수학 영역

5지선다형

1. $\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\log_6 4+\cancel{2}\log_6 3^2$

$=\log_6 4\times 3^2$

$=\log_6 6^2 = 2$

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $\dfrac{a_5}{a_3}=4$일 때, a_4의 값은? [2점]

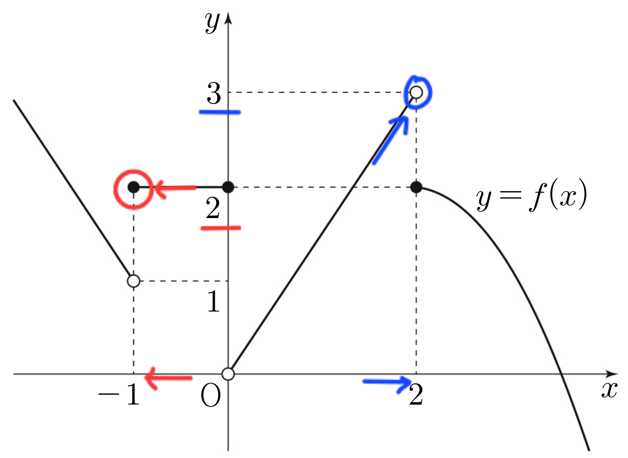
① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

$\dfrac{a_5}{a_3}=r^2=4$

$r=2$ (모든 항 양수)

$a_4=a_1\times r^3=3\times 2^3=24$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

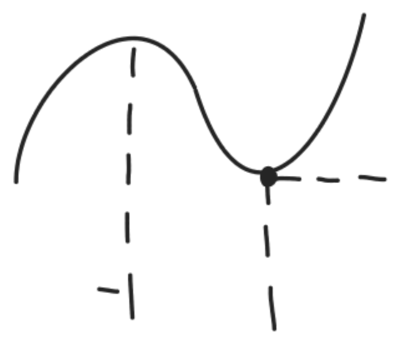
2　3

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 함수 $f(x)=2x^3-6x+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$



$f(1)=2-6+a=2$

$a=6$

5. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = h^2+2h+3$$

$h \to 0$　$f'(1) = 0^2+2\cdot 0+3 = 3$

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

감소

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$3 = \log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b$

$1 = \log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b$

$2 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{2-a}{5-a}$, $\left(\frac{2-a}{5-a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

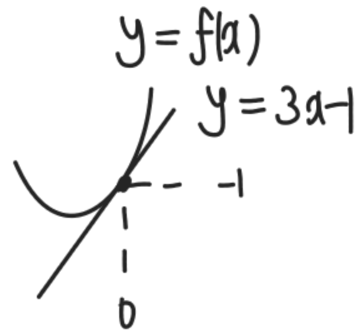
$\frac{2-a}{5-a} = \frac{1}{4}$

$8-4a = 5-a$

$a=1$, $b=3$.

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9



$f(0)=-1$

$f'(0)=3$

$g'(x) = 1\cdot f(x)+(x+2)f'(x)$

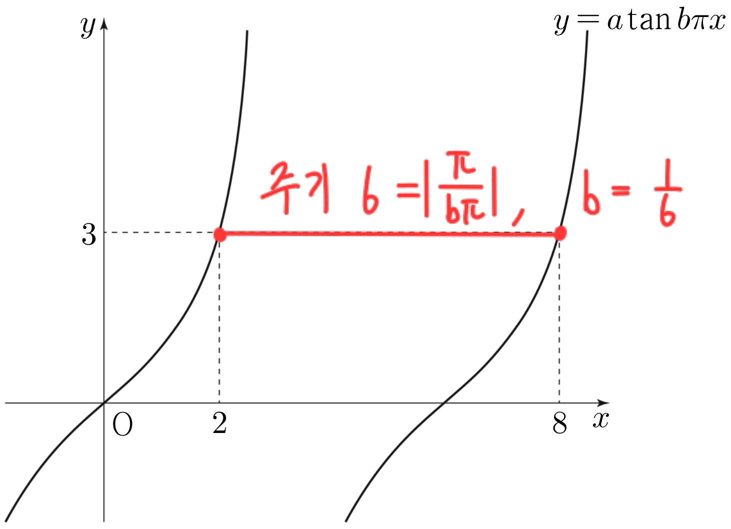
$g'(0) = f(0)+2f'(0)$

$= -1+2\times 3$

$= 5$

지수,로그는 관계 찾기 (평행/대칭 이동, 역함수) 밑 같다

8. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2,\,3)$, $(8,\,3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

(2,3) 대입 $3=a\tan(2b\pi)$
$=a\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$) $b=\frac{1}{6}$.

$3=a\times\sqrt{3}$, $a=\sqrt{3}$

$a^2b=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

$=F(x)$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$, $F(0)=0$.

$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)=1$

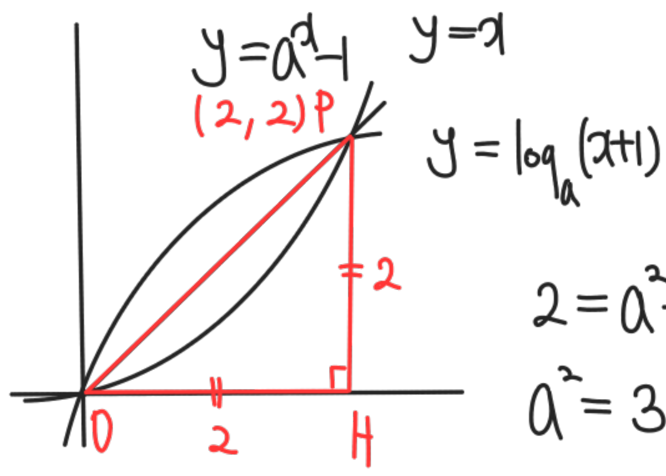
$f(x)=x^3-2x^2+x+1$

$f(2)=8-8+2+1=3$

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$\begin{cases} y=a^x \\ y=\log_a x \end{cases}$) 역함수 $\xrightarrow{y\ -1}$ $\xrightarrow{x\ -1}$ $\begin{cases} y=a^x-1 \\ y=\log_a(x+1) \end{cases}$) 역함수



$2=a^2-1$

$a^2=3$, $a=\sqrt{3}$

① 삼차함수 세 근의 합 설정
② 삼차함수 넓이 공식
③ 일차함수 적분 = 평균 × 구간

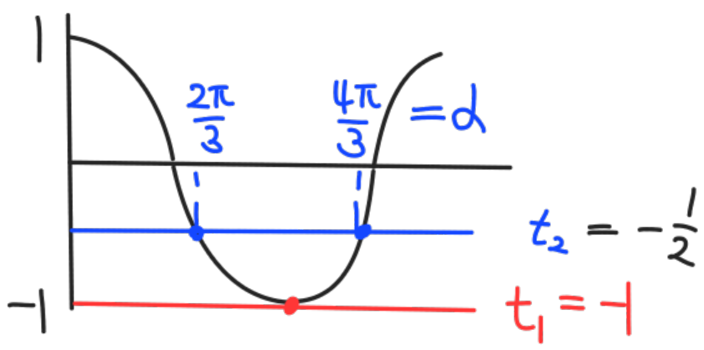
11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k\times\alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = k$

