bdfh n제 (수2)

수학 영역

○ 수2 자작문제 중에서 풀만한 문제들을 모았습니다.
○ 킬러 문제가 있긴 있으나, 거의 대부분의 문제들은 비킬러입니다.
○ 문제는 마음대로 쓰셔도 됩니다.
○ 오류 있으면 제보해주시면 감사하겠습니다.
○ 해설은 없습니다.

bdfh n제 (수2)

수학 영역

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\neq a)\\ \displaystyle\int_1^a f(t)dt & (x=a)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

2. 두 함수

$$f(x)=x^3-2kx^2+3,\quad g(x)=x^2-3kx$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 k의 최댓값은?

$a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여
$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

3. 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(9)}{f(6)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) 모든 음수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt \le 0$이다.
(나) $f(3)=0$이고 $\int_0^3 f(x)dx \le 0$이다.

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4. $f'(0)=2$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이

$$\int_0^{-1} |f(x)|dx$$

뿐일 때, $3\times f(1)$의 값을 구하시오.

5. $f(0)\neq 0$인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2 f(x)=\left\{xf'(x)-\int_{-1}^{k} f(t)dt\right\}^2$$

을 만족시킨다. $f(k)=\frac{1}{4}$일 때, $4\times\int_0^3 f(x)dx$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다. (나) $x\leq 0$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0이다.

$f(1)+f'(1)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오.

7. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)>1$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=(x+2)f(x), \quad h(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$$

라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 모두 극값 0을 가질 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+k & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|f(-x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱을 구하시오.

9. 실수 t에 대하여 x에 대한 함수

$$|t|x^2(x-t)$$

의 극솟값을 $f(t)$라 하자. t에 대한 방정식

$$f(t)=k|t|+1$$

가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 k의 범위는 $a<k<b$이다. $a+b=-\frac{q}{p}\sqrt{6}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10. 함수 $f(x)=(x+2)^2(x-3)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_1^x |f(t)|\times\{f(x)-f(t)\}\times\{f(x)+f(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식

$$f(x)=|t|$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(t)g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 실수 a의 값이 0 뿐이고, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=3$일 때, $32\times|f'(0)|$의 값을 구하시오.

12. 삼차함수 $f(x)$와 양의 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 0, α이다. (나) 방정식 $f(x)=k$의 모든 실근은 1, $f'(\alpha)$이다.

$f'(3)\times f(3)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha\neq 0$이고, $f'(\alpha)\neq 1$이다.)

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\lvert f(x) \rvert g(x)$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $f(x) \lvert g(x) \rvert$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.

$f'(0)+g'(0)=24$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=ax^2-\left(2a-\frac{1}{2}\right)x+1$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$k=0,\ 2,\ p$일 때, $f(k)=k$이고, 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 $g(k)$이다.

두 상수 a, p에 대하여 $\dfrac{1}{a^2 \times p^2}$의 값을 구하시오. (단, $p>2$)

15. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)\times f'(1)=k$라 하자.

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(0)$의 값은?

① $\frac{31}{8}$ ② $\frac{33}{8}$ ③ $\frac{35}{8}$ ④ $\frac{37}{8}$ ⑤ $\frac{39}{8}$

16. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+k$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(|t|)dt$$

라 하자. 함수

$$h(x)=f'(x)g(x)-\int_0^x (2u+3)g(u)du$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 실수 a의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① $-\frac{41}{2}$ ② $-\frac{43}{2}$ ③ $-\frac{45}{2}$ ④ $-\frac{47}{2}$ ⑤ $-\frac{49}{2}$

17. 최솟값이 0인 이차함수 $f(x)$와 최댓값이 0인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt & (x \le 0) \\ \int_0^x g(t)dt & (x > 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> $a=-1,\ \alpha,\ \beta$일 때, 함수 $|h(x)-h(a)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1이다.

$h(\alpha)+h(\beta)=-2$일 때, $(h \circ h)(2\beta)$의 값은? (단, $-1<\alpha<\beta$)

① -60 ② -56 ③ -52 ④ -48 ⑤ -46

18. 최고차항의 계수가 -1이고 $f(0)=f'(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=a(a>0)$에서 극대이고

$$f(a) \le (f \circ f)(a)$$

일 때, $f(\sqrt{2})$의 값은?

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

19. 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 상수 k의 값은?

> $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 f'(x)}{f(x)-x^{n-1}} = k$인 3 이하의 자연수 n이 존재하도록 하는 이차함수 $f(x)$의 개수는 1이다.

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

20. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx$의 최솟값은? (단, $f(4) \neq 0$)

> 방정식
> $$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 \left| \frac{f(x)f(t)}{f(4)} \right| dt$$
> 은 서로 다른 세 실근 a_1, a_2, a_3을 갖고 $a_1 + a_2 + a_3 = 12$이다.

