만든놈: crazy_hansuckwon

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1번을 딱 봤을때 "있어보이게" 내는게 유행인가봄

1. $\sqrt[3]{8} \times \dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2 \times \frac{1}{2} = \boxed{1}$

미분만 할 줄 알면...

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 6x^2 - 2x$

$\therefore f'(1) = \boxed{4}$

등비수열의 항들을 표시할때 꼭 a_1을 기준으로 할 필요는 X

3. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_5 = 4, \ a_7 = 4a_6 - 16$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

$\{a_n\}$의 공비 : r

$a_7 = a_5 r^2$, $a_6 = a_5 r$ 이므로

$4r^2 = 16r - 16$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$r = 2$

$\therefore$ ㉠ $a_8 = a_5 \cdot r^3$

$= \boxed{32}$

정적분과 미분의 관계

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 - ax + 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

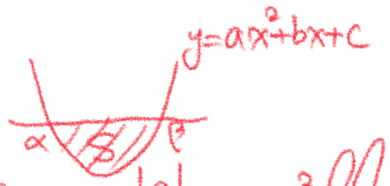
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

양변에 $x=1$ 대입 : $\int_1^1 f(t)dt = 0 = 1 - a + 1$

$\therefore a = 2$

양변 x에 대해 미분 : $f(x) = 3x^2 - a = 3x^2 - 2$

$\therefore$ ㉠ $f(2) = \boxed{10}$



$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$!!

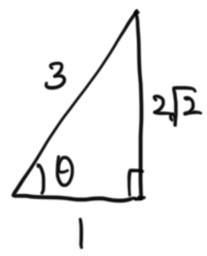
5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$ 이고 $\sin(\pi+\theta)>0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

삼각함수 각변환 복습만 3회

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$ $\therefore \cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0$ $\therefore \sin\theta<0$



$\tan\theta=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=\boxed{2\sqrt{2}}$

6. 함수

연속 기본개념

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

x^2-ax+1, $-x+1$ 각각 연속함수

$\Rightarrow$ $x=2$일때만 판별

$(4-2a+1)^2=(-2+1)^2$

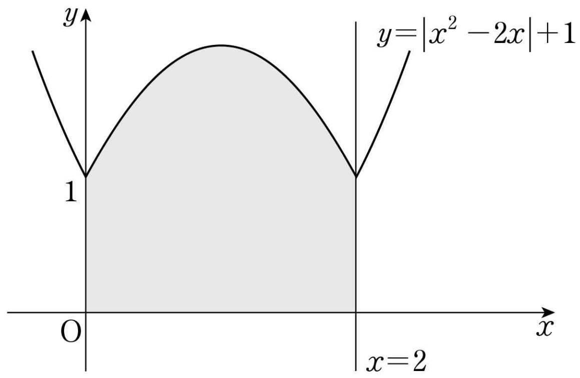
$\Rightarrow (5-2a)^2=1$

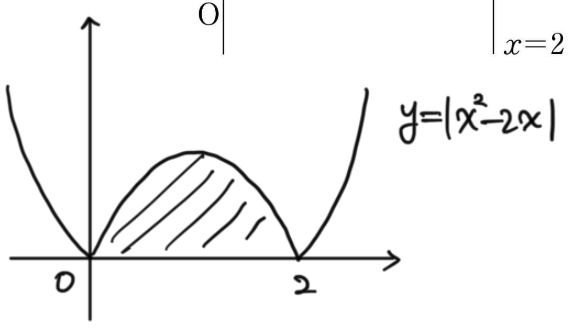
$\therefore 5-2a=\pm1$, $a=2$ or 3

㉠ a의 합: $\boxed{5}$

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4





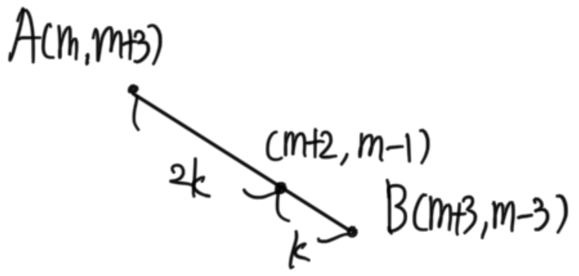
$+$

$\frac{1}{6}(2-0)^3+2=\boxed{\frac{10}{3}}$

단순대입. 내분점 안 까먹었지?

8. 두 점 A$(m, m+3)$, B$(m+3, m-3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



$(m+2, m-1)$ 이 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위의 점

$m-1 = \log_4(m+10)+m-3$

$\Rightarrow m=\boxed{6}$

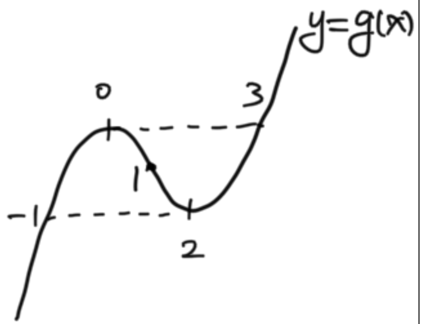
9번 주제에 $f(a)=f(b)$ 조건 해석 잘해야 함

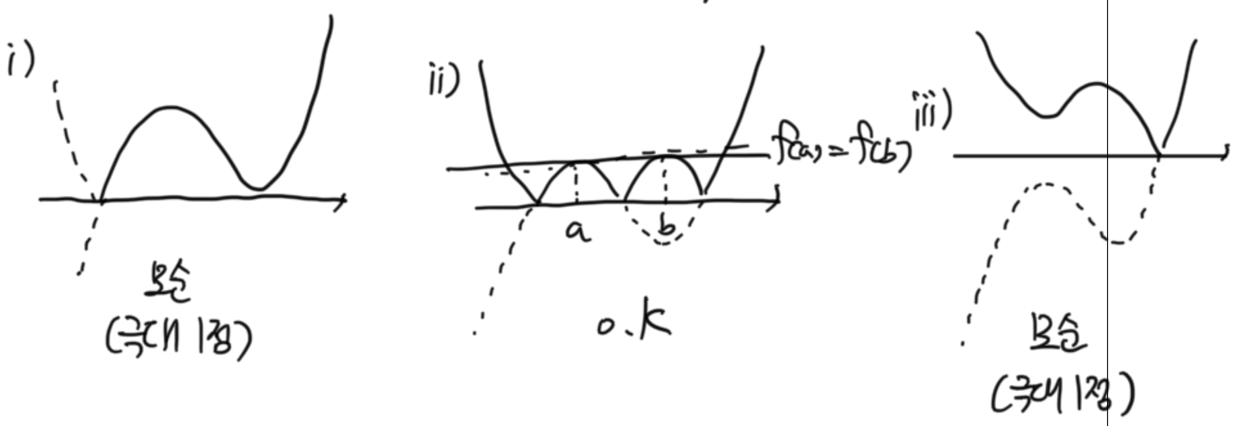
9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? (단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

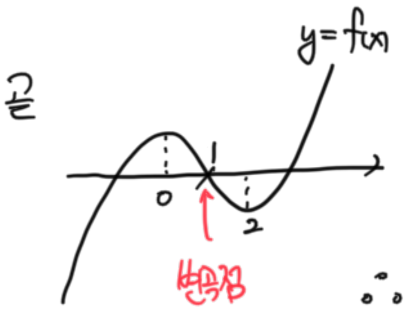
$y=x^3-3x^2+p$: $g(x)$

$y'=3x^2-6x$: $g'(x)$





곧



이므로 $f(1)=0$

$\therefore f(1)=|1-3+p|=0$

$p=\boxed{2}$

절댓값이라고 계산 풀지 마라

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $\lvert a_4\rvert+\lvert a_6\rvert=8$
(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 9a_5 = 27$ $\therefore a_5=3$

a_6은 공차가 자연수이므로 무조건 양수

i) $d\le 3$: $a_4>0$

$\Rightarrow$ (가) $a_4+a_6=8$ 에서 $a_5=4$ (모순)

ii) $d>3$: $a_4<0$

$\Rightarrow$ (가) $-a_4+a_6=8$ 에서 $a_6=8+a_4$

$\Rightarrow 8=2d$ $\therefore d=4$

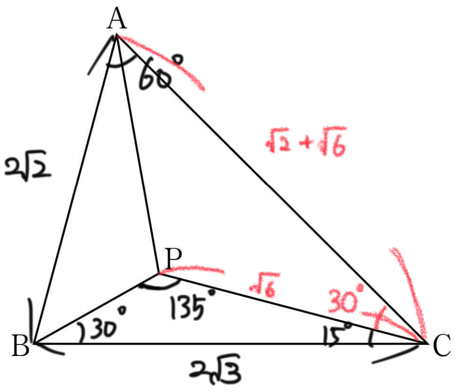
㉠ $a_{10}=a_5+5d$

$=3+20$

$=\boxed{23}$

Sin Law & Cos Law
잘 쓰다보면 되긴 하는데 $135° = 90° + 45°$인 것을 빨리 캐치해야함

11. 그림과 같이 $\angle BAC = 60°$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30°$, $\angle PCB = 15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