$2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0.$

$\cos x = t_1, t_2$



$\cos x = -1$ 대입

$2 - 3 + k - 2 = 0, \quad k = 3$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = (\cos x + 1)(2\cos x + 1) = 0$

$t_1 = -1 \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$

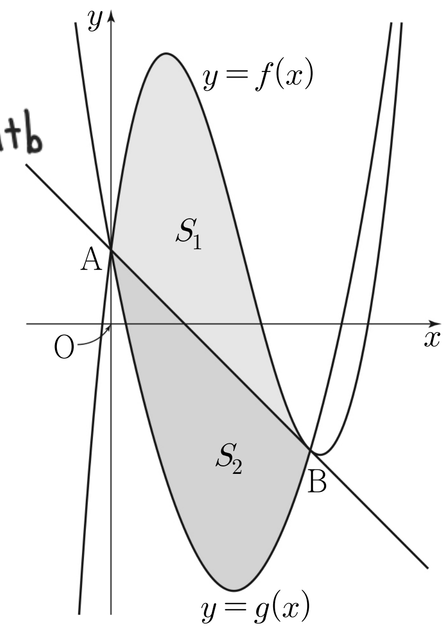
$\cos x = -1, \ x = \pi$

$\cos x = -\frac{1}{2}, \ x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} = \alpha$

$k \times \alpha = 4\pi$

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0, 1)$, 점 $\mathrm{B}(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,
곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]

$l(x) = ax+b$



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$f(x) = l(x)$ 의 근 0, k, k
$1\cdot x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = ax+b.$
합 $0+k+k = 6.$
$k = 3.$ ①

$\mathrm{B}(3, f(3)) = \mathrm{B}(3, -2)$

$l(x) = -x+1$

$f(x) - l(x) = 1x^3 \ldots$

$S_1 = \frac{1}{12}\times(3-0)^4$

$S_1 = \int_0^3 f(x) - l(x)\,dx$ ② $= \frac{1}{12}\times 3^4 = \frac{27}{4}$

$S_2 = \int_0^3 l(x) - g(x)\,dx = \int_0^3 -x+1\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx$

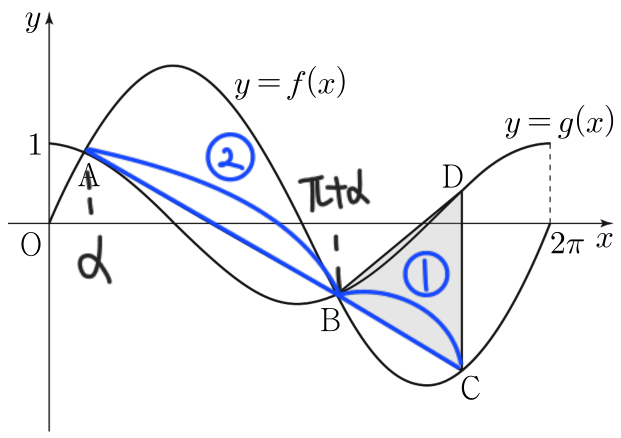
$\int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^3 \underline{-x+1}\,dx - \frac{27}{4}$ ③

$(3-0) \quad x = \frac{3}{2}$

$= -\frac{1}{2}\times(3-0) - \frac{27}{4} = -\frac{33}{4}$

① 구간에서의 최대, 최소 함수 → 경계 관찰
② 삼차함수 비율 관계

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 하자, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]

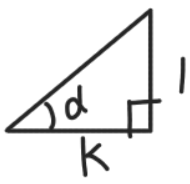


① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$ ④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

$A(\alpha, \cos\alpha)$

$k\sin\alpha = \cos\alpha$. $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{k}$



ⓧ ⓨ

주기 π $\Rightarrow$ $B(\pi+\alpha, \cos(\pi+\alpha))$ Ⓐ
$= B(\pi+\alpha, -\cos\alpha)$ Ⓑ

② $+\pi$ $-2\cos\alpha$

① $+\frac{\pi}{2}$ $-\cos\alpha$

$C(\frac{3\pi}{2}+\alpha, -2\cos\alpha)$ Ⓒ

$y=k\sin x$ 대입

$-2\cos\alpha = k\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

$-2\cancel{\cos\alpha} = -k\cancel{\cos\alpha}$,

$k=2$. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-k\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)$

$=\frac{\pi}{4}\times(\sin\alpha+2\cos\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

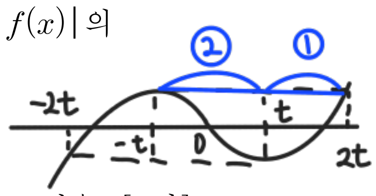
14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x = x(x^2-3t) \quad f'(x)=3x^2-3t^2$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



$\pm t, 2t = -2, 1$ 되는 $t=\frac{1}{2}, 1, 2$ 가 경계.

〈보 기〉

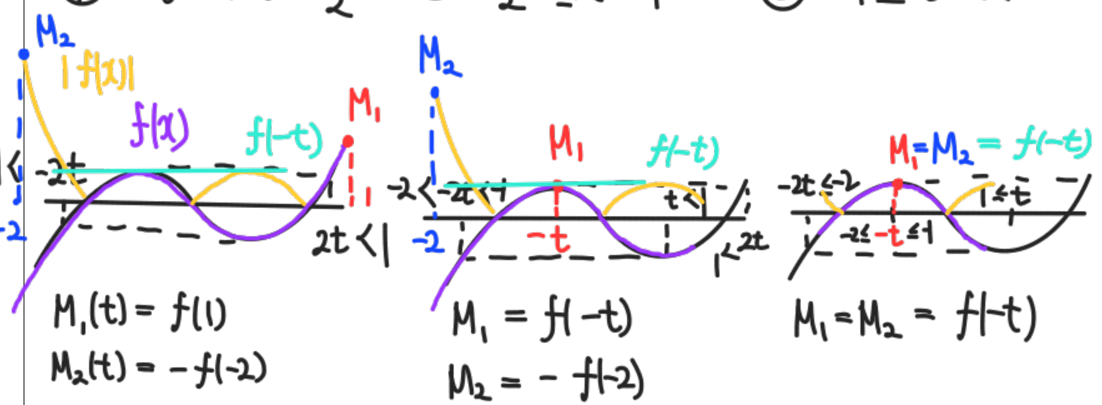
ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $0<t<\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}\le t<1$ ③ $1\le t\le 2$



$M_1(t)=f(1)$
$M_2(t)=-f(-2)$

$M_1=f(-t)$
$M_2=-f(-2)$

$M_1=M_2=f(-t)$

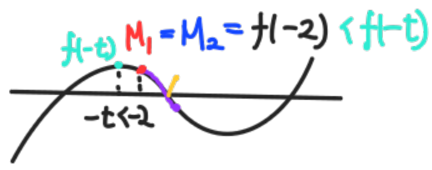
ㄱ ③ 에서 $g(t)=2f(-t)=4t^3$. $g(2)=32$

ㄴ ①, ② 는 $g(t)>2f(-t)$

* $t>2$ 인 경우 $g(t)<2f(-t)$

③ 에서 $g(t)=2f(-t)$

$1\le t\le 2$ 이므로 $1+2=3$



ㄷ $g(t)=\begin{cases} f(-t)-f(-2) & (\frac{1}{2}\le t<1, ②) \\ f(1)-f(-2) & (0<t<\frac{1}{2}, ①)\end{cases}$

