2017학년도

수능

가형 30번

평균변화율로 정의된 함수 관찰하기

번외 ① : 정석 풀이

2023학년도

풀이 ①

수능 22번

풀이 ②

번외 ② : 합성함수의 그래프

나형 30번

직접 합성방정식의 해 구하기

2017 학년도 수능 나형 30번 : 직접 합성방정식의 해 구하기

30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일 대응.

이때 최고차항의 계수가 양수이므로 증가함수 확정.

따라서 f의 역함수도 증가함수일 것.

임의의 실수 $x_1<x_2$에 대해 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(x_1)<f(x_2)$.

$f(g(x))=x$ 이므로 임의의 실수 $f(x_1)<f(x_2)$에 대해 $x_1<x_2$,

$g(f(x_1))<g(f(x_2))$ 가 되어 $g(x)$도 증가함수가 됨.

$f'(x)=3x^2-6x+6$, $\quad 4f'(x)+12x-18=f'(g(x))$

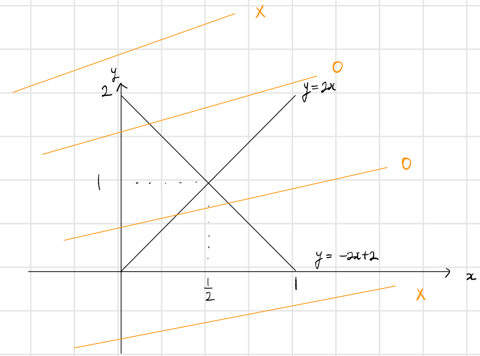
$\Leftrightarrow 4(x^2-6x+6)+12x-18=3[g(x)]^2-6g(x)+6$

$\Leftrightarrow [g(x)]^2-2g(x)-4x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow [g(x)-2x]\cdot[g(x)+2x-2]=0$

$\Leftrightarrow \boxed{g(x)=2x \quad \text{or} \quad g(x)=-2x+2}$ 가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근 가져야함.

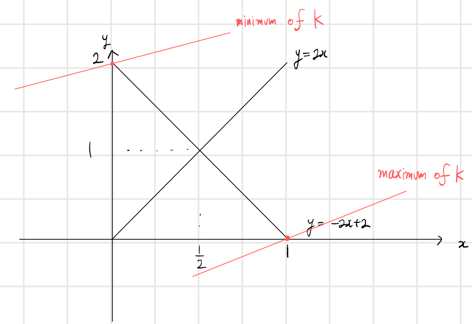
$\Leftrightarrow$ 함수 $y=g(x)$와 $y=2x$ or $y=-2x+2$ 의 그래프가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 교점 가져야함.



$g(x)$의 그래프는 이런 식으로 생길 것임.

$g(x)$가 증가함수이므로 세세한 개형은 중요X.

(접선의 기울기 변화 등 관찰하지 않아도 됨)



K값이 커질수록 임의의 지점에서 $f(x)$의 함숫값이 커지므로 대응되는 $g(x)$의 함숫값은 작아질 것.

예를 들어 $f(1)=k+4$ 에서 k값이 증가하면 $g(k+4)=1$ 에서 1을 출력하기 위한 g의 x값도 증가. 이때 $g(x)$는 증가함수이므로 특정 지점에서의 g의 함숫값은 감소하는 양상을 보임. 다시 말해 g의 그래프가 y축 방향으로 아래로 평행이동 할 것.

$g(0)=2 \Leftrightarrow 0=f(2),\ k=-8 \longrightarrow \boxed{m=-8}$

$g(1)=0 \Leftrightarrow 1=f(0),\ k=1 \longrightarrow \boxed{M=1}$

$\therefore\ m^2+M^2=65$

2017학년도 수능 가형 30번 : 평균변화율로 정의된 함수 관찰하기

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

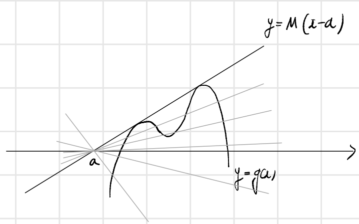
> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) $\underbrace{f(x)}$ $= \dfrac{g(x)-0}{x-a}$ $(x>a)$