△ABC sin Law

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin(\angle ACB)} \Rightarrow \angle ACB = 45°$ $\therefore \angle ACP = 30°$

△BPC sin Law

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135°} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30°}$ 에서 $\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{PC} = \sqrt{6}$

△ABC cos Law

$\overline{AC} = x$로 두면

$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{2}\, x \cos 60°$

$\therefore x = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ $(\because x > 0)$

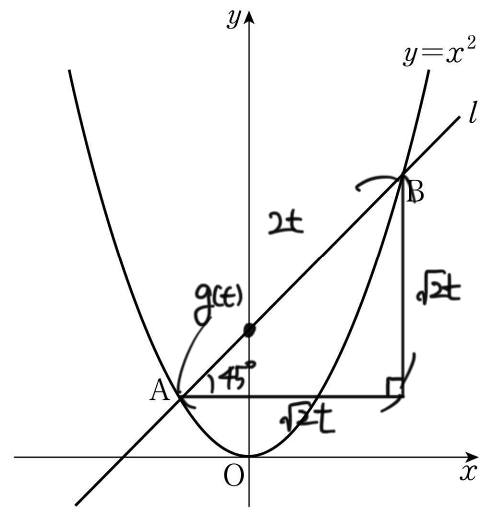
㊉ $\triangle APC = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}+\sqrt{6}) \times \sqrt{6} \times \sin 30°$

$= \boxed{\frac{\sqrt{3}+3}{2}}$

그냥 무지성 계산

12. 곡선 $y = x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



l: $x + g(t)$

$x^2 = x + g(t)$의 두 교점 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\alpha+\sqrt{2}t, \alpha^2+\sqrt{2}t)$

점 B는 $y = x^2$ 위의 점이므로 $(\alpha+\sqrt{2}t)^2 = \alpha^2 + \sqrt{2}t$

사실 똑같은 식 나옴

$\Rightarrow \alpha^2 + 2\sqrt{2}\alpha t + 2t^2 = \alpha^2 + \sqrt{2}t$

$\Rightarrow 2\alpha + \sqrt{2}t = 1$

$x^2 - x - g(t) = 0$의 교점이 A, B 이므로

$\alpha + (\alpha + \sqrt{2}t) = 1$, $\alpha(\alpha+\sqrt{2}t) = -g(t)$

곧 $2\alpha + \sqrt{2}t = 1$ 에서 $\alpha = \frac{1-\sqrt{2}t}{2}$

$\Rightarrow \alpha(\alpha + \sqrt{2}t) = \frac{1-2t^2}{4} = -g(t)$

$\therefore g(t) = \frac{2t^2-1}{4}$

㉠ $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2-1}{4t^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

13. 두 함수

f(x), g(x) 해석 모두 "대칭성" 중요!

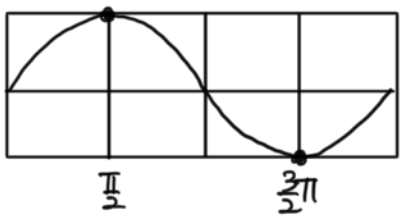
$$f(x)=x^2+ax+b\,,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

> (가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
> (나) $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

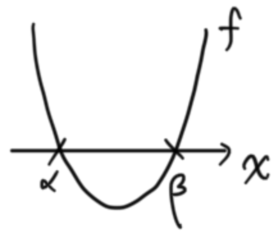
(가) $g(a\pi)=\pm1 \Rightarrow \sin(a\pi)=\pm1$



$\therefore a=\frac{1}{2}$ OR $\frac{3}{2}$

합성함수에서 주인공은 겉함수

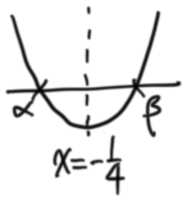
i)



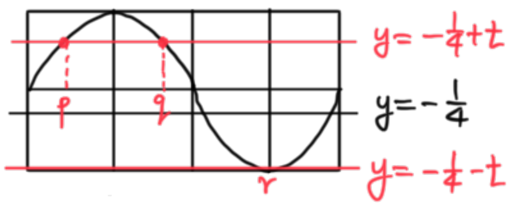
$\Rightarrow \sin x=\alpha$ OR $\sin x=\beta$ 만족하는 x의 합 $=\frac{5}{2}\pi$

① $a=\frac{1}{2}$일 때 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$

$\therefore$



$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{4}-t\\ \beta=-\frac{1}{4}+t\end{cases}$



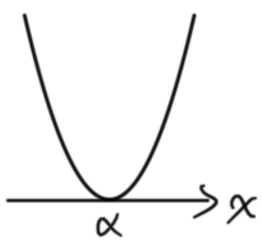
일때 성립

곧 $-\frac{1}{4}-t=-1$ 이므로 $t=\frac{3}{4}$이고, $f(x)$는 x축과 $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},0)$에서 만난다.

$\therefore f(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})$ 이므로 ㉠ $f(2)=\boxed{\frac{9}{2}}$

② $a=\frac{3}{2}$일 때 $f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$: 조건을 만족하는 경우 X

ii)



인 경우도 조건 만족 X

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

개쉬움 어떻게...14번?

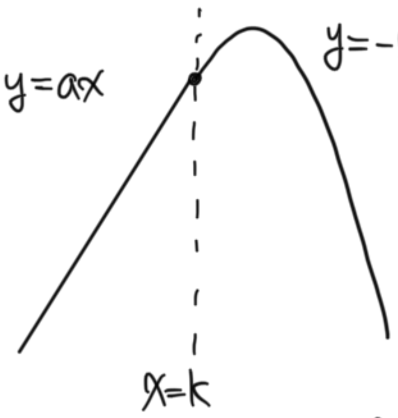
$$f(x)=\begin{cases}ax & (x<k)\\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\ge k)\end{cases}$$

$-x^2+4bx-3b^2 \to -(x-b)(x-3b)$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> < 보 기 >
> ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다. O
> ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다. O
> ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



미분가능하므로 연속 전제.

① 연속조건 $ak=-k^2+4bk-3b^2$

$\to k^2+(a-4b)k+3b^2=0$

② 미분가능조건 $a=-2k+4b$ 대입!

$\therefore 3b^2=k^2$

ㄱ. $a=1$이면 $y=ax$ 기울기 1 이므로 $f(x)$가 미분가능하기 위해선 $f'(k)=1$은 $\boxed{\text{자명}}$

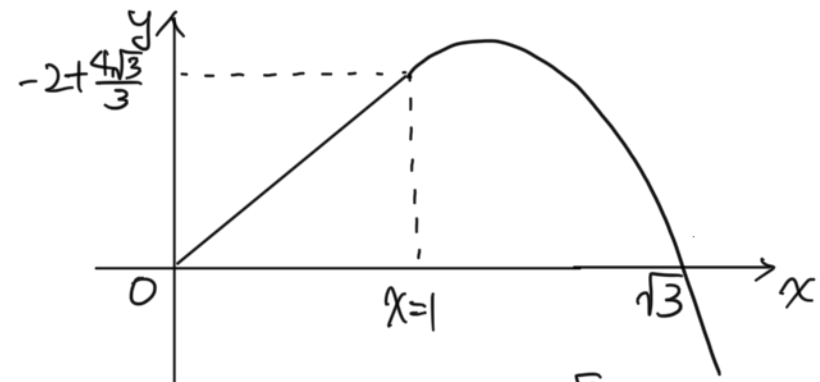
ㄴ. $k=3$이면 $3b^2=9$ 에서 $b=\sqrt{3}$ $(b>0)$

$a=-2k+4b$ 이므로 ㉠ $a=\boxed{-6+4\sqrt{3}}$

ㄷ. $f'(k)=a$ 에서 $f(k)=ak=a$ 이다.

$\therefore k=1$ $(\because a>0)$

따라서 각 식에 $k=1$ 대입하면 $a=-2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$



㉠ 넓이 $=\frac{1}{2}\times1\times\left(-2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)+\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$

$=\boxed{\frac{1}{3}}$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

무한 case 분류, 홀수가 문제임

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

$a_6=34$: 짝수이므로 $a_4+a_5=68$

($\because$ $a_4+a_5=34$일 경우 $a_6=17$) 곧 $a_2=x$, $a_4=y$로 두면

case1) x 홀수

a_1 (홀)	a_2 (홀)	a_3	a_4	a_5	a_6
1	x	$\frac{1}{2}(1+x)$	y	$68-y$	34

(x 홀수면 $1+x$: 짝수이므로)

case1-1) $\frac{1}{2}(1+x)$ 홀수

a_1 (홀)	a_2 (홀)	a_3 (홀)	a_4	a_5	a_6
1	x	$\frac{1}{2}(1+x)$	y	$68-y$	34

곧 a_2: 홀수, a_3: 홀수에서 a_2+a_3=짝수이므로 $a_4=y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}(1+x)\right)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

또 case 분류...

