bdfh n제 (수1)

수학 영역

○ 수1 자작문제 중에서 풀만한 문제들을 모았습니다.

○ 지수함수와 로그함수 : 13문항
삼각함수 : 21문항
수열 : 21문항 입니다.

○ 킬러 문제가 있긴 있으나, 거의 대부분의 문제들은 비킬러입니다.

○ 문제는 마음대로 쓰셔도 됩니다.

○ 오류 있으면 제보해주시면 감사하겠습니다.

○ 해설은 없습니다.

bdfh n제 (수1)

수학 영역

1. 2 이상 50 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n 제곱근 중에서 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하시오.

2. 2 이상인 자연수 n에 대하여 $5-n$의 n 제곱근 중 실수인 것의 것의 개수가 $|n-6|$의 값과 같도록 하는 모든 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

> (가) $1 < |k| \le 50$
> (나) k의 m제곱근 중 실수인 것의 개수와
> m의 $|k|$제곱근 중 실수인 것의 개수가 같도록 하는
> 자연수 $m(m \ge 2)$이 존재한다.

4. 1이 아닌 두 양수 a, b가

$$2^{a-2} \times b = b^a = 16$$

을 만족시킨다. $a > 1$일 때, $a = p + q\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

5. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가

$$2^a = 3^b, \quad \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^c = 3^a, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$$

을 만족시킬 때, $3^a \times b$의 값은?

① $2+2\log_3 2$ ② $2+3\log_3 2$ ③ $3+2\log_3 2$
④ $3+3\log_3 2$ ⑤ $4+2\log_3 2$

6. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a + \log_3 b = \log_6 c$
(나) $\dfrac{c}{3ab} = 3^{\log_2 a}$

$ac = 48$일 때, $6(a+c)$의 값을 구하시오.

7. $(a-3\log_b 6)(a-6\log_b 2)=0$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오. (단, $b \neq 1$)

8. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 $f(2n)$의 최솟값을 구하시오.

(가) $f(64)=0$
(나) 방정식 $f(x^n)f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖고, 이 네 실근은 모두 자연수이다.

9. 2 이상 50 이하의 자연수 n과 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 세 수

$$\log_n a^2, \quad \log_a b^4, \quad 2^n \times \log_b n$$

이 모두 같은 자연수일 때, $\log_b a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\log_2 \frac{M}{m}$의 값을 구하시오.

10. $k < -\frac{1}{4}$인 상수 k에 대하여 곡선 $y = 2^{\frac{2}{3}x}$와 함수

$$y = k \times (|x| - 4)$$

의 그래프가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 음수이고, 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(4,\ 0)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BQ}} = 1 : 16$$

일 때, 점 P의 x좌표는 $-\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

11. 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_a(x-2)$와 직선 $y=b$의 교점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\log_a x$위의 점 C가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 값은? (단, a, b는 $a>1$, $b>0$인 상수이다.)

> (가) 세 점 A, $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, C는 한 직선 위에 있다.
> (나) 세 점 B, $\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$, C는 한 직선 위에 있다.
> (다) $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{16}{3}$

① $3^{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{10}}{5}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{15}}{5}}$ ④ $3^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ ⑤ 3

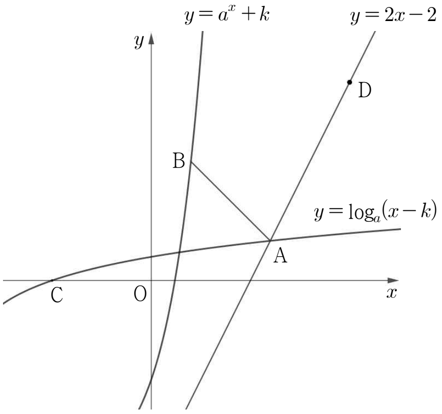
12. 곡선 $y=3^x+k$위의 점 A와 곡선 $y=\log_3(x-k)$위의 두 점 B, C에 대하여 직선 AC는 x축과 평행하고,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{ABC}=90^\circ$$

이다. 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 클 때, 점 B의 y좌표는? (단, k는 상수이다.)