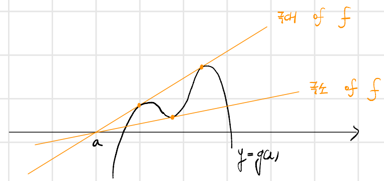
→ 점 $(a, 0)$과 점 $(x, g(x))$ 사이의 평균변화율

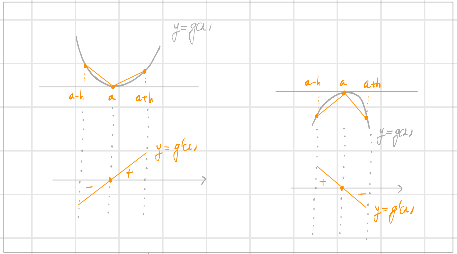
(나)



틈새 지식 : 극대·극소를 local maximum/minimum 이라 함.
최대·최소는 global maximum/minimum. abolut max/min 이라고도 함.

(다) $g(x)$가 극대인 두 지점 근처에서 $f(x)$도 두 개의 극대를 지닐 것임을 확인했으니 그래프 개형에 따라 $f(x)$는 총 3번의 극점을 찍을 것.





그럼 $g(x)$는 3번 미만의 극점을 경험해야.

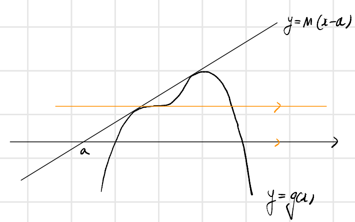
$g(x)$가 미분 가능한 함수이므로 $g'(x)$의 부호가 변동할 때가 곧 $g(x)$가 극값 가질 때.

$g'(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $g'(x)=0$은 1개 ~ 3개의 서로 다른 실근을 지닐 것.

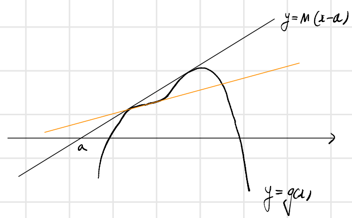
이때 서로 다른 실근의 개수가 1/2/3개면 $g'(x)$의 부호 변동 지점은 1/1/3개가 됨.

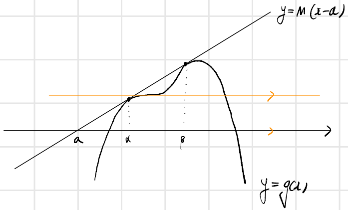
따라서 방정식 $g'(x)=0$은 1개 or 2개의 서로 다른 실근을 지닐 것.

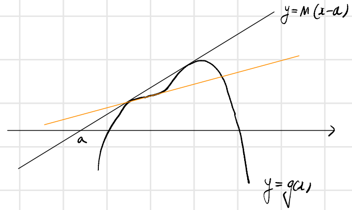
i) 2개의 실근 (하나 중근)



ii) 1개의 실근



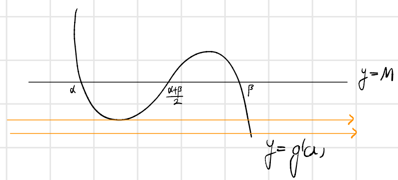




$$g(x) - M(x-a) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

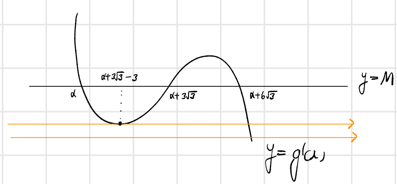
$$\Rightarrow \ g'(x) - M = -4(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x-\beta).$$

$g(x) = -4(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x-\beta) + M$ 가 서로 다른 1개 or 2개의 실근을 가지려면



x축이 이렇게 걸려야.

이때 $\beta-\alpha = 6\sqrt{3}$ 이므로 방정식 $g''(x)=0$ 을 풀어주면 — 삼차함수 $1:\sqrt{3}$ 비율관계로 대체 가능



$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3) \geq 0$ 을 만족해야함을 알 수 있음.

부등식 $g'(\alpha+3\sqrt{3}-3) \geq 0$ 을 풀어보자.