① a_4가 홀수이면 a_3+a_4=짝수이므로
$a_5=68-\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1+x)+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)$ ⇒ $a_2=\boxed{49}$

② a_4가 짝수이면 a_3+a_4=홀수이므로
$a_5=68-\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+x)+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ ⇒ $a_2=\frac{67}{2}$ 이므로 자연수 X → $\boxed{\text{모순}}$

case 1-2) $\frac{1}{2}(1+x)$ 짝수

a_1 (홀)	a_2 (홀)	a_3 (짝)	a_4 (홀)	a_5 (홀)	a_6
1	x	$\frac{1}{2}(1+x)$	y	$68-y$	34

곧 a_2: 홀수, a_3: 짝수에서 a_4: 홀수, a_5: 홀수로 전부 알 수 있음

⇒ $y=x+\frac{1}{2}(1+x)$, $68-y=\frac{1}{2}(1+x)+y$ 을 계산하면 $a_2=\boxed{19}$

case2) x 짝수

a_1	a_2 (짝)	a_3 (홀)	a_4 (홀)	a_5	a_6
1	x	$1+x$	y	$68-y$	34

짝 + 홀 = 홀

(x 짝수면 $1+x$: 홀수이므로)

곧 a_2: 짝수, a_3: 홀수에서 a_2+a_3=홀수이므로 $a_4=y=1+2x$ (홀수)

⇒ a_3: 홀수, a_4: 홀수에서 a_3+a_4=짝수이므로 $a_5=\frac{1}{2}(a_3+a_4)$ 이다.

$\therefore$ $\underbrace{68-(1+2x)}_{a_5}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{(1+x)}_{a_3}+\underbrace{(1+2x)}_{a_4}\right)$

이 경우 $a_2=\frac{132}{7}$로 자연수 X ⇒ $\boxed{\text{모순}}$

곧 ㉮ a_2 합: $49+19=\boxed{68}$

단답형

16. $\log_2 96-\dfrac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오. [3점]

단순 로그계산. 밑만 통일

$\log_2 96-\log_2 6$

$=\log_2 16$

$=\boxed{4}$

17. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

접선의 방정식 기초문제

↳ 접점의 x좌표 t로 두면

⇒ $8t^3-4=4$ 이므로 $t=1$

곧 접점의 좌표: $(1, 9)$ 이므로

$y=2x^4-4x+k$는 $(1,9)$를 지난다.

㉮ $\therefore$ $k=\boxed{11}$

수열의 합.
α_n, β_n 직접 구해도 되고 근과계수 써도 됨

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

$x^2-5nx+4n^2$: $(x-4n)(x-n)$ 이므로

$\alpha_n, \beta_n = n, 4n$ (물론 근과계수관계써도 전혀 문제X)

㉮ $\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n) = \sum_{n=1}^{7}(1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n)$

$= \sum_{n=1}^{7}(1-5n+4n^2)$

$= 7-5\times\frac{7\times8}{2}+4\times\frac{7\times8\times15}{6}$

$= \boxed{427}$

"원점"에서 출발한다는 것의 의미 & 속도 ⟷ 위치 관계

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\quad v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

점 P와 점 Q가 만난다 ⇒ 두 점의 위치가 같다.

$V_1(t)$ t에 대해 부정적분

⇒ $\underbrace{t^3-\frac{15}{2}t^2+kt}_{\text{P 위치함수}}$ (적분상수 C는 t=0일때 원점을 지나므로 0)

$V_2(t)$ t에 대해 부정적분

⇒ $\underbrace{-t^3+\frac{9}{2}t^2}_{\text{Q 위치함수}}$ (〃)

두 점이 "한 번만" 만난다의 의미: P의 위치함수와 Q의 위치함수가 $t>0$에서 한번만 만난다. ⇒ 두 함수를 빼면 t축과 한번만 만난다 ★

∴ $(t^3-\frac{15}{2}t^2+kt)-(-t^3+\frac{9}{2}t^2)$

$= 2t^3-12t^2+kt$

$= t(2t^2-12t+k)$

t축과 한점에서 만나 → 중근가짐

$D/4 = 36-2k=0$

∴㉮ $k=\boxed{18}$

도함수의 정적분 ⟷ 원함수의 함숫값 차이

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$

(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\geq 0)\end{cases}$

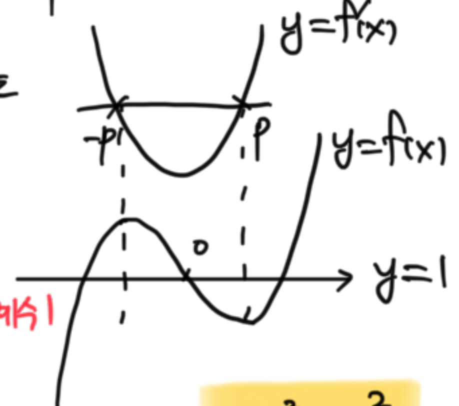
$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

애초에 $g'(0)$이라는 표현을 쓴 것 자체가 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능함.

⇒ $g(x)$의 좌미분계수 = 우미분계수 = 0

$g'(x)=\begin{cases} f'(x-p) & (x<0) \\ f'(x+p) & (x\geq 0)\end{cases}$ ⇒ $f'(-p)=f'(p)=0$

곧 $f'(x)$ 그래프는



이다.

∵ f(x) 최고차항계수 1

∴ $f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

(나) 조건에서 $x\geq0$인 부분을 보면

$g(x)=f(x+p)-f(p)$ $(x\geq 0)$은

$g(x)=\int_p^{x+p}f'(t)dt$ $(x\geq0)$으로 해석가능.

⇒ $\int_p^{x+p}(3t^2-3p^2)dt = [t^3-3p^2t]_p^{x+p}$

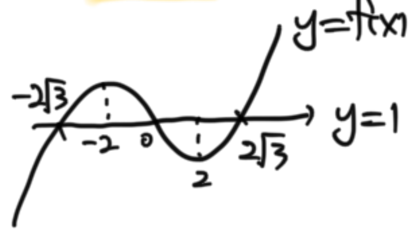
⇒ $\{(x+p)^3-3p^2(x+p)\}-\{p^3-3p^3\}$

$= x^3+3px^2$

∴ $\int_0^p g(x)dx = \int_0^p(x^3+3px^2)dx = [\frac{1}{4}x^4+px^3]_0^p = 20$

계산해보면 $p=2$

곧

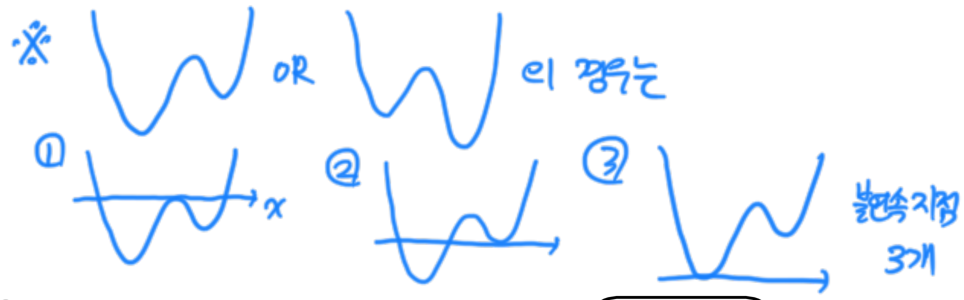


에서

$f(x)=x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})+1$

∴㉮ $f(5)=\boxed{66}$

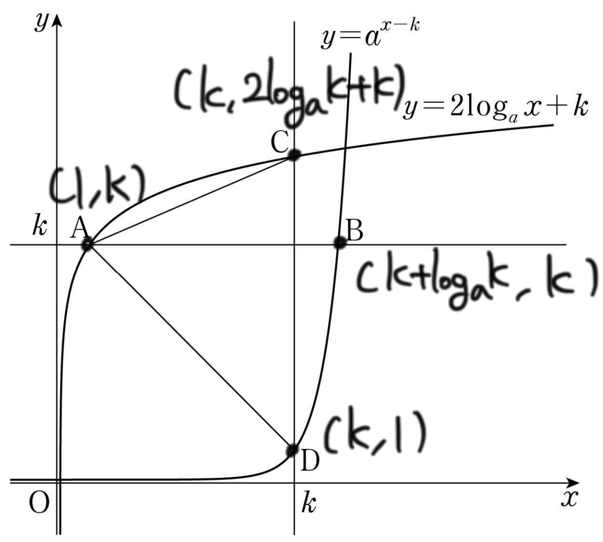
※ W OR W 의 경우는 ① ② ③ 불연속지점 3개



지면관계상 모든 경우의 수를 다 못 보여주는게 아쉽긴한데 직접 해보면 어렵지 않음.