① $-\log_3 2$ ② -1 ③ $-2\log_3 2$
④ $-\log_3 5$ ⑤ $-\log_3 2-1$

13. 곡선 $y=\log_a(x-k)$가 직선 $y=2x-2$와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=a^x+k$와 만나는 점을 B라 하자. 곡선 $y=\log_a(x-k)$가 x축과 만나는 점 C와 점 D$(2,\ 2)$에 대하여 삼각형 DAC의 넓이가 삼각형 DBC의 넓이의 4배이고, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{5}$일 때, $\dfrac{a}{32}=\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a>1$, $-3<k<1$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



14. 집합 $\{x \mid 0 \le x \le 2\pi\}$의 두 부분집합

$$A=\{x \mid \sin ax=-1\},\qquad B=\{x \mid |3\cos 2x|=1\}$$

의 원소의 개수가 서로 같도록 하는 자연수 a의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

15. 2 이상 50 이하의 자연수 n에 대하여 $\sin\frac{n}{4}\pi$가 어떤 음의 실수의 n 제곱근이 되도록 하는 모든 n의 개수를 구하시오.

16. 다음은 방정식

$$\cos^2\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{x-8}{16}\right)\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{x}{32}=0$$

을 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합을 구하는 과정이다.

> $\cos^2\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{x-8}{16}\right)\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{x}{32}=0$에서
> $\left(\cos\frac{\pi}{6}x+\frac{x}{16}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}\right)=0$이므로
> '(i) $\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$' 또는 '(ii) $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$' 이다.
>
> (i)의 경우:
> $\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (ii)의 경우:
> x가 자연수이므로 $-\frac{x}{16}$은 음의 유리수이고, $\cos\frac{\pi}{6}x$도 음의 유리수이다. 즉
> $\cos\frac{\pi}{6}x=-1$ 또는 $\cos\frac{\pi}{6}x=\boxed{(나)}$
> 이므로 $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$를 만족시키는 30 이하의 자연수 x의 값은 $\boxed{(다)}$ 뿐이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{(가)}+\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값은? (단, $q\neq-1$)

① $\frac{161}{2}$ ② $\frac{163}{2}$ ③ $\frac{165}{2}$ ④ $\frac{167}{2}$ ⑤ $\frac{169}{2}$

17. 두 상수 $a(a<0)$, b에 대하여 $0 \le x \le 4\pi$에서 방정식

$$\sin x = a$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n_1, $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식

$$4\cos^2 x + (1-8b)\cos x = 2b$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n_2라 하자. $n_2 - n_1 = 1$일 때, $a \times b \times n_2$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

18. $-1 < a < 0$인 상수 a에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식

$$2\sin^2 x - (2a+1)\sin x + a = 0$$

의 서로 다른 네 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 k_1, k_2, k_3, k_4라 하자.

$$k_1 \cos k_4 = a \times k_2 \cos k_3$$

일 때, $\cos k_4 = \frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

19. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y=|a\sin x|\,(a>0)$의 그래프가 직선 $y=k(0<k<a)$와 만나는 점을 x좌표가 작은 점부터 차례대로 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$라 하고, 점 $\mathrm{A_3}$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{A_1A_2}} : \overline{\mathrm{A_2A_4}} = 2:3$이고, 삼각형 $\mathrm{A_2A_4H}$의 넓이가 2일 때, $\pi\times(a+k)$의 값을 구하시오.

20. 상수 $a(0<a<4\pi)$에 대하여 $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin ax & \left(0<x\le\dfrac{\pi}{a}\right) \\ x-\dfrac{\pi}{a} & \left(\dfrac{\pi}{a}<x\right) \end{cases}$$

가 있다. 직선 $y=b(0<b<1)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만날 때, 직선 OA의 기울기는 4이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{8}$이다. $f(6)$의 값은?

(단, O는 원점이고, $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.)

① $\dfrac{21}{4}$ ② $\dfrac{27}{5}$ ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ $\dfrac{39}{7}$ ⑤ $\dfrac{45}{8}$

21. $0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\pi x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a(0<a<1)$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 C가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다.
두 점 C, (1, 0)을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 y좌표가 음수인 점을 D, 두 점 C, D에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자.