$g'(x) = -4(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x-\beta) + M$, $\beta-\alpha = 6\sqrt{3}$ 이므로

$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3) = -216 + M$ — 삼차함수의 최고차항 계수가 a이고 도함수의 서로 다른 두 실근의 차가 $2p$이면, 삼차함수의 극값의 차는 $4\times|a|\times p^3$ 으로 계산량 줄일 수 있음. 아님 x축 방향으로 평행이동해도 상관없으니 $\alpha=0$ 이나 $\alpha=-3\sqrt{3}$ 잡는 것도 굳!

$$-216 + M \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M \geq 216}$$

$\therefore$ 216

2023학년도 수능 수학 22번 : 직접 합성방정식의 해 구하기

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

(다) 에서 $f(0)=-3$ 이므로 $f(x)=x^3+px^2+qx-3$ //

$f'(x)=3x^2+2px+q$

(가) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ $(x\neq1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x^3+px^2+qx-3)-(1^3+p\cdot1^2+q\cdot1-3)}{x-1}=3[g(x)]^2+2p\cdot g(x)+q$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)+p(x-1)(x+1)+q(x-1)}{x-1}=3[g(x)]^2+2p\cdot g(x)+q$

$\Leftrightarrow 3[g(x)]^2+2p\cdot g(x)-x^2-(p+1)x-(p+1)=0$ $(x\neq1)$

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의되었으므로, $g(x)=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2+3[x^2+(p+1)x+(p+1)]}}{3}$ //

(나) $g(x)$가 최솟값을 가지므로 $g(x)=\dfrac{-p+\sqrt{p^2+3[x^2+(p+1)x+(p+1)]}}{3}$ 확정.

$g(x)$가 최소일 때는 $x^2+(p+1)x+(p+1)$가 최소일 때와 같음.

이때 $p^2+3[x^2+(p+1)x+(p+1)]=3\left(x^2+2\cdot\frac{p+1}{2}x+\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right)+p^2+3(p+1)$

$=3\left(x+\frac{p+1}{2}\right)^2+\frac{(p+3)^2}{4}$ 이므로

$g(x)=\dfrac{-p+\sqrt{3\left(x+\frac{p+1}{2}\right)^2+\frac{(p+3)^2}{4}}}{3}$ 는 $x=-\frac{p+1}{2}$ 일 때 최솟값 $\dfrac{-p+\frac{|p+3|}{2}}{3}$ 을 가짐.

$g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{5}{2}$ 이고 $\dfrac{-p+\frac{|p+3|}{2}}{3} = \begin{cases} \dfrac{-p+3}{6} & (p+3 \geq 0) \\ -\dfrac{p+1}{2} & (p+3 < 0) \end{cases}$ 이므로 $\begin{cases} \dfrac{-p+3}{6} = \dfrac{5}{2} & (p+3 \geq 0) \\ -\dfrac{p+1}{2} = \dfrac{5}{2} & (p+3 < 0) \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} p=-12 & (p+3 \geq 0) & \times \\ p=-6 & (p+3<0) & \circ \end{cases}$ 이므로 $\boxed{p=-6}$ 확정.

따라서 $\begin{cases} g(x) = \dfrac{6+\sqrt{3\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}{3} \\ f(x) = x^3-6x^2+qx-3 \end{cases}$ 확정

(다) $g(1)=3$ 이므로 $f(g(1)) = f(3) = 6$ 이용 가능 $\longrightarrow$ $\boxed{q=12}$

$f(x) = x^3-6x^2+12x-3$, $f(4) = 13$

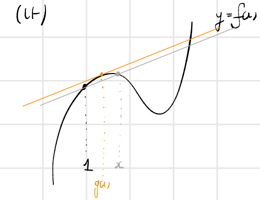
$\therefore 13$

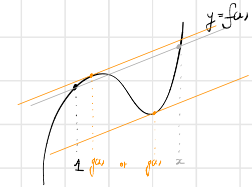
2023학년도 수능 수학 22번 : 평균변화율로 정의된 함수 관찰하기

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

(나)

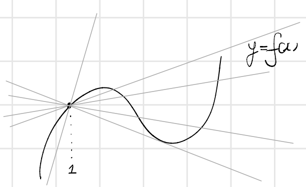




$f(x)$가 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의해 $g(x)$ 값의 후보가 적어도 1개 (실제로는 2개까지) 존재.