① $\frac{31}{3}$ ② $\frac{32}{3}$ ③ 11 ④ $\frac{34}{3}$ ⑤ $\frac{35}{3}$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 세 수 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. (나) 세 수 $f'(4)$, $f'(5)$, $f'(6)$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

22. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=2x-2+\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(4)=p+q\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.)

23. 삼차함수 $f(x)$와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $(x-3)f(x) \le 0$이다.
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)} = f(1)$

$f(1) \ne 0$일 때, $f'(k)$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1 ④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

24. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & (x \ge 1 \text{ 또는 } x \le -2) \\ x+k & (-2 < x < 1) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2+5x & (x \le k) \\ -4x+5 & (x > k) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x = \alpha$에서 불연속인 α의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

25. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

두 함수 $\vert f(x)\vert$, $\vert f(x)-x-1\vert$은 모두 $x=0$에서 극소이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)\times f'(0)=0$
ㄴ. $f'(1)=2$이면 $f(-2)=9$이다.
ㄷ. $1<f(1)<5$이면 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to 0}\frac{t\times x-f(1)}{f(x)-f(t)}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 2뿐이다.

27. 최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 집합을 A, $f'(t)>0$인 실수 t의 집합을 B라 하자.

$$A-B=\{0\}, \quad B-A=\varnothing$$

이고, $f(0)=0$일 때, $f(-3)$의 값을 구하시오.

28. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f'(x)}{6}=g(0)x^2+g\left(-\frac{1}{8}\right)x+g\left(\frac{1}{8}\right)$$

일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

29. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)+1$을 만족시키고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{3}, \quad \int_{0}^{4} xf'(x-1)dx=\frac{1}{4}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $12\times\int_{-1}^{3} g(t)dt$의 값을 구하시오.

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)\times f'(2)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 0, $\alpha(\alpha\neq 0)$이고, $(f\circ f')(0)=(f\circ f')(\alpha)=0$이다.
(나) 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근은 β, $\gamma(\beta<\gamma)$이고, $f'(\gamma)<f'(\beta)$이다.

31. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$에 대하여 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)=b$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-b)| & (x \geq 0) \\ af(x) & (x < 0) \end{cases}$$

가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

32. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-f(t)}=0$$

을 만족시킨다. $f(1)=1$일 때, $f(0)$의 범위는 $a<f(0)<b$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

33. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 삼차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

> (가) 방정식 $x^n = 81$의 어떤 실근 α에 대하여
> $f(0) = f'(0) = f(\alpha) = 0$이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 정수이다.

34. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 2를 갖는다.
> (나) 함수 $f'(x)$의 최솟값은 -9이다.
> (다) 방정식 $(f' \circ f)(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

함수 $f(x)$가 음수인 극솟값 m을 가질 때, m^2의 값을 구하시오.

35. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않고, $t \le a$인 모든 실수 a의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$와 음수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g(t)=0$의 실근은 1 뿐이다. (나) $g(0)=1$이고 $g(k)=2$이다.

$f(0)=0$, $f(k)<0$일 때, $f(2)$의 범위는 $\alpha < f(2) < \beta$이다. $36(\beta-\alpha)$의 값을 구하시오.

36. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여

$$f(x)=t \text{ 또는 } (t-a)^2+x^2=0$$

을 만족시키는 모든 실수 x의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수 k에 대하여 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이면, 함수 $g(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다. (나) $g(-3)<g(4)$

$f'(0)=0$일 때, $f(1)$의 최솟값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

37. 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)+g(10)$의 값을 구하시오.

> 모든 실수 x에 대하여
> $$xf(x)g(x)=\left\{x-\int_0^2 f(t)dt\right\}\times\left\{x-\int_0^2 g(t)dt\right\}^2$$
> 이다.

38. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식

$$k\times f(x)=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-f(x)}$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$a_1,\ a_2,\ 0,\ a_4$$

이다. $f'(0)=0$일 때, $20k$의 값을 구하시오.
(단, k는 0이 아닌 상수이다.)

39. 함수 $f(x)=x^3-3x+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g(x)=f'(x)f(x)$이다.
> (나) $n=1$, 6일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=n$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

40. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3\sqrt{3})$의 값을 구하시오. (단, k는 $k<1$인 상수이다.)

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) 실수 t에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 7이기 위한 필요충분조건은 $k<t<1$이다.

41. 최고차항의 계수가 4인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $|f'(0)|>1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

42. 극솟값 0을 갖는 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=|f(x)|$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$a_1,\ -2,\ 0,\ a_4$$

이고, $f(-2)\times f'(0)\neq f'(0)$일 때, $f(2)$의 범위는 $a<f(2)<b$이다. a^2의 값을 구하시오.

43. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 α, $\beta(\alpha<\beta)$이다.
> (나) 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (다) 방정식 $f(f(f(x)))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f(0)=3$일 때, $\dfrac{1}{\alpha}=p+q\sqrt[3]{2}$이다. $60(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이고, $\sqrt[3]{2}$은 무리수이다.)