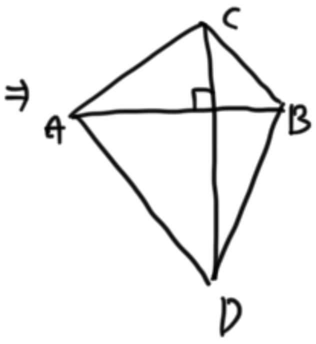
머리가 나쁘면 몸이 고생한다.. 계산 최대한 줄이기

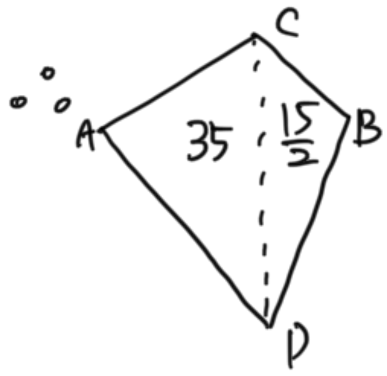
21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



지수함수와 로그함수가 동시에 등장할 때에는 역함수 관계이 있는지부터 보아야하지만 아쉽게도 그건 아님.

$\overline{AB}\times\overline{CD} = (k+\log_a k-1)(2\log_a k+k-1)$을 셈으로 계산하기엔 계산 너무 역겨워 보임.

$\Rightarrow$  에서 $\square ABCD$ 넓이 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$ 이용! ($\because$ 넓이 딱 절반)

$\therefore$  에서 $\triangle ACD$과 $\triangle BCD$는 밑변 $\overline{CD}$ 공유 $\Rightarrow$ 넓이비 = 높이비

$$k-1 : \log_a k = 35 : \frac{15}{2} = 14:3$$

곧 $\triangle ACD = \frac{1}{2}\times(2\log_a k+k-1)\times(k-1)$

$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{7}(k-1)+(k-1)\right)\times(k-1)$

$= \frac{5}{7}(k-1)^2 = 35$

$\therefore k=8$이고, $14\log_a k = 3(k-1)$에서 $a=4$

㉮ $a+k=\boxed{12}$

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

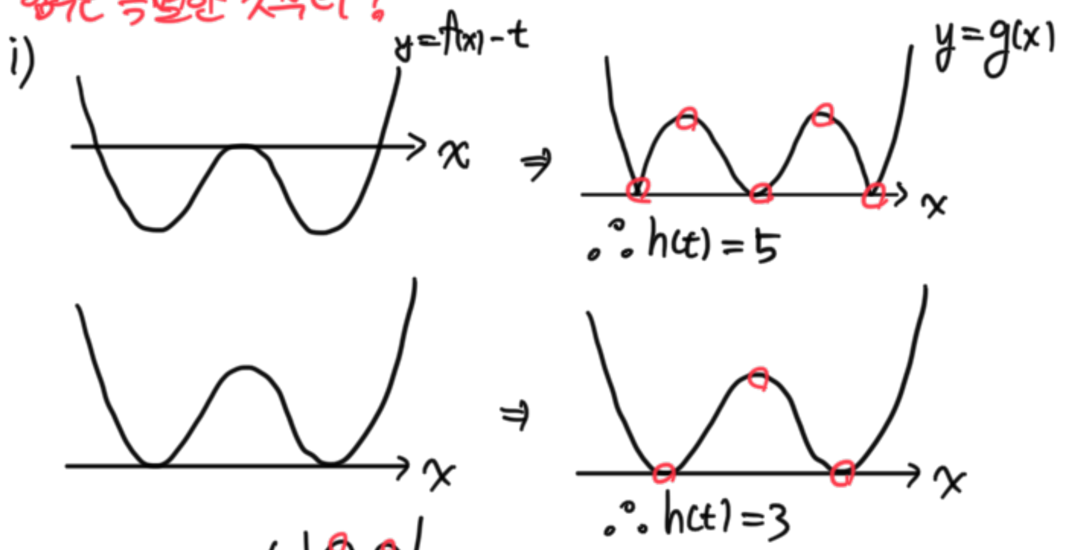
22번치고 마지막 계산에서 쉬움. 식을 제외하면 쉬움.

$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$: 기울기의 극한, 이게 존재하려면 미분계수일 필요 없음. 미분가능해도 정의되어 주의!

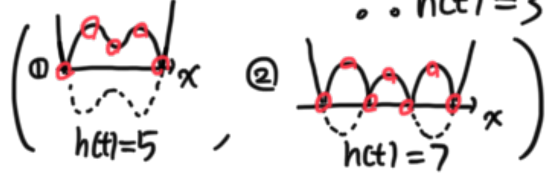
$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} = \lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ 이어야 함.

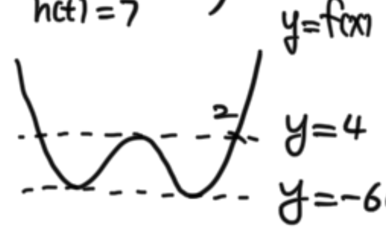
곧 ① $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$ 이거나, ② $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\alpha$, $\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=-\alpha$

함수는 특별한 것부터!

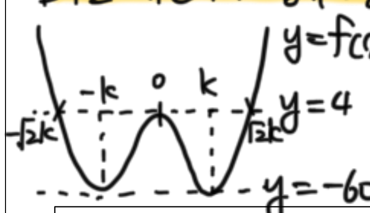
i) 

가 경계지점이다. (불연속점) (① $h(t)=5$, ② $h(t)=7$)



곧 조건에 맞게 함수를 결정해보면  이다.

근데 이거 해보면 알겠지만 이 상태 그대로 계산 때리면 진짜 개극혐임. 함수를 계산하기 쉽게 평행이동하자. $\Rightarrow$ 극점이 원점에 오게★

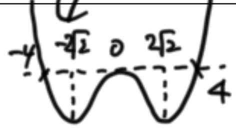


$\Rightarrow f(x-p) = x^2(x^2-2k^2)+4$ 에서
$f(x-p) = -k^4+4=-60$
$\therefore k=2\sqrt{2}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

곧  이므로 원래함수 $f(x)$는 x축방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프였던 것.

$\therefore f(4)$는 $x^2(x^2-16)+4$에 $x=6$을 대입해도 되므로 724

$h(4)=5$이므로 $\therefore$ ㉮ $f(4)+h(4)=\boxed{729}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지 선 다 형

공식 모르면 뭐...틀려야지

23. ${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\Pi_2$의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

${}_3P_2 = 3\times2 = 6$

${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

$6+9=\boxed{15}$

원순열 모르면 틀려야지

24. 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

원순열 ⇒ $(5-1)! = 4!$

$=\boxed{24}$

문제 상황 설정하고

같.포.순 ~

25. 문자 A, A, A, B, B, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝 모두에 B가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

A×3, B×1, C×2

B(_ _ _ _ _ _)B

같은것이 포함된 순열 $\frac{6!}{3!\cdot2!} = \frac{6\times5\times4}{2}$

$= \boxed{60}$

공 입장에서 본인이 들어갈 주머니를 찾는게 나을듯?

26. 서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

"서로 다른" 공 6개

⇒ A에 넣을 공 3개 고르는 경우의 수 : ${}_6C_3 = 20$

나머지 남은 3개의 공은 각각 공들의 입장에서 본인이 들어갈 주머니를 선택하면 되므로 $2\times2\times2=8$

$\therefore 20\times8 = \boxed{160}$

너무 많이 기출에 나온 유형.

27. 방정식 $a+b+c+3d=10$을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

조건이 붙어있는 것부터 계산하는게 아무래도 빠르지...

i) $d=1$ 일때 $a+b+c=7$ (a,b,c은 자연수)

곧 $a-1=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$ 으로 두면

$a'+b'+c'=4$ (a',b',c'은 0이상의 정수)

⇒ ${}_3H_4={}_6C_2=15$

ii) $d=2$ 일때 마찬가지로 $a+b+c=4$

⇒ $a'+b'+c'=1$ 이므로 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

iii) $d=3$ 일때 $a+b+c=1$ 이므로 불가능.

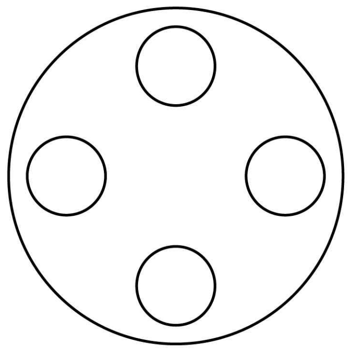
∴ ㉮ $15+3=\boxed{18}$

원순열은 헷갈릴 수 있는데.. 결국 "기준"중요!

28. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540



빵: A B C D E

"서로 다른" 5개의 빵을 4개의 접시에 담는다

⇒ (1, 1, 1, 2) 개로 나눌 수밖에 없음

⇒ 빵을 2개 넣을 그릇을 골라!

원순열은 "기준이 없기 때문에" 회전시켜도 모양이 일정해서 헷갈리는 거임 ⇒ "기준"을 잡으면 그 이후는 일반순열로 풀면 됨
이 문제의 경우 빵을 2개 넣는 그릇이 기준임.

① 빵이 2개 들어가는 그릇에 들어갈 2개의 빵 고르기 ⇒ ${}_5C_2$

A, B를 골랐다고 생각해보자. ⇒ 나머지 3개의 빵을 넣는 경우의 수 : $3!$

<${}_5C_2\times3!$ 가지수 중 1가지 경우>

AB

E C

D

② 이제 나머지 "서로 같은" 종류의 사탕을 넣으면 되는데, 사탕이 안 들어가는 그릇이 있어도 되므로 가능한 경우는 (1, 1, 1, 2), (0, 1, 2, 2) 이다.

(∵ (나) 조건에 의해 사탕을 한 그릇에 3개 이상 넣을수는 없다)

②-1 (1, 1, 1, 2)인 경우

A, B가 들어간 그릇에 2개의 사탕이 들어가지만 않으면 되므로 3가지

②-2 (0, 1, 2, 2)인 경우

C, D, E가 들어간 그릇 중 2개에 2개의 사탕을 넣으면 되므로

2개의 사탕이 들어갈 그릇을 고르는 경우의 수 ${}_3C_2\times$ 나머지 사탕을 넣는 경우의 수 $2!$

$={}_3C_2\times2!=6$

∴ ㉮ ${}_5C_2\times3!\times(3+6)=\boxed{540}$

단답형

이렇게 29번?

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다. (나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

1, 2, 3을 각각 1개 이상씩 선택하므로 합 6은 보장.

⇒ 나머지 3개의 수의 합: 2, 6, 10, 14 . . .

단 선택할 수 있는 숫자의 최댓값이 3, 최솟값이 1이므로
3개의 숫자로 만들 수 있는 최댓값은 9, 최솟값은 3임

⇒ 나머지 3개 숫자 합: 6

(1, 2, 3)을 조합해서 합 6을 만들 수 있는 경우의 수

⇒ (1, 2, 3) OR (2, 2, 2)

i) (1, 2, 3)일 때

총 뽑은 수: 1, 1, 2, 2, 3, 3

일렬로 배열하는 경우의 수: $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$

ii) (2, 2, 2)일 때

총 뽑은 수: 1, 2, 2, 2, 2, 3

일렬로 배열하는 경우의 수: $\frac{6!}{4!} = 30$

㉠ $90+30 = \boxed{120}$

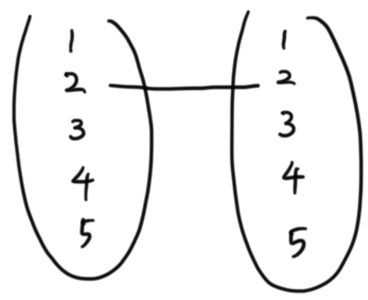
여사건만 정말이 쓰자. 안써도 좀 귀찮기만할뿐 문제 X

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다. (나) $f(2) \neq 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

$f(2) \neq 1$ 이므로 $f(2)$를 기준으로 case 분류.

i) $f(2)=2$ 일 경우

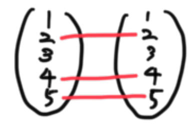


· (가) 조건에 의해 $f(1) = 1$ OR 2
⇒ 2가지

· (가) 조건에 의해 공역의 {2, 3, 4, 5}를 정의역의 {3, 4, 5}와 대응시키는 경우의 수
$_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

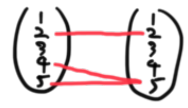
· (나) 조건에서 여사건을 생각해보면
$f(4) \times f(5) \geq 20$ 이고 이를 만족하는 $(f(4), f(5))$
→ (4, 5), (5, 5) 뿐이다.

⇒ i)-1 : $(f(4), f(5)) = (4, 5)$ 일 경우



$f(3) = 2$ OR 3 OR 4
→ 3가지

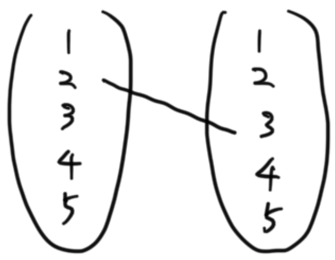
i)-2 : $(f(4), f(5)) = (5, 5)$ 일 경우



$f(3) = 2$ OR 3 OR 4 OR 5
⇒ 4가지

∴ $2 \times (20-(3+4)) = 26$

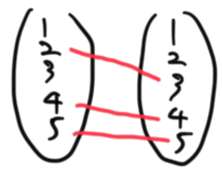
ii) $f(2)=3$ 일 경우



· (가) 조건에 의해 $f(1) = 1$ OR 2 OR 3
⇒ 3가지

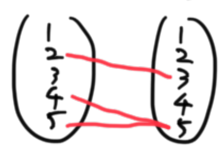
· 동일한 방법으로 {3, 4, 5}와 {3, 4, 5}
대응하는 경우의 수 $_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

⇒ ii-1) : $(f(4), f(5)) = (4, 5)$



$f(3) = 3$ OR 4
⇒ 2가지

ii-2) : $(f(4), f(5)) = (5, 5)$



$f(3) = 3$ OR 4 OR 5
⇒ 3가지

∴ $3 \times (10-(2+3)) = 15$

iii) $f(2)=4$인 경우
동일한 방법으로 생각하면 $4 \times (4-(1+2)) = 4$

iv) $f(2)=5$인 경우 불가능

∴ ㉠ $26+15+4 = \boxed{45}$

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

세상 쉬움

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

최고차항 계수만 ~

$\Rightarrow \boxed{6}$

※ 물론 분자, 분모 각각 n^2으로 나눠서

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2}}$ 으로 계산하는게 정석이긴 함

간단한 수열의 극한 ~

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}}_{\frac{1}{3}}<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}<\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}}_{\frac{1}{3}}$$

샌드위치정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

등차수열 : 일차식!!

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$\{a_n\}$: 일차식 꼴 $\Rightarrow$ $an+b$ 꼴 ($\because$ $\{a_n\}$ 등차수열)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2an-6n+b}{an+(b+5)}=4$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(2a-6)n+b}{an+(b+5)}=4$$

$\therefore$ $\dfrac{2a-6}{a}=4$ 이므로 $a=\boxed{-3}$

ℓ끼리 쪼개는 건 두 수열이 모두 수렴할 때!

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n \neq \lim_{n\to\infty}(n^2+1)\times\lim_{n\to\infty}a_n$ 이라는 것 주의!

수렴하는 수열끼리 극한 성질 성립.

$(n^2+1)a_n=c_n$, $(4n^2+1)(a_n+b_n)=d_n$으로 두면

$a_n=\dfrac{c_n}{n^2+1}$ 이고, $\lim_{n\to\infty}c_n=3$

$b_n=\dfrac{d_n}{4n^2+1}-a_n=\dfrac{d_n}{4n^2+1}-\dfrac{c_n}{n^2+1}$ 이고, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

㉠ $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)\left(\frac{c_n}{n^2+1}+\frac{2d_n}{4n^2+1}-\frac{2c_n}{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)\left(\frac{2d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(2n^2+1)d_n}{4n^2+1}-\frac{(2n^2+1)c_n}{n^2+1}\right)$$ 에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

$\Rightarrow$ ㉠ $1-6=\boxed{-5}$

※ 강 시험장에선 $a_n=\dfrac{3}{n^2+1}$, $a_n+b_n=\dfrac{1}{4n^2+1}$ 으로 놓고 풀어도 ㄱㅊ. 답만 나오면 되니까~

수열의 합과 일반항 사이의 관계
(수I 035도 충분히 나오는 주제)

27. $a_1=3,\ a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

$n=1$ 대입

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{6}{2}=3$, $a_1=3$ 이므로 $b_1=1$

$S_n-S_{n-1}=a_n$ $(n\ge2)$ 이용

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{(n-1)+1}$

$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}=-\frac{6}{n(n+1)}$ $(n\ge2)$

$n=2$ 대입하면 $\frac{a_2}{b_2}=-1$ 이므로 $a_2=-4$ 에서 $b_2=4$

$\{b_n\}$은 등차수열이므로 $b_1=1$, $b_2=4$에서

$\{b_n\}=3n-2$ $(n\ge1)$

곧 $\frac{a_n}{b_n}=-\frac{6}{n(n+1)}$ $(n\ge2)$에서

$a_n=-\frac{6}{n(n+1)}\cdot(3n-2)$ $(n\ge2)$

∴ ㉠ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{6(3n-2)}{n(n+1)}\cdot(3n-2)$