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\frac{3}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{DH_1}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{BH_2}}<\overline{\mathrm{AH_2}}<\overline{\mathrm{H_1H_2}}$)

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

22. $0 \le x < 10\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\frac{12}{k}x$와 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\frac{\pi}{2}$, x_2, x_3, $\cdots$, x_m이다.

$\tan\frac{x_2}{4}$, $\tan\frac{x_3}{4}$의 값이 모두 존재하고,

$$2\pi < x_2, \quad \tan\frac{x_3}{4}<\tan\frac{x_2}{4}$$

을 만족시키도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.
(단 m은 3 이상인 자연수이다.)

23. $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin(k\pi x + k\pi)$가 있다. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = 1$과 만나는 점의 개수를 a, 직선 $y = \frac{1}{3}$과 만나는 점의 개수를 b, 직선 $y = -1$과 만나는 점의 개수를 c라 하자.

$a = b$ 또는 $b = c$ 또는 $c = a$

가 되도록 하는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

24. 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = |\sin kx|, \quad g(x) = -\cos 6x$$

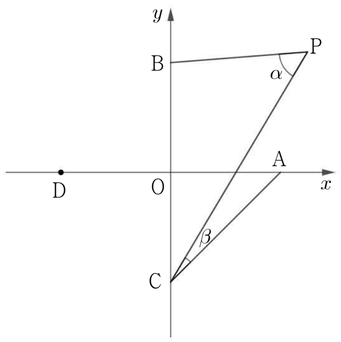
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

실수 a가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 교점의 y좌표이면 집합 $\{x \mid f(x) = a\} \cap \{x \mid g(x) = a\}$ 의 원소의 개수는 2 이상이다.

25. 좌표평면에서 두 원 $x^2+(y-4)^2=25$, $(x+4)^2+y^2=100$이 만나는 점 중 x축에 더 가까운 점을 P라 하자. 다음은 세 점 A(4, 0), B(0, 4), C(0, −4)에 대하여

$\angle \mathrm{CPB}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACP}=\beta$

라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하는 과정이다.



점 D(−4, 0)에 대하여

$\overline{\mathrm{BP}}=5$, $\overline{\mathrm{DP}}=$ (가)

이다. 사각형 BDCA가 정사각형이므로

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{DBA}=\dfrac{\pi}{2}$이고,

$\angle \mathrm{DBP}=$ (나) $-\alpha+\beta$

이다. 따라서 삼각형 PBD에서 코사인법칙에 의하여

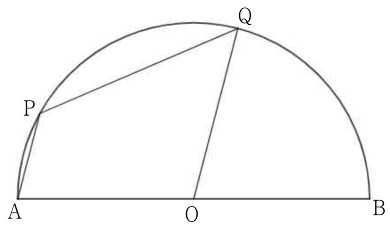
$\cos(\alpha-\beta)=$ (다)

이다.

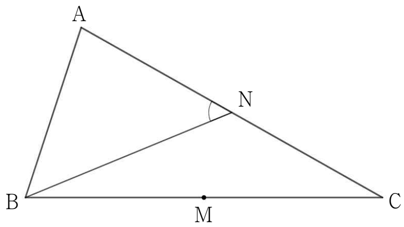
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

① $\dfrac{41}{8}\sqrt{2}\pi$ ② $\dfrac{41}{4}\sqrt{2}\pi$ ③ $\dfrac{43}{8}\sqrt{2}\pi$ ④ $\dfrac{43}{4}\sqrt{2}\pi$ ⑤ $\dfrac{45}{4}\sqrt{2}\pi$

26. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O에 대하여 반원 위의 두 점 P, Q를 두 직선 AP, OQ가 서로 평행하도록 잡는다. $\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{6}$일 때, 선분 AP의 길이를 구하시오.



27. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M, 선분 CA의 중점을 N이라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{MC}}=4$, $\overline{\mathrm{BN}}=5$일 때, $\cos(\angle \mathrm{ANB})=\frac{q}{p}\sqrt{15}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

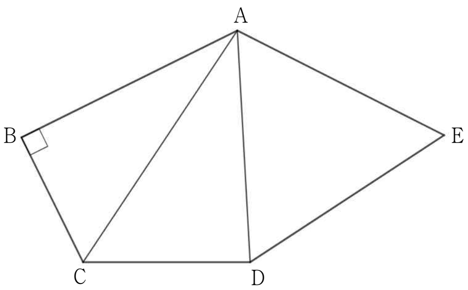


28. $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하자. 삼각형 ABD의 외접원의 넓이가 두 점 C, D를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이의 6배일 때, $40\times\sin^2(\angle \mathrm{DAC})$의 값을 구하시오.

