 $f(x)$ 라는 함수를 p 만큼 왼쪽으로 움직인 다음에 그걸 $f(p)$ 만큼 위아래로 움직인 함수입니다.

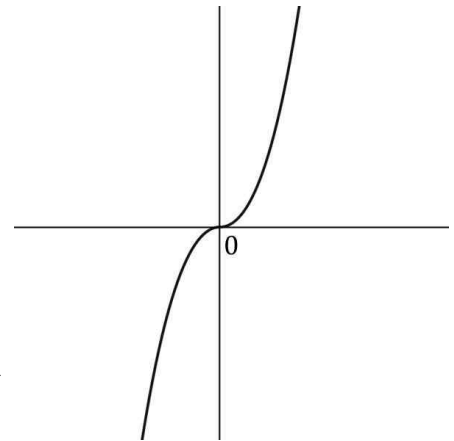
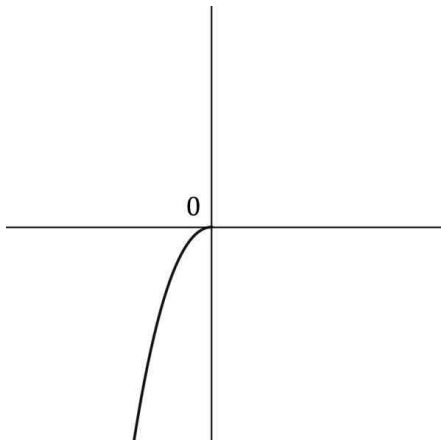
또한 아까 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서는 미분가능하고 그 접선의 기울기가 0이어야 한다고 했었죠? 먼저 $x < 0$ 에서는 $g(x)=f(x-p)-f(-p)$ 이므로 접선의 기울기는 $f'(-p)$ 이고 이 값은 0이어야 합니다. $f'(-p)=0$ 이네요.

$x \geq 0$ 에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 이고 접선의 기울기는 $f'(p)$ 이고 이 값은 0이어야 하므로 $f'(p)=0$ 입니다. 이러면 $f(x)$ 는



이런 함수겠네요. 이제 $g(x)$ 를 그려보죠. 먼저 $x < 0$ 에서는 함수를

p 만큼 오른쪽으로 움직인 다음에 원점을 지나도록 설정하고

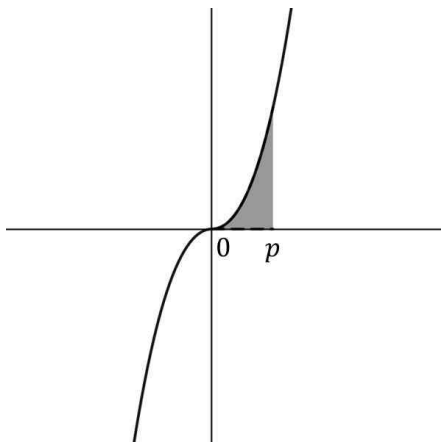


$x \geq 0$ 부분도 마찬가지로 해보면

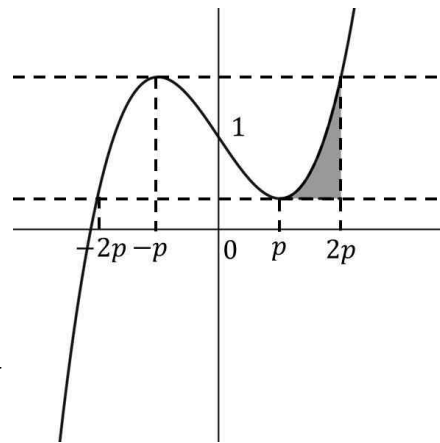
이렇게 되겠네요!

2) 정적분 관찰

이때 $\int_0^p g(x)dx = 20$ 라고 합니다. 일단 $g(x)$ 를 잘 관찰해보세요. $x \geq 0$ 에서 $g(x)$ 는 $x \geq p$ 에서 $f(x)$ 와 같은 형태잖아요? 애초에 $f(x)$ 를 p 만큼 왼쪽으로 움직인 다음에 $x \geq 0$ 에서 잘라낸 함수가 $g(x)$ 니까요. 단순한 평행이동이기 때문에 범위만 대응시켜주면 정적분 값은 같아야 합니다. 그러니까 다시 말하면



색칠된 부분과



색칠된 부분의 값이

동일해야 한다는 거죠.