$=\boxed{-54}$

그냥 계산 때려박기. 제발 $a>1$, $0<a<1$ 까먹지 마라

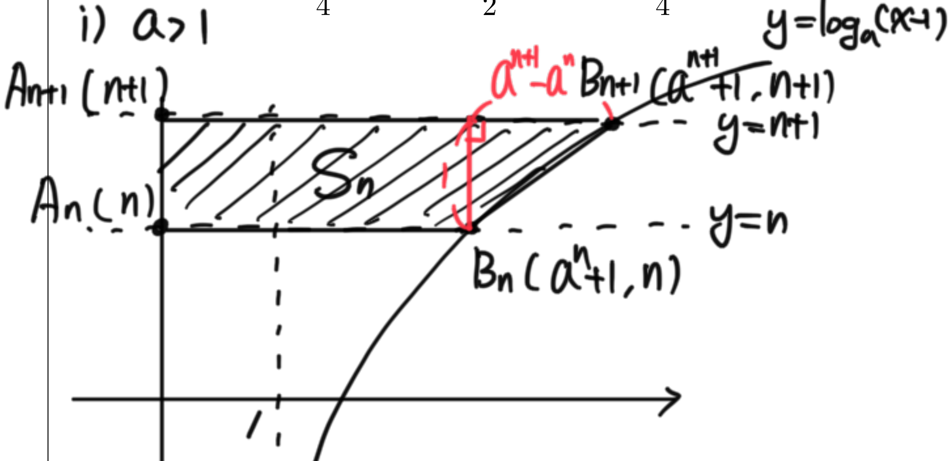
28. $a>0,\ a\neq1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

i) $a>1$



$\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{1^2+(a^{n+1}-a^n)^2}=\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$

$S_n=\frac{1}{2}\{(a^n+1)+(a^{n+1}+1)\}\cdot1$

$=\frac{1}{2}((a+1)a^n+2)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{\frac{1}{2}((a+1)a^n+2)}=\frac{3}{2a+2}$

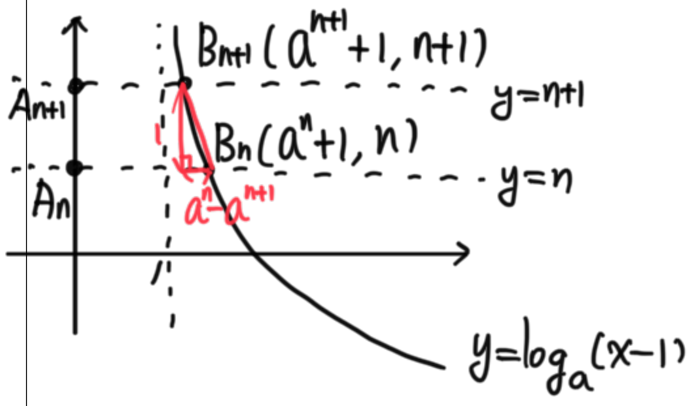
$n\to\infty$ 일 때 $\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}\approx\sqrt{(a-1)^2a^{2n}}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(a-1)^2a^{2n}}}{\frac{1}{2}((a+1)a^n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(a-1)a^n}{(a+1)a^n}=\frac{3}{2a+2}$

$a>1$ 이라서 그런거임 $(\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2(a+1)}$ ∴ $a=\frac{7}{4}$

ii) $0<a<1$



$\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{1^2+(a^n-a^{n+1})^2}$

$=\sqrt{(1-a)^2a^{2n}+1}$

S_n은 동일하므로

$S_n=\frac{1}{2}((a+1)a^n+2)$

똑같이 풀어보면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(1-a)^2a^{2n}+1}}{\frac{1}{2}((a+1)a^n+2)}$ 에서 $a<1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a^n=0 \Rightarrow \lim\frac{2}{2}=1$, 곧 $\frac{3}{2a+2}=1$ ∴ $a=\frac{1}{2}$

㉠ $\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{4}}$

단답형

$2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$ 과 같은 관점 익숙해지기에 좋은 문제

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

근의 공식 쓰던지... 어쨌든 $x^2-4nx-n=0$의 근을 구해야 함. ⊕ 내가 쓰는 방법 알려드림

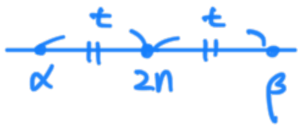
이차항계수 1인

※ 이차방정식 근 구하기 - 근의 공식 필요 X

처음엔 낯설 수 있는데 익숙해지면 개빠름

$x^2-4nx-n=0$ 에서 근과 계수의 관계 : 두 근 $\alpha+\beta=4n$

양변을 2로 나눠보면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=2n$: α와 β의 "평균"이 $2n$!

⇒  으로 생각가능. ∴ $\begin{cases}\alpha=2n-t\\ \beta=2n+t\end{cases}$

⇒ 근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta=4n^2-t^2=n$ 이 되고, $t=\sqrt{4n^2-n}$

∴ $\alpha=2n-\sqrt{4n^2+n}$, $\beta=2n+\sqrt{4n^2+n}$ 이다.

개복잡해보일 수 있는데 결국 상수항 $=\left(\frac{일차항계수}{2}\right)^2-t^2$ 임.

이므로 t 구해서 $\frac{일차항계수}{2}$에서 더하고 빼면 각각 근임

어쨌든 $2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$ 에서

$4n^2=(2n)^2$ 이고 $4n^2+4n+1=(2n+1)^2$ 이므로

$4n^2<4n^2+n<4n^2+4n+1$ (∵ n은 자연수)

⇒ $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$ ⇒ $\begin{cases}-1<2n-\sqrt{4n^2+n}<0\\ 4n<2n+\sqrt{4n^2+n}<4n+1\end{cases}$

∴ 정수 x는 $0\le x\le 4n$ 의 범위에 속하고 $a_n=4n+1$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=q$ 로 수렴하므로 $4-p^2=0$ ∴ $p=\pm2$

⇒ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+p}=q$ 에서 $2+p\neq0$ 이므로 $p=2$

∴ $p=2$, $q=\frac{1}{4}$ 에서 ㉠ $100pq=\boxed{50}$

30. 함수

그래프 역겨운 것만 견디면 됨... 실수만 하지 마세요

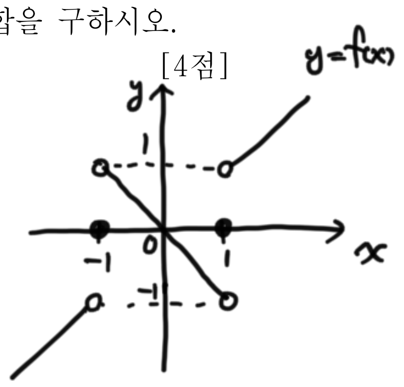
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

$$f(x)=\begin{cases}x & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -x & (-1<x<1)\\ 0 & (x=-1)\\ x & (x<-1)\end{cases}\Rightarrow$$



$g(x)$ 식이 거지같으므로 k에 값 대입하면서 상황파악해보자.

i) $k=1$ ⇒ $0\le|x|<2$ 일 때 $g(x)=f(x)$

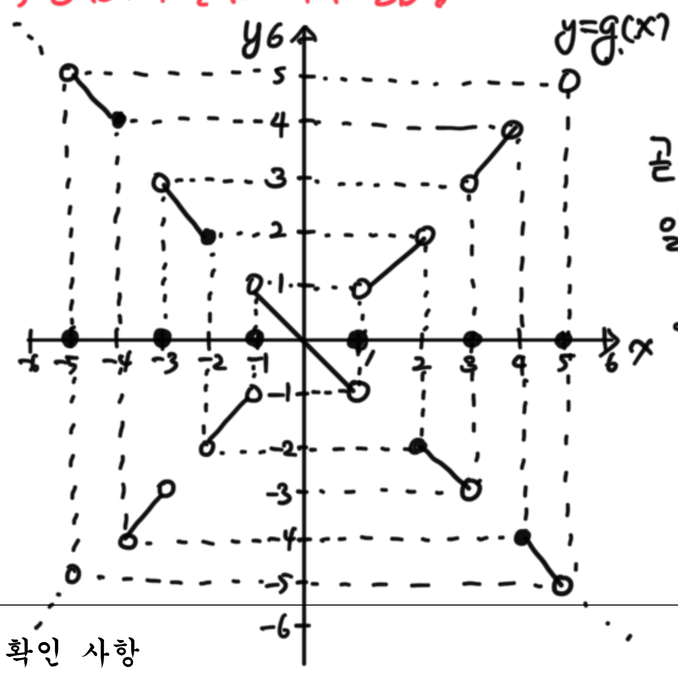
ii) $k=2$ ⇒ $2\le|x|<4$ 일 때 $g(x)=3f\left(\frac{x}{3}\right)$

iii) $k=3$ ⇒ $4\le|x|<6$ 일 때 $g(x)=5f\left(\frac{x}{5}\right)$

⋮

곧 다음과 같은 역겨운 그래프를 얻는다.