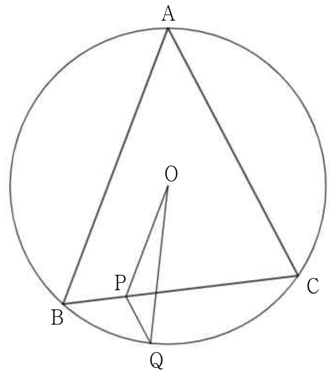
29. 그림과 같이 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$인 오각형 ABCDE에 대하여, 삼각형 ADE는 넓이가 $\frac{25}{4}\sqrt{3}$인 정삼각형이고,

$$\overline{AB} = 3\sqrt{3}, \quad \overline{BC} = 3, \quad \overline{CD} = \sqrt{13}$$

이다. 두 점 B, E 사이의 거리를 l이라 할 때, $l^2 = p + q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

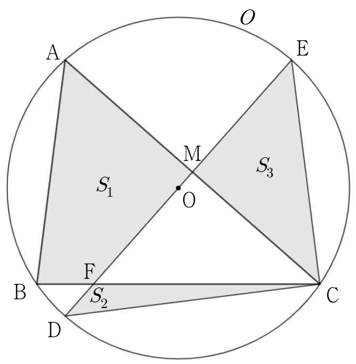


30. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 8인 원에 내접하고 $\overline{BC} = 12$인 예각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 P를 두 직선 AB, OP가 서로 평행하도록 잡고, 점 A를 포함하지 않은 호 BC 위의 점 Q를 두 직선 AC, PQ가 서로 평행하도록 잡는다. $\sin(\angle POQ) = \frac{1}{4}$일 때, 선분 PQ의 길이는?

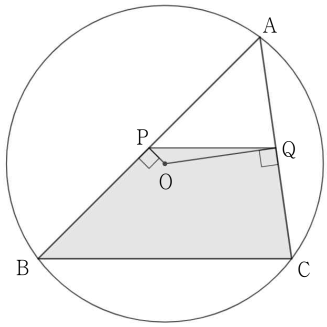


① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

31. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{CA}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원 O의 중심을 O, 선분 CA의 중점을 M이라 하자. 직선 OM이 원 O와 만나는 점 중 점 B에 더 가까운 점을 D, 점 B에 더 먼 점을 E라 하고, 직선 OM이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자.
사각형 ABFM의 넓이를 S_1, 삼각형 FDC의 넓이를 S_2, 삼각형 EMC의 넓이를 S_3이라 할 때, $S_1-S_2-S_3=\frac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



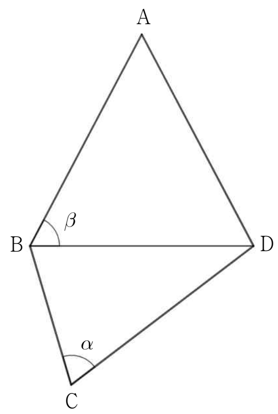
32. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC가 있다. 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P, 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이고, 사각형 PBCQ의 넓이가 21일 때, 사각형 PBCQ의 둘레의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)



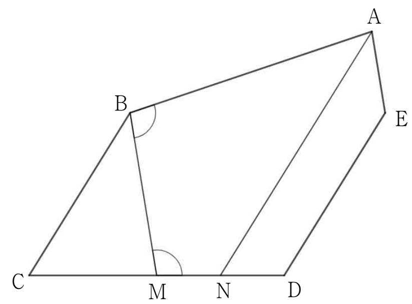
33. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$인 사각형 ABCD에 대하여 $\angle BCD=\alpha$, $\angle ABD=\beta$라 할 때,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\sin\alpha, \quad \sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{8}$$

이 성립한다. 세 점 B, C, D를 지나는 원의 중심과 점 A 사이의 거리를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오. (단, $\beta<\alpha$)



34. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{DE}=3$인 오각형 ABCDE가 있다. 선분 CD의 중점을 M, 선분 MD의 중점을 이라 하자. 세 직선 BC, AN, ED가 서로 평행하고, $\angle ABM=\angle BMD$일 때, 선분 AE의 길이는 k이다. $3k^2$의 값을 구하시오.



35. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n을

$$S_n = (a_2 - a_1) \times (a_3 - a_2) \times (a_4 - a_3) \times \cdots \times (a_{n+1} - a_n)$$

이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = k^{2-a_{n+1}}$$

이 성립한다. 다음은 $a_7 = 4$, $a_{11} = 6$일 때, a_1의 값을 구하는 과정이다. (단, k는 $k > 1$인 상수이다.)

> $S_n = k^{2-a_{n+1}}$에서
> $2 - a_{n+1} = \log_k S_n$ … ㉠
> 이고, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
> $2 - a_n = \log_k S_{n-1}$ … ㉡
> 이다. ㉠−㉡을 하면
> $a_n - a_{n+1} = \log_k S_n - \log_k S_{n-1} = \log_k (a_{n+1} - a_n)$ … ㉢
> 이다. 즉, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n$은 방정식 $-x = \log_k x$의 해이다.
> $k > 1$이므로 방정식 $-x = \log_k x$의 해는 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = d$이다.
> $a_7 = 4$, $a_{11} = 6$이므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n = \boxed{(가)}$
> 이고, ㉢에서 $k = \boxed{(나)}$ 이다.
> $S_1 = k^{2-a_2}$이므로 $a_1 = \boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가)와 알맞은 식을 $f(n)$, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $f(14) + p + q$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

36. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_{n+4} - a_{2n}\}$은 등차수열이다.

$$a_9 = 3, \quad a_{16} = -4$$

일 때, a_{24}의 값은?

① -15 ② -14 ③ -13 ④ -12 ⑤ -11

37. 첫째항과 공차가 모두 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\sin(a_n)=0$이다.
(나) $a_n < 11\pi$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 6이다.

$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

38. 공차가 0이 아니고 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=4}^{9} b_k$의 최솟값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| = |b_n|$이다.
(나) $b_4 = a_6$

① -20 ② -18 ③ -16 ④ -14 ⑤ -12

39. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (-1)^n - 1$$

이다. 등차수열 $\{b_n\}$과 상수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, $m \times b_{10}$의 값을 구하시오.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} b_k = n(m - a_n)(na_{n+1} - 3)$$
>
> 이다.

40. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) = 0$
> (나) $(a_4 - 1)(a_5 - 2)(a_6 - 3) = 0$
> (다) $(a_7 - 1)(a_8 - 2)(a_9 - 3) < 0$

$a_{10} \times a_{11} \neq 5$일 때, $a_{12} \times a_{13}$의 값을 구하시오.

41. 첫째항이 20이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 d의 값의 합은?

> (가) 어떤 자연수 n_1에 대하여 $\sum_{k=n_1}^{n_1+4} a_k \geq 0$이다.
>
> (나) 어떤 자연수 n_2에 대하여 $\sum_{k=1}^{n_2} a_k = 0$이다.

① -34 ② -32 ③ -30 ④ -28 ⑤ -26

42. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

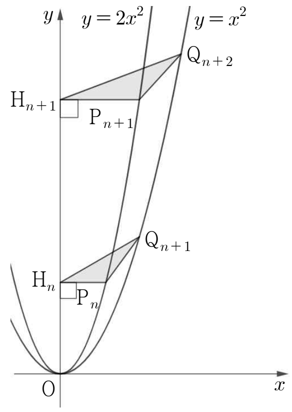
> (가) $|a_3|+|a_{15}|=|2a_7|$
>
> (나) $|a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}|=|a_{10}\times a_{13}|+3$

$a_2>0$일 때, $\sum_{k=3}^{15} a_k$의 값을 구하시오.

43. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 최댓값을 구하시오.

