

4점 vs A형

제 2 교시

수학 영역 (A형)

1. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $2 \leq a \leq 30, 2 \leq b \leq 30$

(나) 곡선 $y = a^x$ 와 직선 $y = -x + b$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 할 때, $1 \leq \alpha \leq 2$ 이다.

2. 두 곡선

$$y = -\log_2(x-a), y = 2^x + b$$

와 좌표축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 100이하가 되도록 하는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

[4점]

2

수학 영역(A형)

3. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$ 의 값을 구하십시오. [4점]

(가) $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 10$

(나) 두 점 $(a, 2^a), (2^b, b)$ 를 지나는 직선이 원

$(x-n)^2 + (y-n)^2 = 2$ 와 만나지 않는다.

4. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 두 영역

$$\{(x, y) \mid x \leq n, y \leq n\}$$

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2^x\}$$

에 모두 속하는 점 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, $a_4 = 14$ 이다. $\sum_{n=5}^{10} a_n$ 의 값을 구하십시오. [4점]

5. 2 이상 10이하의 자연수 n 에 대하여 방정식

$$\log_n x = 8 - x$$

의 해를 α 라 할 때, $[\alpha] = k$ 를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 a_k 라 하자. $a_5 + a_6 + a_7$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

6. 양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 지표를 $f(t)$ 라 할 때, 두 자연수 a, b 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a \geq 10, b \geq 10$
- (나) $f(a) + f(b) \leq n$
- (다) $\log a$ 와 $\log b$ 의 가수는 모두 $\log 2.5$ 이하이다.

$b - a$ 의 최댓값을 a_n 이라 할 때, $\frac{a_4}{a_3}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{41}{4}$ ③ $\frac{83}{8}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{85}{8}$

7. 1이상의 양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여

$$f(t) = \log_2(3ng(t)+1)$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 t 의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 의 값을 구하시오. [4점]

8. 좌표평면에서 양수 k 에 대하여 $\log k$ 의 지표와 가수를 각각 x 좌표와 y 좌표로 갖는 점을 P_k 라 하자. 점 $A(3, 1)$ 에 대하여 두 양수 s, t 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $10 \leq s < t < 1000$

(나) 세 점 P_s, P_t, A 가 한 직선 위에 있다.

$\log \frac{t^2}{s}$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

(가) $f(3) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{f(x)} = \infty$

- ① -24 ② -28 ③ -32 ④ -36 ⑤ -40

10. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(2) = 0$
 (나) 함수 $f(x)$ 는 오직 구간 $(0, \infty)$ 에서만 증가한다.

$f'(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 28 ② 40 ③ 52 ④ 64 ⑤ 76

6

수학 영역(A형)

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(0)=1, f(3)=2$$

$$(나) 임의의 양수 h 에 대하여 $f(h)-f(0) \geq \frac{1}{3}h^3$ 이다.$$

$f(5)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{68}{3}$ ② 23 ③ $\frac{70}{3}$ ④ $\frac{71}{3}$ ⑤ 24

12. 두 실수 a, b 에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, a^2+b^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? [4점]

$$(가) f(-2)=2$$

(나) 함수 $f(x)$ 는 $x < 0$ 에서 극댓값을 갖고, $0 < x \leq 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

- ① 19 ② $\frac{79}{4}$ ③ $\frac{41}{2}$ ④ $\frac{85}{4}$ ⑤ 22

13. 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = f(2) = 0$

(나) 점 $(0, k)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3인 k 의 값의 범위는 $-4 < k < 0$ 이다.

$f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{2}$

14. 자연수 n 에 대하여 원

$$x^2 + (y-n)^2 = 1$$

과 직선

$$y = kx$$

의 교점이 존재하지 않도록 하는 모든 자연수 k 의 개수를

a_n 이라 하자. $\sum_{n=2}^{10} a_n$ 의 값을 구하십시오. [4점]

15. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 점 P_1 의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.
 (나) 선분 P_nP_{n+1} 을 $n : n+1$ 로 내분하는 점은 $(0, 2)$ 이다.

점 P_9 의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

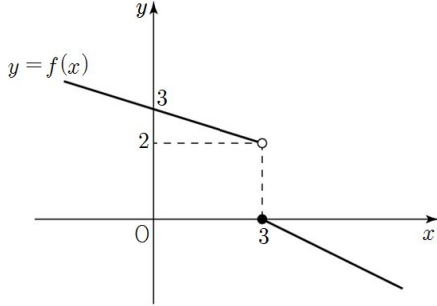
16. 좌표평면에서 직선

$$l : x + y = k$$

이 있다. 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

- (가) 직선 l 이 원 $x^2 + y^2 = 2^{2n-1}$ 과 만나지 않는다.
 (나) 직선 l 이 원 $x^2 + y^2 = 2^{2n+1}$ 과 서로 다른 두 점에서 만난다.

17. 함수 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x+3 & (x < 3) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (x \geq 3) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.



자연수 k 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = k$ 이고

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, $b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ 이라 하자. $\sum_{k=1}^5 b_k$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{27}{2}$ ② 14 ③ $\frac{29}{2}$ ④ 15 ⑤ $\frac{31}{2}$

18. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$

(나) $2^a \times 3^b \times 5^c \times 6^d$ 은 4로 나누어떨어진다.

19. 닫힌 구간 $[0, k]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) = -ax^2(x-3)$$

$$(나) P(t \leq X \leq 2) = 1 - \int_0^t f(x) dx \quad (0 < t < 2)$$

$E(X) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, k 는 상수이고, p 과 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]