$=\begin{cases} 2t^3-6t^2+8 & (\frac{1}{2}\le t<1) \\ -9t^2+9 & (0<t<\frac{1}{2})\end{cases}$

$g'(t)=\begin{cases} 6t^2-12t & (\frac{1}{2}\le t<1) \\ -18t & (0<t<\frac{1}{2})\end{cases}$

$g'(\frac{1}{2}+)-g'(\frac{1}{2}-)=(\frac{6}{4}-6)-(-9)$

$=\frac{9}{2} \neq 5$

① 역추적

② a_n 값에 따른 a_{n+1} 범위 체크

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} > \frac{1}{2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n \geq 0 & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

$a_{n+1} \geq 0$.

$a_n = 2^{a_{n+1}}$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$a_5 < 1$ $a_6 = 2^3 = 8$. $a_5 + a_6 = 1$. $a_5 = -7 \geq 0$ (X)

$a_5 \geq 1$ $a_6 = \log_2 a_5$. $\underset{\geq 1}{a_5} + \underset{\geq 0}{\log_2 a_5} = 1$ $\therefore a_5 = 1$. $a_6 = 0$

$a_5 = 1$
- $a_4 < 1$: $a_5 = 2^2 \neq 1$ (X)
- $a_4 \geq 1$: $a_5 = \log_2 a_4 = 1$. $\boxed{a_4 = 2}$

$a_4 = 2$
- $a_3 < 1$: $a_4 = 2^1$ 가능. $\boxed{a_3 < 1}$
- $a_3 \geq 1$: $a_4 = \log_2 a_3 = 2$. $\boxed{a_3 = 4} \geq 1$ 가능.

$a_3 < 1$
- $a_2 < 1$: $a_3 = 2^0 = 1$ <1 (X)
- $a_2 \geq 1$: $a_3 = \log_2 a_2 < 1$. $\boxed{1 \leq a_2 < 2}$ 가능

$a_3 = 4$
- $a_2 < 1$: $a_3 = 2^0 = 1 = 4$ (X)
- $a_2 \geq 1$: $a_3 = \log_2 a_2 = 4$, $\boxed{a_2 = 16}$ 가능

$1 \leq a_2 < 2$
- $a_1 < 1$: $a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. $1 \leq a_2 < 2$ (X)
- $a_1 \geq 1$: $a_2 = \log_2 a_1$, $\boxed{2 \leq a_1 < 4}$ 가능

$a_2 = 16$
- $a_1 < 1$: $a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 16$ (X)
- $a_1 \geq 1$: $a_2 = \log_2 a_1$, $a_1 = \boxed{2^{16}}$ 가능

$2 \leq a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$, $\dfrac{M}{m} = \dfrac{2^{16}}{2} = 2^{15}$

단답형

16. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$의 값을 구하시오. [3점]

$$\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

2

$\boxed{5}$

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$y = 4^{x-1} + a \leftarrow \left(\frac{3}{2}, 5\right)$

$5 = 4^{\frac{1}{2}} + a$

$= 2 + a$, $a = 3$

$\boxed{3}$

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{1\cdot x^2}=5 \quad f(0)=1$$

$=5x^2+\cdots$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$xf(x)-2x^3+1 = 5x^2+ax+b$

$x=0$. 대입 $1=b$.

$xf(x)-2x^3+\cancel{1}=5x^2+ax+\cancel{1}$

$f(x)=2x^2+5x+a$

$f(0)=a=1$

$f(x)=2x^2+5x+1$

$f(1)=2+5+1=8$

$\boxed{8}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

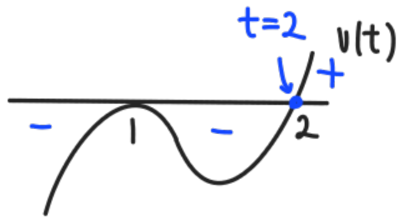
$v(t)$ 부호 변화, $v(t)=0$.

$v(t)=x'(t)=6t^3-24t^2+30t-12$

$=6(t^3-4t^2+5t-2)$

$=6(t-1)(t^2-3t+2)$

$=6(t-1)^2(t-2)$



$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$

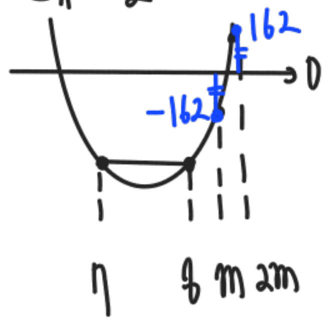
$a(2)=72-96+30=6$

$\boxed{6}$

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

> (가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
> (나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

$S_n=\frac{d}{2}n^2+\cdots$



$S_8=S_7$

$S_8-S_7=a_8=0$.

$a_1=-7d$. $a_m=(m-8)d$

$a_{2m}=(2m-8)d$

$S_m=-162=\frac{(a_1+a_m)m}{2}=\frac{m(m-15)d}{2}$

$+\ S_{2m}=162=\frac{(a_1+a_{2m})\cdot 2m}{2}=m(2m-15)d$

$0=\frac{m(5m-45)d}{2}$, $m=9$

$162=9\times 3d$, $d=6$.

$a_{13}=a_8+5d=0+30=30$

$\boxed{30}$

① 원주각 같다 → 한 원 위의 점

8 ② 지름의 원주각은 직각

① $g'(x)=\pm f(x)$ 경계에서 $f(x)=0$ ($\because g'(x)$ 연속)

② $|g'(x)| = f(x) \rightarrow f(x) \geq 0$

③ 점대칭, 선대칭 함수의 미분·적분했을때 대칭성

수학 영역

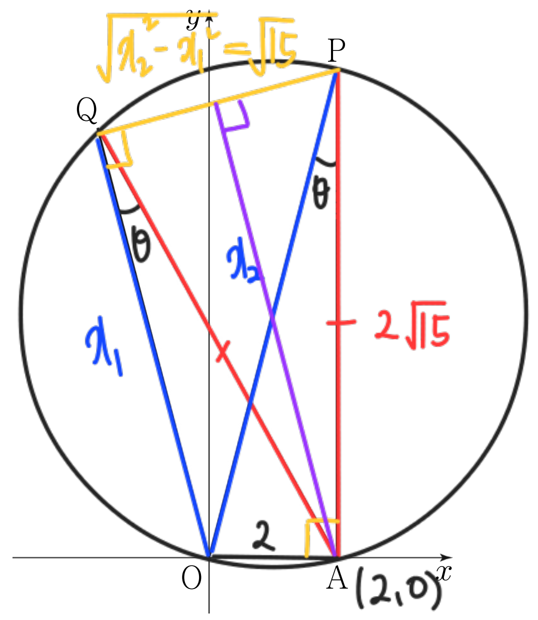
21. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle \mathrm{OPA})=\cos(\angle \mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\theta = \frac{1}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\angle OPA = \angle OQA$