(가) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ $(x\neq1)$

→ 점 $(1, f(1))$과 점 $(x, f(x))$ 사이 평균변화율



관찰해보면 x가 ∞에서 $-\infty$로 갈 때,

$y=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 가 $\begin{cases} \infty\text{에서 } p\text{까지 : 감소} \\ p\text{에서 } -\infty\text{ 까지 } (x\neq1)\text{ : 증가} \end{cases}$ → $x=p$ 일 때 최솟값

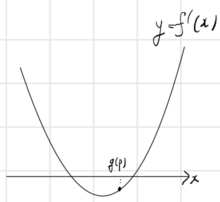
$g(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))=f'(g(1))$ 에서,

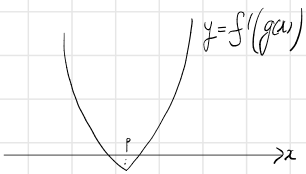
$y=f'(g(x))$ 가 $\begin{cases} \infty\text{에서 } p\text{까지 : 감소} \\ p\text{에서 } -\infty\text{ 까지 : 증가} \end{cases}$ → $x=p$ 일 때 최솟값

이때 $g(x)$는 최솟값을 가지므로 그래프가 이런 느낌으로 작성될 것.

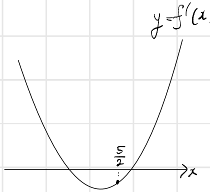
합성함수 그릴 때 x축 쓰기보다 수학(하)에서 연습했던 증가·감소 따라가기 시전해보세요!

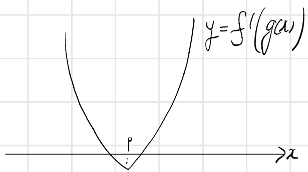
속함수



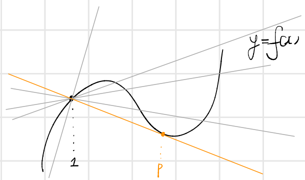


$g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{5}{2}$ 이므로 이런 느낌!





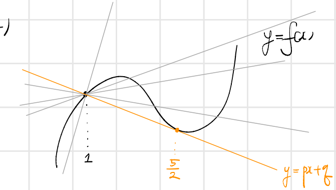
그런데 관찰해봤을 때 $\frac{f(p)-f(1)}{p-1} = f'(p)$ 이므로



$$\frac{f(p)-f(1)}{p-1} = f'(p) = f'(g(p))$$

$= f'\left(\frac{5}{2}\right)$ 에서 $\boxed{p=\frac{5}{2}}$

(다)



$f(x)-(px+q) = (x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ 에서

$f'(x)-p = 3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ 이므로

함수 $f'(x)$ 는 $x=2$ 대칭임을 알 수 있음.

삼차함수 $ax^3+bx^2+cx+d=y$ 에서

방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 이 세 실근

α, β, γ 를 가지면,

$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

에서 $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$.

또한 삼차함수의 도함수인

$\frac{dy}{dx} = 3ax^2+2bx+c$ 가

$3a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{b^2}{3a} + c$ 에서

$x=-\frac{b}{3a}$ 대칭이므로 삼차함수는

점 $\left(-\frac{b}{3a}, y\big|_{x=-\frac{b}{3a}}\right)$ 대칭.

삼차함수 $f(x)$ 의 대칭점의 x좌표를 k,

방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근의 합을 p 라 하면

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에서 $k=-\frac{b}{3a}$, $p=-\frac{b}{a}$ 이므로

$\boxed{3k=p}$ 가 성립함을 이용하면 계산량을

조금 줄일 수 있음.

따라서 $f'(1) = f'(g(1))$ 에서 $g(1)=3$ 확정.

$$\begin{cases} f(0)=-3 \\ f(g(1)) = f(3) = 6 \end{cases} \longrightarrow \boxed{p=\frac{3}{4},\ q=\frac{13}{4}}$$

$f(x)-\left(\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}\right) = (x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ 에서 $f(4)=13$

직관적으로 확인 가능.