일단 색칠된 부분을 구해볼까요? 저 색칠된 부분을 구하는 건 사실상 $f(x)$ 를 아래로 내려서 $x = p$ 에서 x 축과 접하게 만든 후 p 부터 $2p$ 까지 정적분하는 것과 같죠? 따라서

$\int_0^p g(x)dx = 20 = \int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx$ 입니다. 이때 평행이동을 해도 정적분 값은 동일하다는 논리를

사용해볼게요. 지금 우리가 구하는 건 $\int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx = 20$ 인데 어차피 정적분 식의 x 값을 전부 p 만큼

왼쪽으로 밀어버려도 값은 동일하겠죠? 따라서 $\int_0^p x^2(x+3p)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + px^3 \right]_0^p = \frac{5}{4}p^4 = 20$ 가 됩니다.

$p^4 = 16$ 이고 $p > 0$ 이므로 $p = 2$ 이네요.

3) 함수 구하기 - 차함수

$f(x)$ 는 $y = f(p) = f(2)$ 와 $x = p = 2$ 에서 접하고 $x = -4$ 에서 만나므로 차함수에 의하여

$f(x) - f(2) = (x - 2)^2(x + 4)$ 이고 $f(x) = (x - 2)^2(x + 4) + f(2)$ 입니다.

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $f(0) = 16 + f(2) = 1$ 이고 $f(2) = -15$ 이네요. $f(x) = (x - 2)^2(x + 4) - 15$ 이고

$f(5) = 66$ 입니다.

7. 최고차항의 계수가 1이고 사차함수 $f(x)$ 가 있다.

실수 t 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x) - t|$ 라 할 때,

$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$ 의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k 의 개수를

$h(t)$ 라 하자.

함수 $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{t \rightarrow 4^+} h(t) = 5$$

(나) 함수 $h(t)$ 는 $t = -60$ 과 $t = 4$ 에서만 불연속이다.

$f(2) = 4$ 이고 $f'(2) > 0$ 일 때, $f(4) + h(4)$ 의 값을 구하시오.

[2023년 3월 22]

7. 정답 729 [2023년 3월 22]

1) 문제해석, 절댓값 함수

먼저 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수라고 합니다.

이때 $g(x) = |f(x) - t|$ 라고 하네요. 이걸 $f(x)$ 를 t 만큼 아래로 내리고 절댓값을 씌운 함수죠?

이때 $h(t)$ 라는 함수가 있는데 얘는 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$ 의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k 의 개수라고 합니다.

이건 뭘까요? 천천히 해석해봅시다.

먼저 “극한값이 존재한다”는 건 좌극한값과 우극한값이 동일하다는 의미입니다. 일단 분모인 $x - k$ 에 절댓값이 있어요. 이거부터 풀어보죠. 먼저 $x > k$ 일 때, 즉 $x - k > 0$ 일 때 우극한은 $\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x) - g(k)}{x - k}$ 입니다. 이걸 $x = k$ 보다 큰 쪽에서의 미분계수죠? 간단하게 우리만의 표현으로 표현하자면 $g'(k+)$ 가 되겠네요.

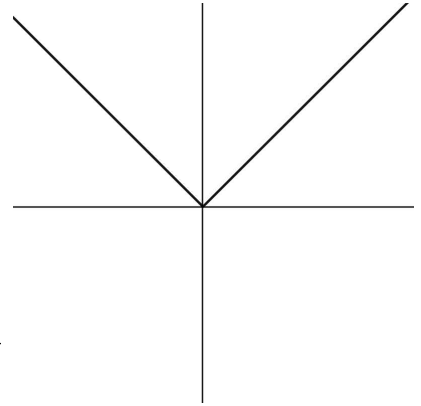
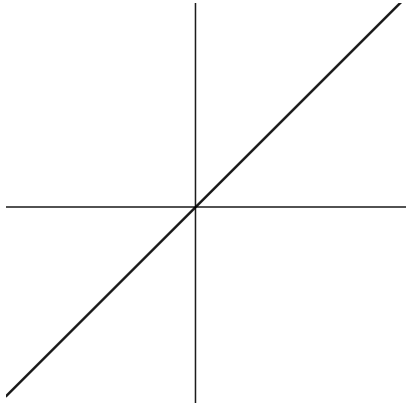
$x < k$ 일 때는요? 좌극한은 $\lim_{x \rightarrow k-} -\frac{g(x) - g(k)}{x - k} = -g'(k-)$ 가 됩니다. $x = k$ 보다 작은 쪽에서의 미분계수입니다.