→ 원주각



$\triangle$ OPA 사인 법칙

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\theta} = 2R = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8. \quad \therefore R=4$$

$\triangle$OPA, $\triangle$OQA 코사인 법칙

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{x^2+60-4}{2\cdot x\cdot 2\sqrt{15}}$$

$$15x = x^2+56. \quad (x-7)(x-8)=0.$$

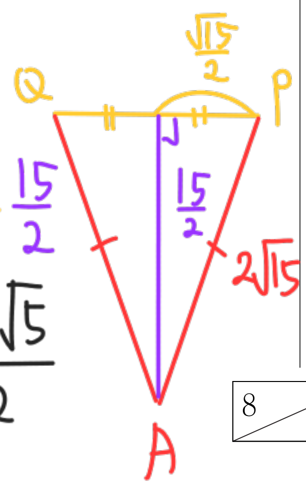
$x_1=7,\ x_2=8=2R$ (지름)

$\angle A = \angle OQP = \frac{\pi}{2}$

$\square$ OAPQ $= \triangle$OAQ $+ \triangle$APQ

$$= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2\sqrt{15}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{15}{2}$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{4} + \frac{15\sqrt{15}}{4} = \frac{11\sqrt{15}}{2}$$



$\boxed{22}$

22. 두 상수 a, $b(b\neq1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고
>
> $|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$f(x)$ 아래로 볼록 ($x\to\pm\infty$ 일때 $f>0$)

$f(x)\geq 0$ $(|x|\geq 2)$

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$g(0)=0.\quad g'(x)=-x+a \quad (|x|<2)$

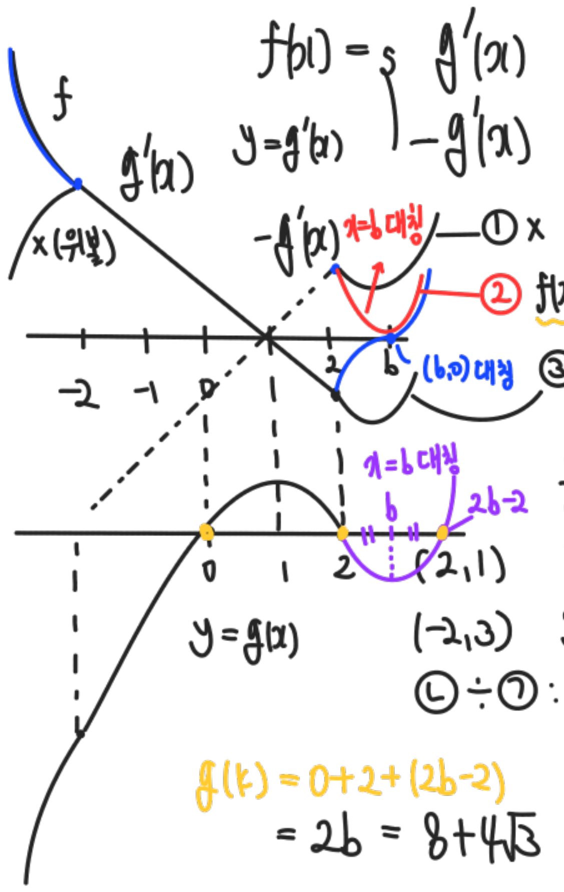
$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|\geq 2,\ g'(x)\geq 0) \\ -f(x) & (|x|\geq 2,\ g'(x)\leq 0)\end{cases}$$

$\rightarrow$ $x=p$ 좌우에서 $f(x), -f(x)$ 바뀌면 $f(p)=0$ ($\because g'$ 연속)

$|x|<2$: $g'(x)=-x+a$, $g(x)$는 $x=a$ 에서만 극값.

따라서 $a=1$, $|b|\geq 2$

$$f(x)=\begin{cases} g'(x) & |x|\geq 2,\ g'(x)\geq 0 \\ -g'(x) & |x|\geq 2,\ g'(x)\leq 0\end{cases}$$



$f(x)=c(x-b)^2$

$1=c(2-b)^2 \cdots ㉠$

$3=c(-2-b)^2 \cdots ㉡$

$㉡\div㉠$: $3=\left(\frac{b+2}{b-2}\right)^2 \Rightarrow b=4\pm2\sqrt{3}$

$b\geq 2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$

$g(k)=0+2+(2b-2)$

$=2b=8+4\sqrt{3}$

$\boxed{32}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_3\Pi_2 + {}_2\mathrm{H}_3$의 값은? [2점]

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

$3^2 + {}_4C_3$

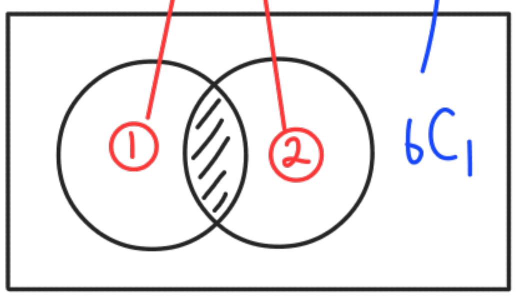
$= 9 + 4$

24. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A \cup B) = 5,\ A \cap B = \varnothing$$

을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 168　② 174　③ 180　④ 186　⑤ 192



${}_6C_1$

6×2^5

$= 6 \times 32$

$= 192$

25. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

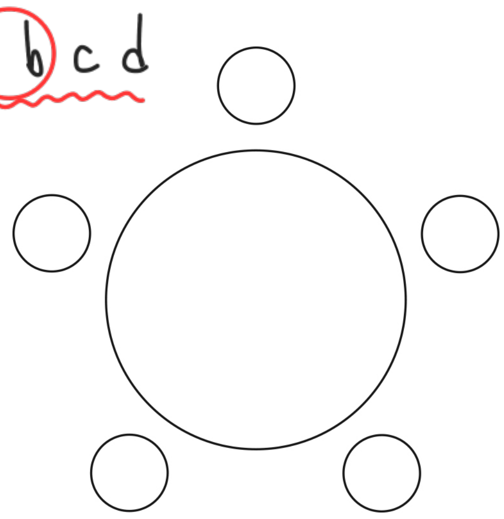
① 120　② 132　③ 144　④ 156　⑤ 168

A B C a b c d

$_4C_2 \times 4!$

$= 6 \times 24$

$= 144$



26. 방정식 $3x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 24　② 27　③ 30　④ 33　⑤ 36

$x=1$　$\underset{\geq 1}{y}+\underset{\geq 1}{z}+\underset{\geq 1}{w} = 8$, $_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

$x=2$　$\underset{\geq 1}{y}+\underset{\geq 1}{z}+\underset{\geq 1}{w} = 5$, $_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$x \geq 3$　$\underset{\geq 1}{y}+\underset{\geq 1}{z}+\underset{\geq 1}{w} \leq 2$　불가.

계수의 합 $x=1$

27. 양수 a에 대하여 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1일 때, $\frac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 70 ② 140 ③ 210 ④ 280 ⑤ 350

$x=1$: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1$, $a-\frac{2}{a}=1$

$a^2-a-2=0$.