(물론 $2k-2\le|x|<2k-1$, $|x|=2k-1$, $2k-1<x\le2k$ 일 때로 식 정리해서 풀어도 아주 좋음 !)



곧 $t=2\alpha-1$ (α는 자연수) 일때 만나지 않는다.

∴ $1+3+5+7+9$

$=\boxed{25}$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

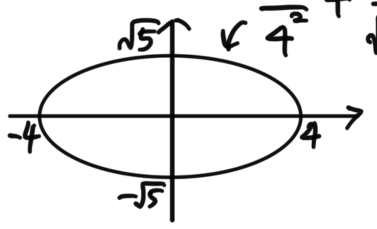
5 지 선 다 형

16×2 만 하지 말자

23. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ 의 장축의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ 8

$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{\sqrt{5}^2}=1$

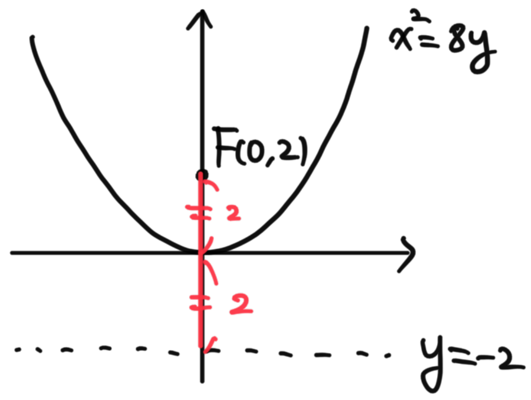


⇒ 장축의 길이: $2\times4=\boxed{8}$

$y^2=8x$랑 혼동 X

24. 포물선 $x^2=8y$ 의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

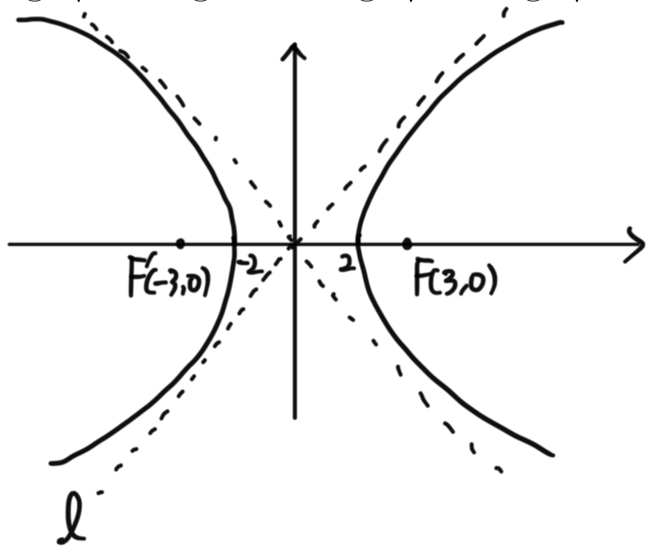


∴ ① $\boxed{4}$

그냥 뭐... 할 말 딱히 없음 그냥 알아서 푸세요

25. 한 초점이 F(3, 0)이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것을 l이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$



주축의 길이 $2a=4$ $\therefore a=2$

초점 좌표 $F(3,0) \Rightarrow a^2+b^2=3^2$ $\therefore b=\sqrt{5}$

점근선 방정식: $\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{5}}{2}x : l$

$\frac{\sqrt{5}}{2}x-y=0$ 과 $(3,0)$ 사이의 거리

$$\Rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\boxed{\sqrt{5}}$$

식으로 풀지 기하적으로 풀지 선택!

26. 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 포물선과 만나는 두 점을 $A(a, b)$, $B(c, d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

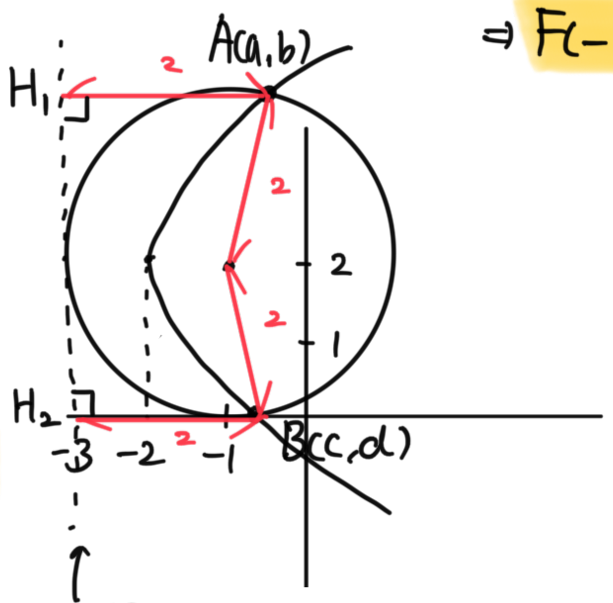
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

주어진 식을 변형하면

$y^2-4y+4=4x+8$ 이므로

$(y-2)^2=4(x+2) \Rightarrow$ 초점 $F(1-2, 0+2)$

$\Rightarrow F(-1,2)$



포물선의 정의에 의해

$\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{H_1A}=\overline{H_2B}$

$=2$ ($\because$ 원의 반지름)

곧 A의 x좌표 = B의 x좌표 = $-3+2=-1$

$\therefore a=-1,\ c=-1$

$\therefore A(-1,b), B(-1,d)$는 포물선 $(y-2)^2=4(x+2)$ 위의 점이므로 대입하면 $b, d : 0, 4$

따라서 ② $a+b+c+d=\boxed{2}$

정의는 항상 중요~

마지막 계산 중 억지인 항. 이등변 Δ 캐치하고 문제는 sin/cos Law 가능하게 준비

27. 그림과 같이 두 초점이 F$(0, c)$, F$'(0, -c)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$이 있다. 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 쌍곡선 위의 제3사분면에 있는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=5,\ \overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$$

를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$의 값은? [3점]

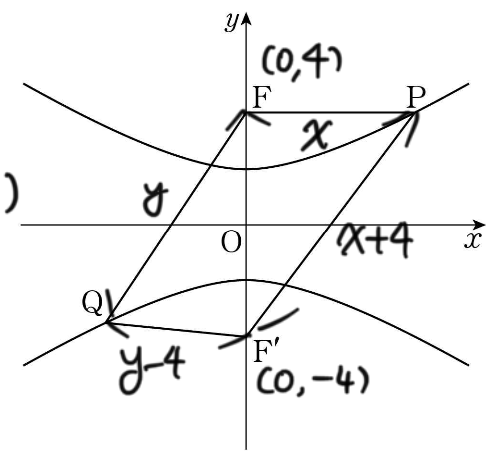
$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$의

초점 좌표: $(0, \pm\sqrt{12+4})$

$\Rightarrow (0, \pm 4)$

주축 길이: 2×2

$\Rightarrow 4$



① 10 ② $\frac{35}{3}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ 15 ⑤ $\frac{50}{3}$

$\overline{\mathrm{PF}}=x$, $\overline{\mathrm{QF}}=y$로 두면 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF'}}=4+x$, $\overline{\mathrm{QF'}}=y-4$

이때 $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$이므로 $x=\frac{2}{3}y$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=(4+x)-(y-4)=5$

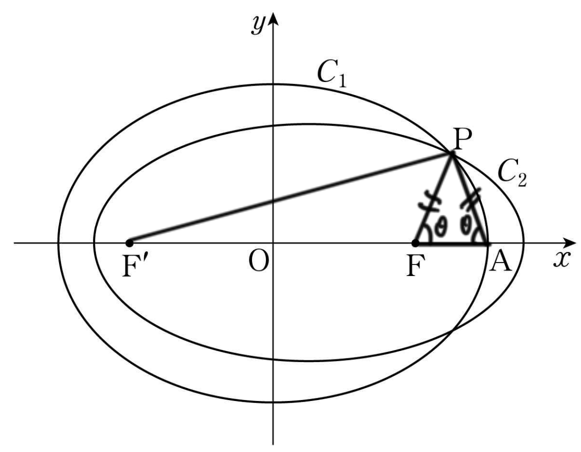
$\therefore 8-\frac{1}{3}y=5$

$\therefore y=9$이고, $x=6$

㉠ $x+y=\boxed{15}$

28. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 A$(3, 0)$, F$'(-c, 0)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\cos(\angle\mathrm{AFP})=\frac{3}{8}$일 때, 삼각형 PFA의 둘레의 길이는? [4점]

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



C_1과 C_2의 장축의 길이가 같다는 데서 출발.