결국 이 둘이 같아야 하므로 $g'(k+) = -g'(k-)$ 이 되는 점의 개수가 $h(t)$ 가 되겠군요.

그러면 $g'(k+) = -g'(k-)$ 는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 일반적인 상황에서는 $g'(k+) = -g'(k-)$ 는 불가능합니다. 왜냐하면 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 다르다는 건 미분불가능이라는 건데 다항함수는 모든 점에서 미분가능이거든요.

다만 그 값이 0이라면요? 0은 부호를 바꾸든 말든 0이니까 성립하죠. 일단 하나 찾았네요.

그리고 특수한 상황도 고려를 해야죠. $g(x)$ 는 절댓값 함수잖아요? 절댓값 함수의 특징은 x 축 아래의 부분은 위로 접혀 올라간다는 거죠. 접혀 올라간다는 건 미분계수 역시 부호가 반대로 된다는 거구요.



이런 함수가 있다면 절댓값을 씌웠을 때

이렇게 x 축 아래에 있는 $x < 0$ 부분이 접혀 올라갑니다. 그러면 $x = 0$ 에서의 우미분계수와 좌미분계수는 정확히 부호가 반대가 되죠. 결국 조건을 만족하는 경우는 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 x 축과 만나는 경우 두 가지입니다. 이러한 점의 개수가 $h(t)$ 인 거죠.

2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

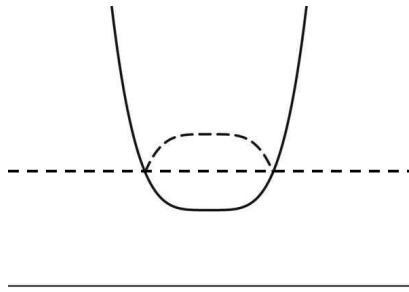
(가)조건에서 $\lim_{t \rightarrow 4^+} h(t) = 5$ 라고 합니다. t 가 4보다 약간 클 때, 즉 $f(x)$ 를 4보다 약간 더 내리고 절댓값 씌운 $g(x) = |f(x) - 4|$ 일 때는 미분계수가 0이거나 x 축과 만나는 점이 5개라는 거죠?

(나)조건에서 $h(t)$ 는 $t = -60$ 와 $t = 4$ 에서만 불연속이라고 합니다. 일단 $t = 4$ 는 (가)조건에도 있던 값이에요. 당연히 주의해서 봐야 합니다.

$h(t)$ 가 불연속이라는 건 $f(x)$ 를 t 만큼 내리고 절댓값 씌울 때 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 x 축과 만나는 점의 개수가 특정 지점에서 변한다는 거죠? 좌극한값, 함수값, 우극한값 중 어느 하나라도 다르면 불연속이니까요.

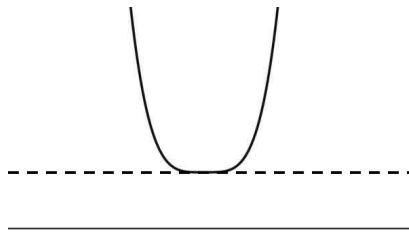
그리고 두 지점에서만 불연속이라는 것도 포인트입니다. 결국 개형을 정한 다음 하나하나 확인해봐야겠네요.

이때 어차피 t 만큼 아래로 내려서 절댓값으로 접어 올리는 거랑 $y = t$ 라는 직선을 그어서 직선에 대하여 접어 올리는 거랑 결과는 똑같으니까 설명은 후자로 하겠습니다.