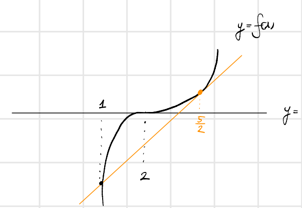
논리적으로는, $f'(a-x)=f'(a+x)$ 의

양변을 적분해주면 $f(a-x)\cdot(-1) = f(a+x)+C$,

$f(a-x)+f(a+x) = C$ (C는 적분 상수이므로 대충처리하자)

$\therefore 13$

⊕ 실제로 $f(x)$ 는 $(x-2)^3+C$ 꼴로 극값을 갖지 않는 삼차함수였다.



번외① 2017학년도 수능 가형 30번 : 정석 풀이

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
>
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
>
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가)

$(x-a)f(x)=g(x) \quad (x>a)$

$f(x)+(x-a)f'(x)=g'(x)$

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a} \quad (x>a)$

$f'(x)=\dfrac{g'(x)\cdot(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}=\dfrac{g'(x)-\dfrac{g(x)}{x-a}}{x-a}$

$=\dfrac{g'(x)-f(x)}{x-a}$

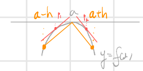
(나)

$f(\alpha)=f(\beta)=M, \quad \dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}=M$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0, \quad g'(\alpha)\cdot(\alpha-a)+g(\alpha)=g'(\beta)\cdot(\beta-a)+g(\beta)=0$

$\Leftrightarrow \; g'(\alpha)-f(\alpha)=g'(\beta)-f(\beta)=0$

$\Leftrightarrow \; g'(\alpha)=g'(\beta)=M$



미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면

충분히 작은 양수 h에 대해, 평균값 정리에 의하여

$\begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(p_2)<0, & p_2=a+\varepsilon \\ \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=f'(p_1)>0, & p_1=a-\varepsilon \end{cases}$

⊕ 충분히 작은 양수 ε에 대해,

$\begin{cases} f'(\alpha+\varepsilon)<0 \\ f'(\alpha-\varepsilon)>0 \\ f'(\beta+\varepsilon)<0 \\ f'(\beta-\varepsilon)>0 \end{cases}$

이때 f는 미분가능한 함수이고 f'은 연속 함수이므로 구간 $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$에서의 사잇값 정리에 의해 방정식 $f'(x)=0$은 근 γ $(\alpha<\gamma<\beta)$를 가짐.

$f'(x)=\dfrac{g'(x)\cdot(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$ 의 부호 변동은 $g'(x)\cdot(x-a)-g(x)$ 의 부호변동을 따름, $g(x)$가 최고차항의 계수가 -1인 사차함수이므로

$g'(x)\cdot(x-a)-g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -3인 사차함수가 됨. 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이 적어도 3개가 존재함을 확인했고

이는 방정식 $g'(x)\cdot(x-a)-g(x)=0$ 의 근과 같은데, 다항방정식의 허근은 짝수개로 존재하므로

방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 3/4개의 실근을 가져 함수 f'이 2/4번 부호 변동 함. $(x>a)$

$ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a} \quad (a\neq0)$

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; (D>0)$ or $x=-\dfrac{b}{2a} \; (D=0)$ or 실근 X $(D<0)$

$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow a(x-p)(x^2+qx+r)=0$ ($\because$ 사잇값 정리)

⋮

자세한 것은 각자 찾아보자.

(다) 방정식 $g'(x)\cdot(x-a) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 모두 $x>a$ 에 존재 $\longrightarrow$

$\alpha, \alpha, \gamma, \beta$: $x=\alpha$ 에서 $f'(x)$의 부호 변동이 일어나지 않으므로 모순

$\alpha, \gamma, \gamma, \beta$: $f'(\beta-\varepsilon) < 0$ 가 되어 모순

$\alpha, \gamma, \beta, \beta$: $x=\beta$ 에서 $f'(x)$의 부호 변동이 일어나지 않으므로 모순

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$: $\delta<\alpha$ or $\delta>\beta$ ①

방정식 $g'(x)\cdot(x-a) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 모두 $x>a$ 에 존재 X $\longrightarrow$ α, β, γ가 $x>a$에 존재하고 다른 실근 δ가 $x\le a$ 에 존재할 가능성 ②

함수 $f(x)$ 는 극값을 ① 4개 갖거나 ② 3개 가짐.