$(a-2)(a+1)=0$. $a=2$

${}_7C_3\,(ax)^3\left(-\frac{2}{ax}\right)^4$

$= 35\times\frac{16}{a} = 35\times 8 = 280$

28. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

홀수 이웃 X

↓

짝수 배열 후 홀수

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280

1 1 2 2 2 3 3 4

제외 카드

① 1 2 2 2 3 3 4 짝수배열 홀수 자리 선택→배열

$\boxed{1}\,2\,\boxed{3}\,2\,\boxed{3}\,2\,\boxed{\ }\,4\,\boxed{\ }$ $4\times{}_5C_3\times 3=120$

② 1 1 2 2 3 3 4 짝수배열 홀수 자리 선택→배열

$\boxed{1}\,2\,\boxed{1}\,2\,\boxed{3}\,4\,\boxed{3}$ $3\times 1\times{}_4C_2=18$

③ 1 1 2 2 2 3 4 짝수배열 홀수 자리 선택→배열

$\boxed{1}\,2\,\boxed{1}\,2\,\boxed{3}\,2\,\boxed{\ }\,4\,\boxed{\ }$ $4\times{}_5C_3\times 3=120$

④ 1 1 2 2 2 3 3 짝수배열 홀수 자리 선택→배열

$\boxed{1}\,2\,\boxed{1}\,2\,\boxed{3}\,2\,\boxed{3}$ $1\times 1\times{}_4C_2=6$

단답형

29. 두 집합

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$
> (나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

$f(1), f(2), f(3) \ge 1$

$f(4) = f(1)+f(2)+f(3) = 3, 4, 5$

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8) = 6, 8, 10$

$f(1)+f(2)+f(3)$	$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$	
① $= 3 : {}_3H_0$	$= 6 : {}_4H_2$	① ${}_3H_0 \times {}_4H_2 = 10$
② $= 4 : {}_3H_1$	$= 8 : {}_4H_6$	② ${}_3H_1 \times {}_4H_4 = {}_3C_1 \cdot {}_7C_4 = 105$
③ $= 5 : {}_3H_2$	$= 10 : {}_4H_6 - 4\times1 - 4\times3$ (7,1,1,1) (6,2,1,1)	

③ ${}_3H_2 \times ({}_4H_6 - 4 - 12)$

$= {}_4C_2 \times ({}_9C_6 - 16)$

$= 6 \times (84 - 16)$

$= 6 \times 68 = 408$

$\boxed{523}$

수능도

30. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

> (가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
> (나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

a,b,c　b,c　　　b,c　a,b,c

□□aaa□□　$2\times2\times3\times3 = 36$

b,c　b,c　a,b,c

□aaa□□□　(b,b,b),(c,c,c) 제외

□□□aaa□　$2\times(2\times3\times3-2)\times2 = 64$

aaa b □□□

a (a − a,b,c / b − a,b,c / c − a,b,c) 8

b (a − a,b,c / … / c − a,b,c) 6

c (a − a,b,c / b − a,b,c / c − a,b) 8

c

□□□□aaa　$2\times(8+6+8)\times2 = 88$

$\boxed{188}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

제 2 교시

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$$\frac{(4n^2+3n)-(4n^2+1)}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{3}{4}$$

$(e^x \times g(x))' = e^x \times (g(x)+g'(x))$

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x) = e^x(2\sin x+\cos x+2\cos x-\sin x)$

$f'(0) = 3$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)=0,\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$$\frac{2^n\times a^n+5\times2^{n+1}}{2^n+3} = \frac{\overset{\to 2}{a^n}+5\times2}{1+\underset{\to 0}{\frac{3}{2^n}}} \longrightarrow \frac{2+10}{1+0} = 12$$

26. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

$\parallel \frac{2\ln x}{\ln b}$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

$(x-e)\to 0,\quad (f(x)-g(x))\to 0.$

$f(e)-g(e)=0.$ (연속)

$h(x)=f(x)-g(x),\ h(e)=0,\quad a^e=\frac{2}{\ln b}$

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{h(x)-h(e)}{x-e}=h'(e)=0$$

$$h'(x)=a^x\cdot\ln a-\frac{2}{x\cdot\ln b}$$

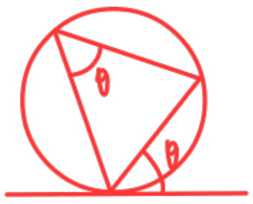
$$h'(e)=a^e\ln a-\frac{2}{e\cdot\ln b}=\frac{2}{\ln b}\left(\ln a-\frac{1}{e}\right)=0.$$

$\ln a=\frac{1}{e},\quad a=e^{\frac{1}{e}},$

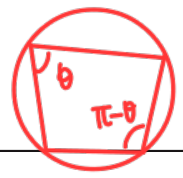
$a^e=e=\frac{2}{\ln b},\quad \ln b=\frac{2}{e},\quad b=e^{\frac{2}{e}}$

$a\times b=e^{\frac{3}{e}}$

① 접현각 :

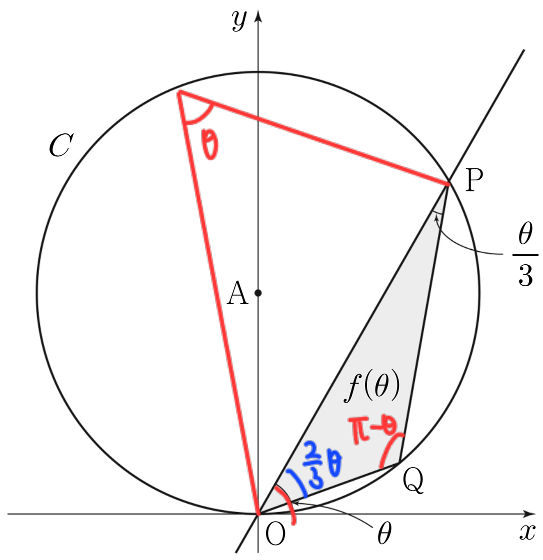


② 원 내접 사각형 대각합 π



① 넓이 같은 도형(활꼴) 옮겨 붙이기
② R_1, R_2 교점이 C_2 이므로 C_2 이용 보조선
③ 도형 문제 잘 안풀리면 좌표 놓기

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

△ OPQ 사인 법칙

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{\theta}{3}} = \frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{2\theta}{3}} = \frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-\theta)} = 2R = 2$$

$$\overline{OQ} = 2\sin\frac{\theta}{3}$$

$$\overline{OP} = 2\sin\theta$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times 2\sin\frac{\theta}{3} \times 2\sin\theta \times \sin\frac{2\theta}{3}$$

$$\frac{f(\theta)}{\theta^3} = \frac{2\sin\frac{\theta}{3} \times \sin\theta \times \sin\frac{2\theta}{3}}{\theta \times \theta \times \theta}$$