이런 개형인 경우 불연속점은 하나입니다. 이렇게 점선을 그으면 점선과

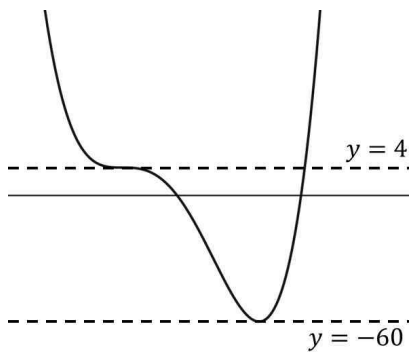
만나는 점 두 개와 미분계수가 0이 되는 점 하나를 합해 $h(t)=3$ 이다가



이렇게 점선을 그으면 미분계수가 0이 되는 점이 하나로 $h(t)=1$ 이 되고,

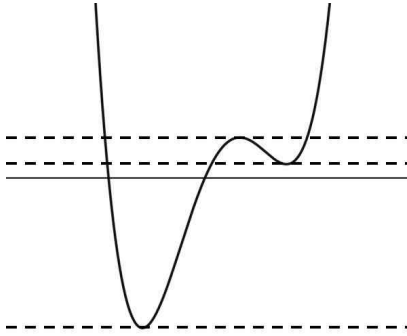
더 아래로 내려가도 $h(t)=1$ 입니다.

여기서 잘 생각해볼게요. 미분계수가 0이 되는 점은 어차피 고정되어 있어요. t 값에 따라 변하는 건 $y=t$ 와의 교점 중 접하지 않는 점의 개수죠. 그러면 빠르게 확인해봅시다.



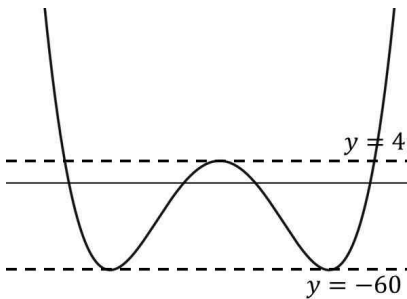
그림과 같이 점선을 그었을 때 $h(t)$ 가 불연속이 됩니다. 기본적으로 미분계수가 0이 되는 점 2개에 t 가 4보다 클 때는 접점이 아닌 교점이 2개, $t=4$ 일 때 1개, 4보다 작을 때는 다시 2개, $t=-60$ 부터는 0개가 되죠.

그런데 문제는 $\lim_{t \rightarrow 4^+} h(t) = 5$ 이어야 한다는 거예요. $t = 4$ 보다 클 때 5개의 점이 조건을 충족해야 하는데 지금 같은 상황은 4개죠. 이 개형은 불가능합니다. 마찬가지로의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.



이런 개형인 경우를 살펴볼게요. 이 경우 불연속점이 3개가 나타납니다. 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 첫 번째 점선 전까지 접점이 아닌 교점이 2개, 두 번째 점선 전까지 4개였다가 두 번째 점선일 때 2개로 변하고, 다시 2개였다가 세 번째 점부터는 0개로 변하죠. 조건을 만족하지 않습니다. 마찬가지로의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.

결국 남은 개형은



이거죠. 일단 조건을 만족하는지 보면 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 $y = 4$ 까지는 접점 아닌 교점이 2개, $y = -60$ 까지는 4개였다가 $y = -60$ 부터는 0개가 됩니다.

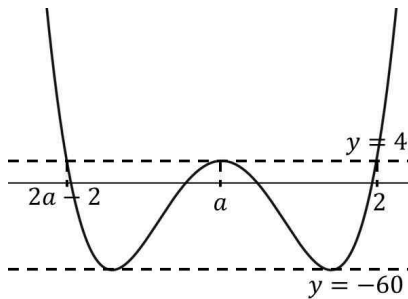
또한 $t = 4$ 보다 클 때 미분계수가 0인 점 3개 + 접점 아닌 교점 2개로 총 5개니까 (가)조건도 만족하네요. 찾았어요!