> (가) 수열 $\{a_{2n-1} \times a_{2n}\}$은 첫째항이 -7이고 공차가 3인 등차수열이다.
> (나) $a_2 < a_5 < a_8$

44. $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{2}\,a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y = 2x^2$위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 P_n, 곡선 $y = x^2$위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 Q_n이라 하고, 점 P_n에서 y축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\dfrac{a_n}{2}$일 때, $\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}$을 구하는 과정이다.



> 삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\dfrac{a_n}{2}$이므로,
> 점 Q_{n+1}의 y좌표와 점 P_n의 y좌표의 차는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
> $\mathrm{Q}_{n+1}(a_{n+1},\ (a_{n+1})^2)$, $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2(a_n)^2)$이므로
> $$(a_{n+1})^2 - 2(a_n)^2 = \boxed{\text{(가)}}$$
> 이고,
> $$(a_{n+1})^2 + \boxed{\text{(가)}} = 2 \times \left\{(a_n)^2 + \boxed{\text{(가)}}\right\}$$
> 이므로 수열 $\left\{(a_n)^2 + \boxed{\text{(가)}}\right\}$은 등비수열이다.
> 따라서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고,
> $$\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k} = \boxed{\text{(다)}}$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p + f(7) + g(8)$의 값은?

① 626 ② 628 ③ 630 ④ 632 ⑤ 634

45. 공비가 1이 아니고 $a_4+a_{10}=-\sqrt{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} a_n & (a_n>0) \\ 1-a_1 & (a_n\le 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $b_7=1-a_1$일 때, $3\times\sum_{k=1}^{17} b_{3k-2}$의 값을 구하시오.

46. 다음 조건을 만족시키고 공비가 음의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 100 이하의 자연수 m의 개수를 구하시오.

> (가) $\sum_{k=1}^{m} 3a_k=\sum_{k=1}^{3m} a_k$
>
> (나) $a_1\ne 0$이고 $\dfrac{a_{31}}{a_1}$은 정수이다.

47. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 $a_{21}=42$일 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}$의 값을 구하는 과정이다.

> $b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면 모든 자연수 k에 대하여
>
> $$\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k=(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)$$
>
> 이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\{(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)\}=n^2\text{이다.}$$
>
> 이때
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\{(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)\}=(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\text{이므로}$$
>
> $$(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2 \ \cdots \ ㉠$$
>
> 이다. $a_{21}=42$이므로 ㉠에 $n=20$을 대입하면
>
> $$\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(20)\times g(9)+p$의 값은?

① -350 ② -348 ③ -346 ④ -344 ⑤ -342

48. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n^2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_n-n^2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{100}a_k=50$일 때, a_1의 값은?

① -25 ② $-\frac{49}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{47}{2}$ ⑤ -23

49. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{2}{4-a_n} & (a_n \geq 1) \\ n+1 & (a_n<1)\end{cases}$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_{2k}}$의 값은?

① -160 ② -158 ③ -156 ④ -154 ⑤ -152

50. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=n+1-a_{50}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{50}\left\{(51-k)a_k-\frac{1}{2}\right\}=\sum_{k=1}^{49}S_k$$

일 때, a_{51}의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

51. 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} (k+1)a_n & (a_n < 0) \\ (k-1)a_n & (a_n \geq 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_m = -2a_{m+2}$인 자연수 m이 존재하도록 하는 k의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

52. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $(a_n - 5)(a_n - n)(a_n - 2n) = 0$이다.
>
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 항 중 가장 큰 항은 10이다.

53. 상수 k와 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n-1}+a_{2n}=(\sqrt{2}+1)a_n$
(나) $a_{2n-1}\times a_{2n}=k(a_n)^2$

$a_2=\dfrac{1}{9}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{128}(a_n)^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

54. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 자연수 k의 개수는?

(가) $a_1=40,\ a_{21}=0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-k & (a_n\geq 0) \\ k & (a_n<0)\end{cases}$$ 이다.

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

55. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+5}$이고, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때,

$$a_n = 4 - |n-3|$$

이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, $b_n = \cos\frac{S_n}{7}\pi$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = b_{n+5}$이다.

ㄴ. $b_2 + b_9 = b_3 + b_{16}$

ㄷ. $\sum_{k=3}^{26} b_k < \frac{11}{2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