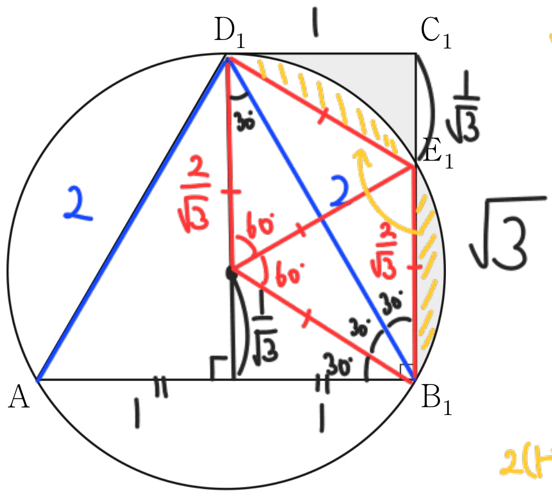
$$\rightarrow 2 \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ⌝ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

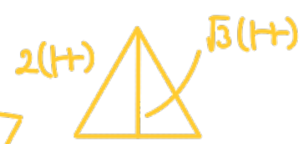
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ⌝ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]

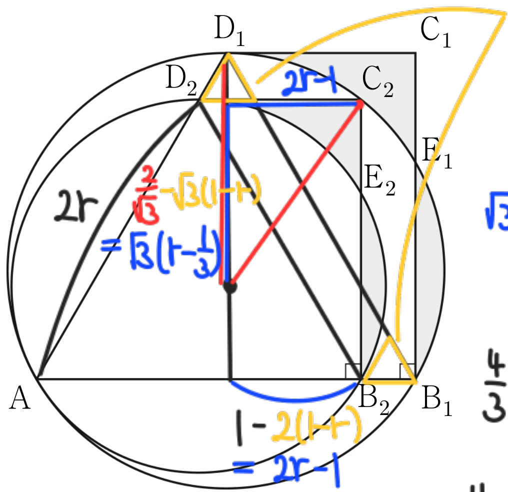
R_1

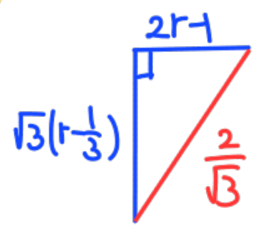


$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



R_2





$$\frac{4}{3} = 3\left(r-\frac{1}{3}\right)^2 + (2r-1)^2$$

$$4 = 9r^2 - 6r + 1 + 12r^2 - 12r + 3$$

$$21r^2 - 18r = 0$$

$$r = \frac{6}{7}$$

⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$ ④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

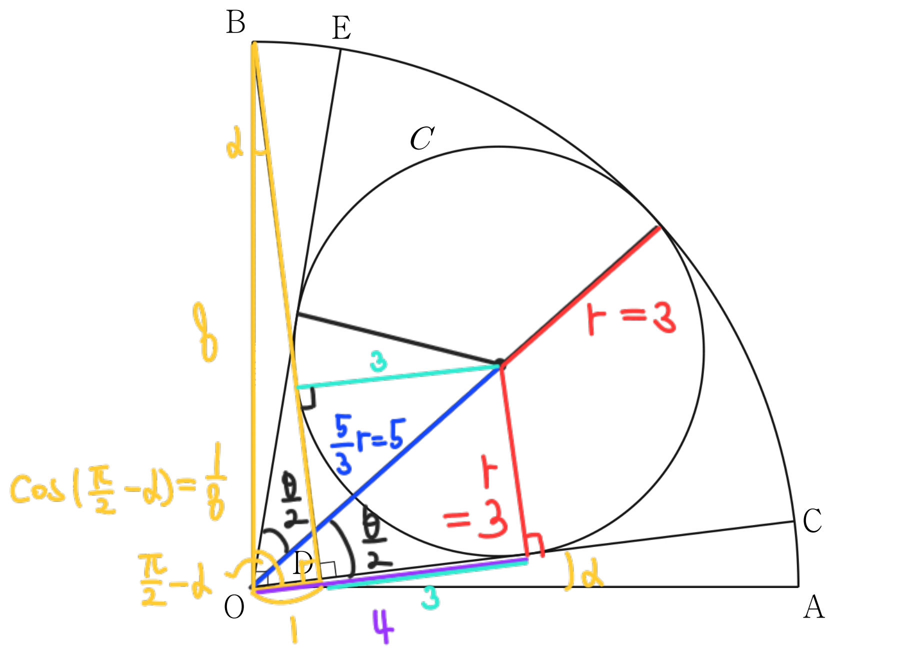
* A(0,0)라 하면
중심 $O_1\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
$D_2(r, \sqrt{3}r)$, $C_2(2r, \sqrt{3}r)$
$\overline{O_1C_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $(2r-1)^2 + 3\left(r-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{1-\frac{36}{49}} = \frac{49}{26}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{49}{78}\sqrt{3}$$

① $y=f(2a-x)$는 $y=f(x)$를 $x=a$에 대칭시킨것.
② $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$
③ $\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=f'(x+)+f'(x-)$

단답형 ① 접선은 반지름에 수직 ② $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle\mathrm{COE})=\frac{7}{25}$이다.
$\sin(\angle\mathrm{AOE})=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]



$\angle COE=\theta$, $\cos\theta=\frac{7}{25}$, $\sin\theta=\frac{24}{25}$

$\frac{7}{25}=\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$, $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

$\frac{5}{3}r+r=\frac{8}{3}r=8$, $r=3$

$\sin\alpha=\frac{1}{8}$, $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\cos\theta=\frac{7}{25}$, $\sin\theta=\frac{24}{25}$

$\sin(\theta+\alpha)=\frac{24}{25}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{7}{25}\cdot\frac{1}{8}$

$=\frac{7+72\sqrt{7}}{200}$ $\boxed{79}$

30. $x\ge0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\le x\le1)\\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\le2)\end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

$f'(0+)=\ln2$, $f'(x)=2^x\ln2$, $f'(1-)=2\ln2$
$x=1$ 대칭 $\left(2^{2-x}-1=4\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)$
$[2,4]$ 그래프는 $[0,2]$ 그래프 $\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

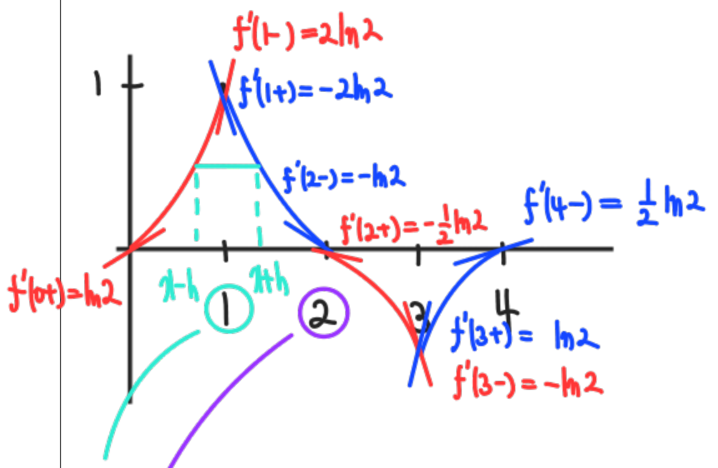
$$g(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때, $=f'(x+)+f'(x-)$ //

① $2f'(x)$ (x에서 미가) ② 0 (x 홀수) ③ $3f'(x+)$ (x 짝수)

$$\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]