3) 함수 구하기 - 차함수

먼저 사차함수 중 이런 대칭축이 존재하는 개형의 특징은 대칭축으로부터 극소가 되는 점의 x 좌표의 차이가

동일하다는 거예요. 대칭축의 x 좌표를 a 라고 잡고 $y = f(x)$ 가 $y = -60$ 과 접하는 점의 x 좌표를 각각 $a - b$, $a + b$ 라고 하면 차함수에 의하여 $f(x) - (-60) = (x - a + b)^2(x - a - b)^2$ 이고 $f(x) = (x - a + b)^2(x - a - b)^2 - 60$ 입니다. 이때 $f(a) = 4$ 이므로 $b^4 - 60 = 4$ 이고 $b = 2\sqrt{2}$ 이네요. $b = -2\sqrt{2}$ 도 어차피 똑같으니 상관없습니다. $f(x) = (x - a + 2\sqrt{2})^2(x - a - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 입니다.

이때 $f(2) = 4$ 이고 $f'(2) > 0$ 이므로 $x = 2$ 는



이렇게 그려지겠네요.

$f(x) = (x - a + 2\sqrt{2})^2(x - a - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 에 $f(2) = 4$ 를 해보면 $(2 - a + 2\sqrt{2})^2(2 - a - 2\sqrt{2})^2 = 64$ 이고 정리하면 $((2 - a)^2 - 8)^2 = 64$ 이 됩니다. $(a^2 - 4a - 4)^2 = 64$ 이고 $a^2 - 4a - 4 = 8$ 이거나 $a^2 - 4a - 4 = -8$ 입니다.

$a^2 - 4a - 4 = -8$ 의 경우 $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0$ 이고 $a = 2$ 가 되는데 이건 불가능하죠? 무조건 $a < 2$ 여야 하니까요.

$a^2 - 4a - 4 = 8$ 의 경우 $a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2) = 0$ 이므로 $a = -2$ 입니다.

$f(x) = (x + 2 + 2\sqrt{2})^2(x + 2 - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 이네요. 아니면 위의 그림처럼 대칭축 $x = a = -2$ 를 기준으로 $x = 2$ 와 반대편의 $x = 2a - 2 = -6$ 를 잡고 $f(x) = (x + 6)(x + 2)^2(x - 2) + 4$ 로 설정해도 됩니다. 이게 더 편하겠네요.

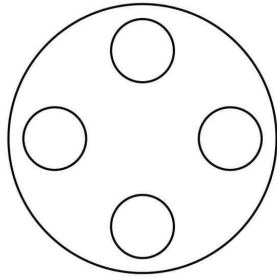
이제 $f(4) + h(4)$ 를 구해보죠. $h(4)$ 는 이미 알죠? 미분계수가 0인 점이 3개에 점점 아닌 교점이 2개니까 $h(4) = 5$ 이구요. $f(4) = 724$ 입니다. 따라서 $f(4) + h(4) = 729$ 이네요.

확통

8. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가
일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로
다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을
만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
[2023년 3월 확통 28]

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은
3 이하이다.

- ① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540



8. 정답 ⑤ [2023년 3월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

원 모양의 식탁에 4개 접시가 있는데 이 접시에 다른 종류 빵 5개와 같은 종류 사탕 5개를 남김없이 담으려 한다고 합니다. (가)조건에서 각 접시에는 무조건 1개 이상의 빵이 있어야 하고, (나)조건에서 접시에 담긴 빵과 사탕의 개수의 합은 3 이하여야 한다고 하네요.

일단 원순열이기 때문에 중복되는 걸 고려해줘야 해요. 원순열을 보는 관점은 두 가지가 있는데 여기서는 먼저 한 명을 배치해서 전부 구별이 가능하게 만들어볼게요.

먼저 다른 종류 빵 5개를 배치하겠습니다. 왜냐하면 같은 종류의 사탕은 개수로만 구별할 수 있어서 첫 배치에서 어려움이 있지만 다른 종류 빵은 전부 구별이 가능하거든요. (가)조건을 먼저 활용하기 위함도 있구요.

빵이 5개고 (가)조건에서 모든 접시에 빵이 있어야 한다고 했으니 배치되는 빵은 2111입니다. 하나의 접시에는 두 개의 빵이 담겨야겠네요.

일단 빵 5개 중에서 2개를 골라서 4개의 접시 중 아무 곳에 배치합니다. 이때 고르는 경우의 수는 ${}^5C_2 = 10$ 이지만 배치하는 경우의 수는 1가지입니다. 어느 곳에 배치해도 첫 번째 배치는 구별이 안 되거든요.