그러면 $g(x)$ 는 ① 3개 이하 or ② 2개 이하로 가져야하는데 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -4인 삼차함수이므로 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1개/2개/3개 일때

$g(x)$는 1번/1번/3번 부호 변동하여 $g(x)$가 1개/1개/3개의 극값을 지닐 것임을 알 수 있음.

i) 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 4개의 실근을 지닐때, f가 4개의 극점을 가질때

방정식 $g'(x)\cdot(x-a) - g(x) = 0$ 이 $x>a$ 에서 서로 다른 4개의 실근을 갖는 것이고 $g'(x)\cdot(x-a) - g(x)$가 $x>a$에서 4번 부호 변동하는것.

이때 $g(x)$ 는 1번 or 3번 부호 변동 해야 조건을 만족함.

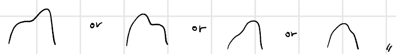
음 ㄴ 모르겠다.

ii) 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 3개의 실근을 지닐때, f가 3개의 극점을 가질때

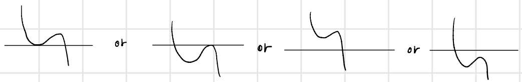
방정식 $g'(x)\cdot(x-a)-g(x)=0$ 이 $x>a$에서 서로 다른 3개의 실근을 갖는 것이고 $g'(x)\cdot(x-a)-g(x)$가 $x>a$에서 3번 부호 변동하는것.

이때 $g'(x)$는 $x>a$에서 1번 부호 변동해야 조건을 만족함. 다시 말해 방정식 $g'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1개 or 2개 (하나 중근) 가 되어야 함.

따라서 $g(x)$가 가질 수 있는 개형은



그에 따른 $g'(x)$의 개형은



음 ~ 모르겠다.

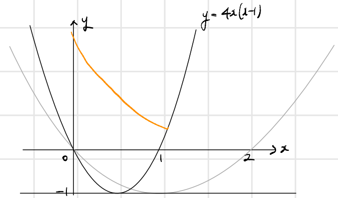
번외② 2017학년도 수능 나형 30번 : 합성함수의 그래프

30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

이때 f가 증가함수이므로 g도 증가함수다.

닫힌 구간 $[0,1]$에서 x가 0에서 1까지 움직일때 f는 k에서 $k+4$까지 움직이고

$f(a_1)=0$, $f(a_2)=1$을 만족하는 실수 a_i $(i=1,2)$에 대해 g는 a_1에서 a_2까지 움직인다.



$x(x-2) \circ g(x)$가 꽤 다양한 궤적을 남길수 있음이 느낌 오는가?

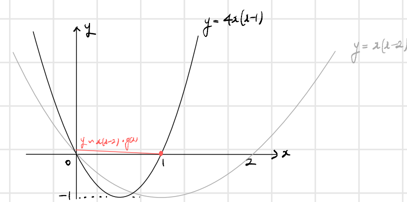
이때 k값이 커지면 a_2-a_1 값이 작아질 것임을 직관적으로 알수 있으므로

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로 주어진 방정식의 좌변은 $12x^2-12x+6$이 됨.

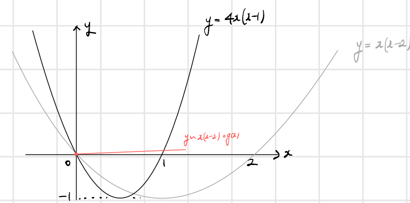
방정식 $12x(x-1)+6 = 3x(x-2)+6 \circ g(x)$

$\Leftrightarrow$ $4x(x-1) = x(x-2) \circ g(x)$의 해는

곧 함수 $y=4x(x-1)$와 $y=x(x-2) \circ g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.



두 함수의 그래프가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 만나도록 하는 가장 큰 k값은 $k=1$이고 $\begin{cases} g(0) \fallingdotseq -0.15417 \\ g(1) = 0 \end{cases}$



가장 작은 k값은 -8일 것임을 알수 있었다. $\begin{cases} g(0) = 2 \\ g(1) \fallingdotseq 2.1542 \end{cases}$