$f'(1+)=-2\ln2$, $f'(3+)=\ln2$ 공비 $-\frac{1}{2}$
$f'(2+)=-\frac{1}{2}\ln2$, $f'(4+)=\frac{1}{4}\ln2$ 공비 $-\frac{1}{2}$

② x 홀수이면 $f(x+h)=f(x-h)$, $g(x)=0$
③ x 짝수이면 $2f'(x+)=f'(x-)$, $g(x)=f'(x+)+f'(x-)$
$=3f'(x+)$

$\lim_{t\to0+}(g(n+t)-g(n-t))\overset{①}{=}2f'(n+)-2f'(n-)$

$g(n)=\begin{cases}0 & (n \text{ 홀수})\\ 3f'(n+) & (n \text{ 짝수})\end{cases}$

1) n 홀수. $n=2k-1$ $f'(n-)=-f'(n+)$ $f'(1+)$
$2f'(n+)-2f'(n-)+0=4f'(n+)=4\times(-2\ln2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\ln2}{2^{24}}$
$k=28$, $n=55$

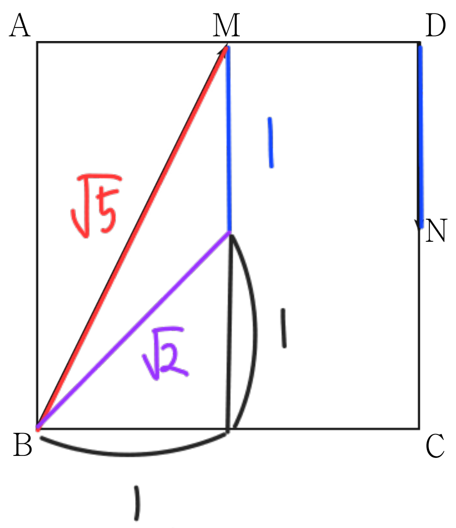
2) n 짝수 $n=2k$ $2f'(n+)=f'(n-)$
$2f'(n+)-2f'(n-)+6f'(n+)=4f'(n+)$ $f'(2+)$
$=4\times\left(-\frac{1}{2}\ln2\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\ln2}{2^{24}}$
$k=26$, $n=52$

$52+55=107$ $\boxed{107}$

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 선분 AD, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{DN}}|$의 값은? [2점]



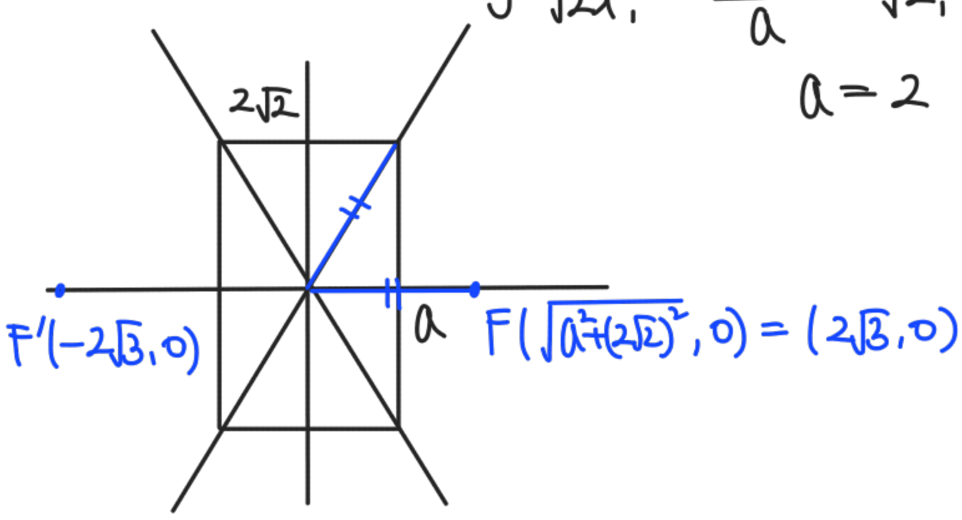
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

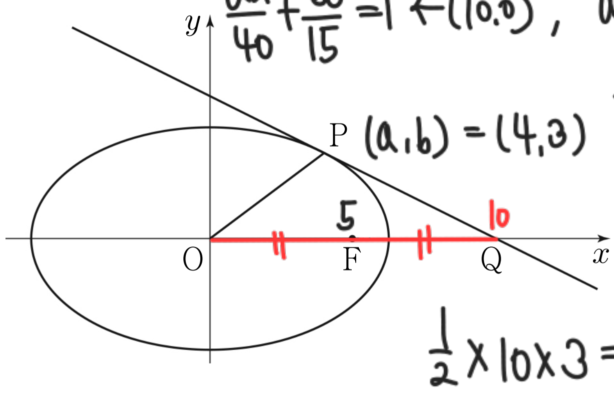
$y=\sqrt{2}x$, $\frac{2\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$,

$a=2$



25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

$\frac{0a}{40}+\frac{by}{15}=1 \leftarrow (10,0)$, $a=4$.



$\frac{16}{40}+\frac{b^2}{15}=1$

$b^2=9$

$\frac{1}{2}\times10\times3=15$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

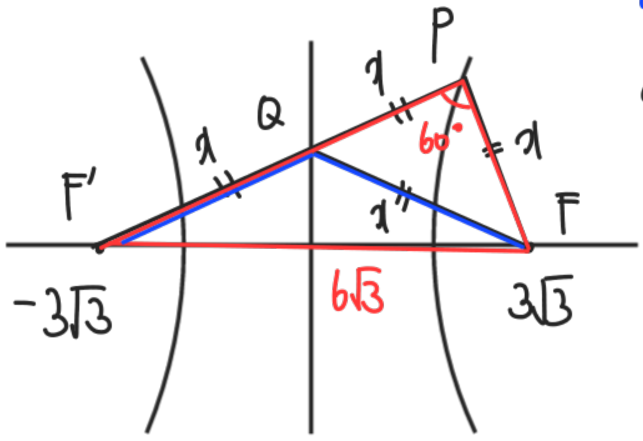
타원, 쌍곡선은 x, y축 대칭, 원점대칭

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(3\sqrt{3},\,0)$, $\mathrm{F'}(-3\sqrt{3},\,0)$인 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF′이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF가 정삼각형일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

$2x-x=x$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$ (y축 대칭)

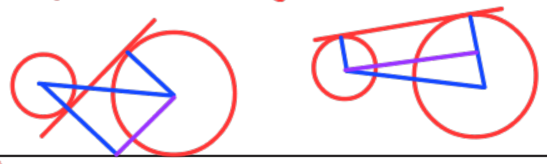


$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{4x^2+x^2-108}{2\cdot 2x\cdot x}$

$108 = 3x^2$

$x^2=36$. $x=6$.