C_1의 장축: $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=6$

C_2의 장축: $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PA}}=6$

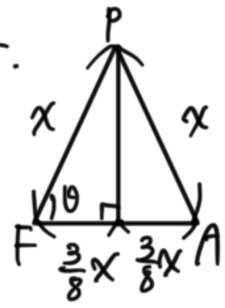
$\overline{\mathrm{PF'}}$이 공통이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}$

$\Rightarrow$ ΔPFA는 이등변 Δ!

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}=x$로 두면 $\overline{\mathrm{PF'}}=6-x$이고, A$(3,0)$이므로

$\overline{\mathrm{OF}}=3-\overline{\mathrm{AF}}$이다.

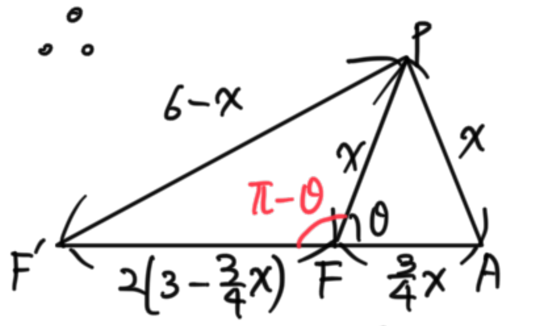
이때 ΔPFA에서



이므로 ($\because \cos\theta=\frac{3}{8}$)

$\overline{\mathrm{OF}}=3-2\times\frac{3}{8}x=3-\frac{3}{4}x$

$\therefore$



이므로 ΔPF'F에 cos Law.

$(6-x)^2=\{2(3-\frac{3}{4}x)\}^2+x^2-4x(3-\frac{3}{4}x)\cos(\pi-\theta)$

계산 쭉 이어가고 하면 $x=\frac{4}{3}$ 나옴.

$\therefore$ ㉠ 둘레: $2x+\frac{3}{4}x=\frac{11}{4}\times\frac{4}{3}$

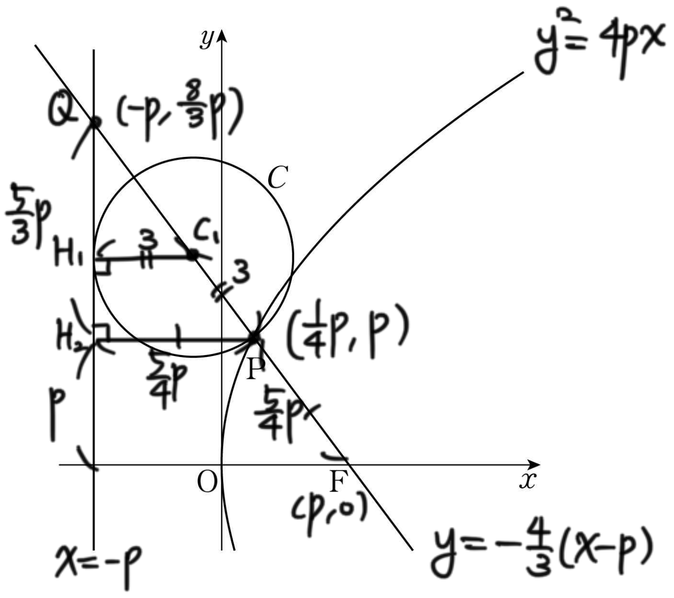
$=\boxed{\frac{11}{3}}$

마지막 cos Law 찾는데 시간 좀 걸렸음. 모르는 건 미지수로 ⊕ 언제나 정의 염두!

단답형

열심히 닮음 위주로 그림 보다보면 풀림

29. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 직선 FP 위의 점을 중심으로 하는 원 C가 점 P를 지나고, 포물선의 준선에 접한다. 원 C의 반지름의 길이가 3일 때, $25p$의 값을 구하시오. (단, 원 C의 중심의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.) [4점]



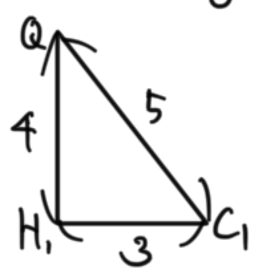
점 P의 좌표: $y=-\frac{4}{3}(x-p)$ 와 $y^2=4px$ 연립

$\Rightarrow P(\frac{1}{4}p, p)$

$\overline{PF}=\sqrt{(p-\frac{1}{4}p)^2+(0-p)^2}=\frac{5}{4}p$ 이므로 $\overline{PH_2}=\frac{5}{4}p$

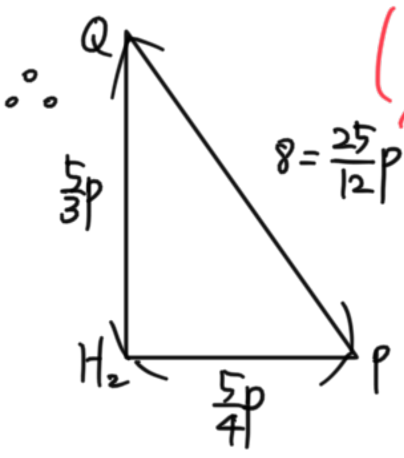
준선 $x=-p$와 $y=-\frac{4}{3}(x-p)$의 교점: $Q(-p, \frac{8}{3}p)$

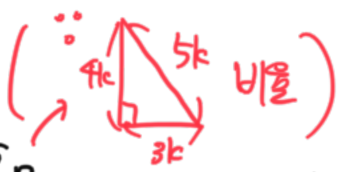
이 때, 직선 $y=-\frac{4}{3}(x-p)$의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로



이다. 곧 $\overline{PQ}=3+5=8$

∴



(∴  비율)

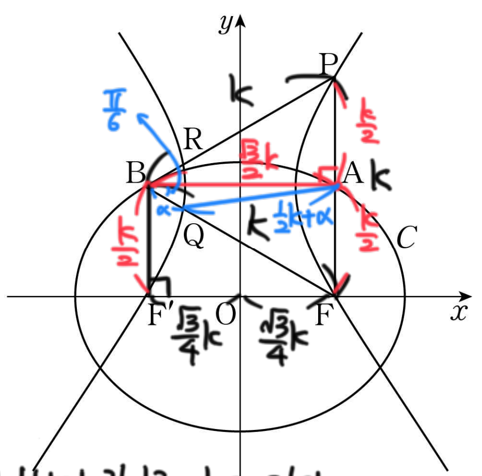
$8=\frac{25}{12}p$ 이고, $p=\frac{96}{25}$ 이다.

∴ ㉠ $25p=\boxed{96}$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자.
두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자.
세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

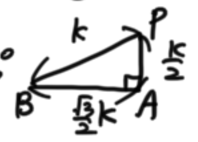
> (가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
> (나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.

$60\times\overline{AF}$의 값을 구하시오. [4점]



$\triangle BFP$의 한 변의 길이를 k로 잡자.

이 때 쌍곡선은 점 A와 B를 이은 직선에 대칭이므로

$\overline{PA}=\overline{PF}=\overline{BF'}=\frac{k}{2}$, $\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$ 이다. (∵ )

따라서 $\overline{AB}=\overline{FF'}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$ 이므로, $c=\frac{\sqrt{3}}{4}k$ 이다.

타원에서 $\overline{BF'}+\overline{BF}=\frac{k}{2}+k=$ 장축의 길이이므로

타원 C의 장축의 길이: $\frac{3}{2}k$

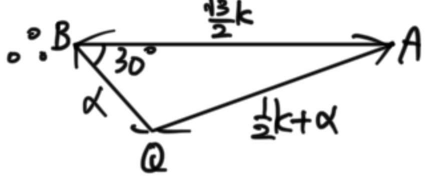
쌍곡선도 직선 $\overline{AB}$에 대칭이고, $\triangle BFP$도 직선 $\overline{AB}$에 대칭이므로

$\overline{BP}$와 쌍곡선의 교점 R과 $\overline{BF}$와 쌍곡선의 교점 Q 또한 대칭.

$\Rightarrow \overline{BR}=\overline{BQ}$ 이고, $\angle PBF=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\triangle BQR$도 정$\triangle$.

이 때, 쌍곡선에서 $\overline{BP}-\overline{AP}=$ 쌍곡선의 주축의 길이 $=\frac{1}{2}k$ 이므로

$\triangle BQR$의 한 변의 길이: α로 두면 $\overline{AQ}=\frac{1}{2}k+\alpha$

∴ 

에서 cos Law

$\Rightarrow (\frac{1}{2}k+\alpha)^2=\alpha^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}k)^2-\sqrt{3}k\alpha\cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}k$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

곧 (나) 조건에서 $\frac{3}{2}k-\frac{3}{5}k=3$ ∴ $k=\frac{10}{3}$

㉠ $60\times\overline{AF}=60\times\frac{k}{2}=\boxed{100}$