그러면 나머지 3개의 빵은 나머지 3곳에 배치하면 됩니다. 경우의 수는 $3! = 6$ 이네요.

그리고 이제 사탕을 배치해봅시다. 이제 모든 접시가 구별 가능해졌으니까 서로 다른 상자 4개에 서로 같은 사탕 5개를 배치하는 중복조합 문제로 바뀝니다. $a + b + c + d = 5$ 같은 거 말이죠.

문제는 빵과 사탕의 합은 3개를 넘을 수 없다는 거예요. 그러면 중복조합을 활용한 다음 3을 넘는 모든 경우의 수를 제거하는 방법과 일일이 다 세는 방법이 있는데 아무리 봐도 전자는 좀 힘들 것 같아요. 그냥 세봅시다.

2111을 기준으로 해볼게요. 가능한 경우는 0122, 1112 두 가지입니다.

이제 이걸 배열해보면 0122, 0221, 0212, 1022, 1202, 1220와 1121, 1112, 1211가 되겠네요. 총 9가지입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 6 \times 9 = 540$ 입니다. 답은 ⑤번이네요.

9. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건의 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [2023년 3월 확통 30]

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

(나) $f(2) \neq 1$ 이고 $f(4) \times f(5) < 20$ 이다.

9. 정답 45 [2023년 3월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 가 있는데 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구합니다. (가)조건에서 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이라고 하네요. 이진 중복조합을 사용하는 경우죠? 중복을 허용하여 두 개를 고르면 자동으로 작거나 같은 순서대로 차례로 정렬이 되는 구조죠.

(나)조건에서 $f(2) \neq 1$ 이고 $f(4) \times f(5) < 20$ 이라고 합니다. 이러면 $f(4), f(5)$ 는 $f(4)=4, f(5)=5$ 와 $f(4)=5, f(5)=5$ 이렇게 두 경우만 제외하면 다 가능하다는 거네요.

일단 천천히 생각해보죠. $f(2)$ 가 가질 수 있는 수는 2, 3, 4입니다. 5인 경우는 불가능해요. $f(2)=5$ 면 2보다 큰 값인 $f(4), f(5)$ 는 $f(2)$ 보다 크거나 같아야 하므로 $f(4)=f(5)=5$ 여야 하는데 이러면 $f(4) \times f(5) < 20$ 가 안 되잖아요?

그럼 각각의 경우에 대하여 살펴보죠.

2) 케이스 분류

2-1) $f(2)=2$ 일 때

먼저 $f(2)=2$ 인 경우 $f(3)$ 은 2, 3, 4가 가능합니다. $f(3)=5$ 는 될 수 없습니다. 그러면 $f(4)=f(5)=5$ 가 되거든요.

$f(3)=2$ 인 경우 $f(4), f(5)$ 는 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44 이렇게 8가지 경우가 가능합니다.

$f(3)=3$ 인 경우 $f(4), f(5)$ 는 33, 34, 35, 44 이렇게 4가지 경우가 가능합니다.

$f(3)=4$ 인 경우 $f(4)=f(5)=4$ 가 되겠네요. 경우의 수는 1입니다.

이때 $f(1)$ 은 1, 2가 가능하죠? 총 $2 \times (8 + 4 + 1) = 26$ 입니다.

2-2) $f(2)=3$ 일 때

$f(2)=3$ 인 경우 $f(3)$ 은 3, 4가 가능합니다.

$f(3)=3$ 인 경우 $f(4), f(5)$ 는 33, 34, 35, 44 이렇게 4가지 경우가 가능합니다.

$f(3)=4$ 인 경우 $f(4)=f(5)=4$ 가 됩니다. 경우의 수는 1입니다.

이때 $f(1)$ 은 1, 2, 3가 가능하므로 총 경우의 수는 $3 \times 5 = 15$ 입니다.

2-3) $f(2)=4$ 일 때

$f(2)=4$ 인 경우 $f(3)=4$ 입니다. 이러면 자연스럽게 $f(4)=f(5)=4$ 가 되겠네요. 경우의 수는 1입니다.

이때 $f(1)$ 은 1, 2, 3, 4가 가능하므로 경우의 수는 4입니다.

구하는 경우의 수는 $26 + 15 + 4 = 45$ 입니다.