두 원 공통 접선 구하는 보조선

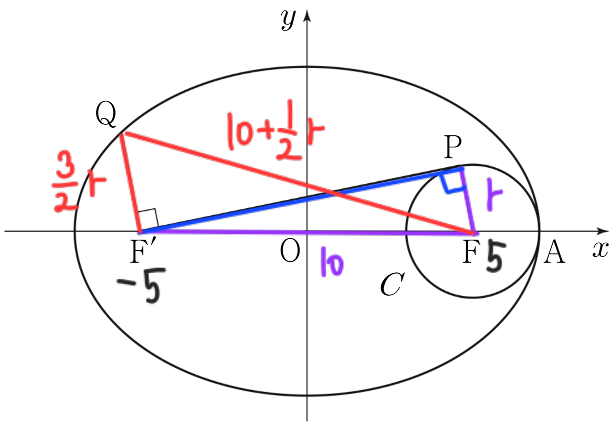


27. 그림과 같이 두 점 F(5, 0), F′(−5, 0)을 초점으로 하는 타원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 y좌표가 양수인 점 P와 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

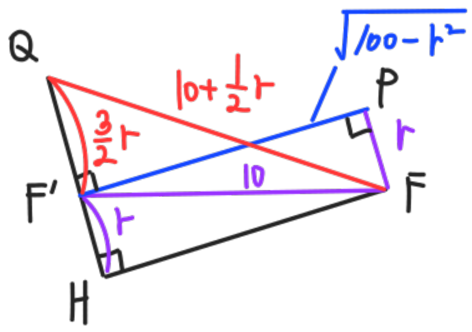
(가) 직선 PF′은 원 C에 접한다. (나) 두 직선 PF′, QF′은 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{AF}}<\overline{\mathrm{FF'}}$) [3점]

$= 10+2r$



① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$



$\left(10+\frac{1}{2}r\right)^2=\left(\frac{5}{2}r\right)^2+100-r^2$

$100+10r+\frac{1}{4}r^2=\frac{25}{4}r^2+100-r^2$

$10r=5r^2,\ r=2$

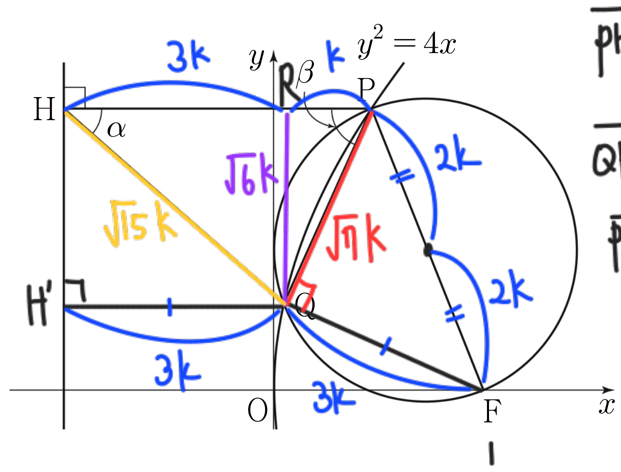
(장축 길이) $=10+2r=14$

28. 초점이 F인 포물선 $C: y^2=4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q, 점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle\mathrm{QHP}=\alpha$, $\angle\mathrm{HPQ}=\beta$라 할 때, $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=3$이다. ① $\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? [4점]

$\tan\alpha=\frac{\overline{RQ}}{\overline{RH}}$ k, $\tan\beta=\frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}$ ③ 3k

① $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{7}$



$x=-1$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$ (포물선 정의)
$\overline{\mathrm{QH'}}=\overline{\mathrm{QF}}$

$\overline{\mathrm{PF}}$ 지름 ⇒ $\angle\mathrm{PQF}=\frac{\pi}{2}$

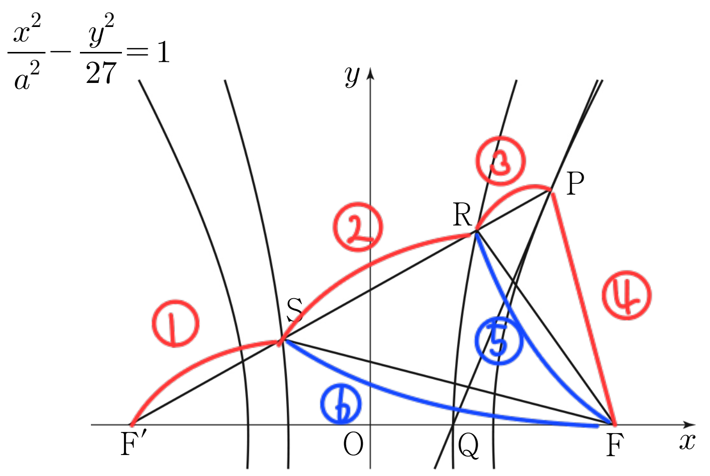
$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{105}}{7}$

$\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 는 크기 1 방향 $\overrightarrow{OP}$

단답형

표시할 변이 많으면 숫자로.

29. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $P\left(\frac{9}{2}, k\right)(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF′과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{RS}+\overline{SF}=\overline{RF}+8$일 때, $4\times(a^2+k^2)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.) [4점]



접선 $\frac{\frac{9}{2}x}{a^2}-\frac{ky}{27}=1$, $y=0 \Rightarrow Q\left(\frac{2}{9}a^2, 0\right)$

① + ② + ③ − ④ = $2a$

① + ② − ⑤ = $\frac{4}{9}a^2$

⑥ − ① = $\frac{4}{9}a^2$

합

② + ⑥ − ⑤ = $\frac{8}{9}a^2$

조건 ② + ⑥ = ⑤ + 8

$\frac{8}{9}a^2=8$. $a=3$.

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1 \leftarrow P\left(\frac{9}{2}, k\right)$

$\frac{9}{4}-\frac{k^2}{27}=1$, $\frac{k^2}{27}=\frac{5}{4}$.

$a^2=9$, $k^2=\frac{135}{4}$ $\boxed{171}$

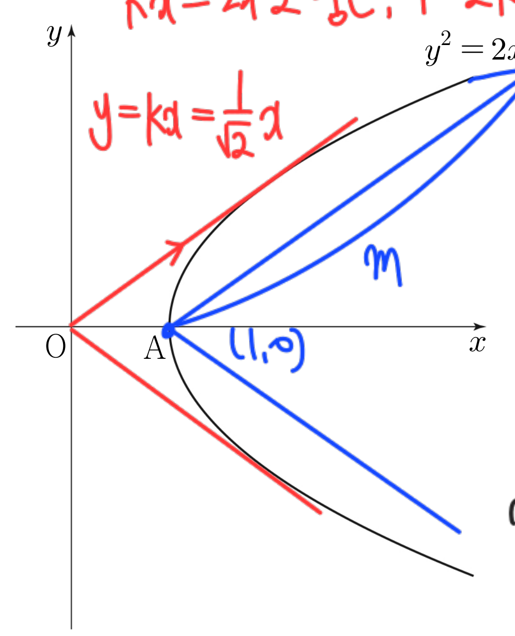
30. 좌표평면에서 포물선 $y^2=2x-2$의 꼭짓점을 A라 하자. 이 포물선 위를 움직이는 점 P와 양의 실수 k에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$$

크기 k 방향 $\overrightarrow{OP}$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$kx^2=2x-2$ 중근, $1=2k^2$.



$\frac{1}{2}(x-1)^2=2(x-1)$.

$x=1, 5$

m은 $\overline{AP}=\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$

$\boxed{24}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.