제 1 회

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사

수학 영역

성명		수험번호					-			

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

너와 나, 우린 감동이야

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목(확률과 통계, 미적분) 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

배점은 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

PPL 수학연구소

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사 문제지

제 1회

수학 영역(공통)

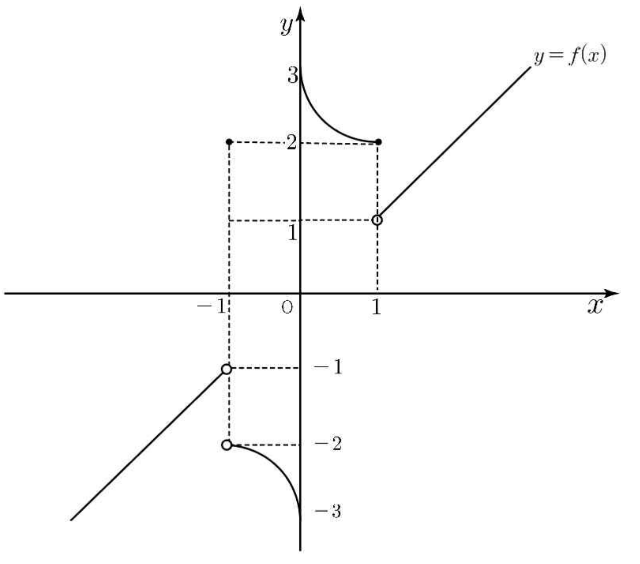
PPL 수학연구소

1. 1보다 큰 양수 a, b, c에 대하여

$(\log_c a)(\log_b c)=3$일 때, $\log_{ab^2}\sqrt{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+}f(x)-\lim_{x\to 0-}f(x)+f(-1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

4. 삼차함수 $f(x)=x^3-2kx^2+3kx+3$이 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값은? (단, $k\neq 0$) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2xf(x)=(x-k)\{g(x)-2\}$ (단, k는 양수)
> (나) $f'(k)=g'(0)=0$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(0)=2$
ㄴ. $f(k)=g(k)$
ㄷ. 방정식 $2f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, k^3의 값은 $6\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{3n}=a_n-1$
> (나) $a_{3n+1}=3a_n+1$
> (다) $a_{3n+2}=2a_n+1$

$a_{14}=21$이고, $\sum_{n=1}^{53} a_n=1333$일 때, a_{19}의 값은? [4점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

$$S_n = n^2 + 2n + 2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{2k-1}$의 값을 구하시오. [3점]

8. 방정식

$$1 - \sin^2\frac{\pi x}{8} - 2\cos\frac{\pi x}{8} - \left(\cos\frac{\pi}{4} + 2\right)\cos\frac{\pi}{4} = 0$$

을 만족시키는 서로 다른 실근의 합을 구하시오. (단, $0 < x < 32$) [4점]

9. 2보다 큰 실수 α에 대하여 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=0$
(나) $f(x)=-f(-x)$
(다) $\int_{-\alpha}^{\alpha}\lvert f(x)\rvert dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{2}f(x)dx$

$\{f(\alpha)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-a)\lvert f(x)\rvert=\int_{b}^{x}\lvert g(t)-g(b)\rvert dt$$

이다. $g(a)=g(a+3)$, $f(1)=0$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

제 1회

수학 영역(미적분)

PPL 수학연구소

11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n^2+4a_n-b_n}{3a_n^2+b_n}$의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

12. $x>-1$에서 정의된 함수

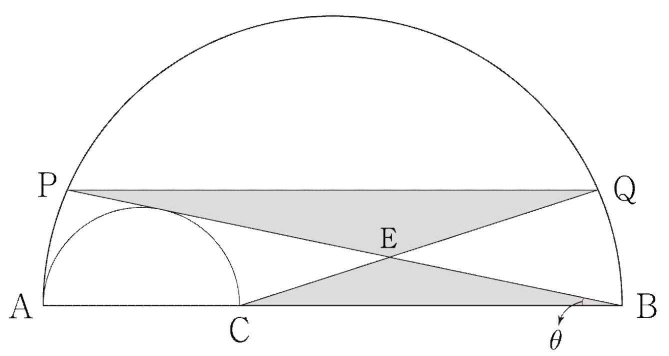
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-7x^n+x}{2x^{2n}+x^n+2}$$

에 대하여 방정식 $f(x)=\sin(2\pi x)$의 해를 크기가 작은 순서대로 나열할 때, n번째에 오는 해를 a_n이라 하자.

$a_1+a_2+a_3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}$의 값은? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

13. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C_1이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PBA} = \theta$라 하자. 중심이 선분 AB 위에 있고 점 A를 지름의 한쪽 끝으로 하는 반원 C_2가 선분 BP와 접할 때, 점 A가 아닌 지름의 한쪽 끝을 점 C라 하자. 점 P를 지나고 선분 AB와 평행한 직선이 반원 C_1과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 두 선분 BP와 CQ가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 EPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 EBC의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① 4　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 20

14. $x > -\frac{4}{3}$에서 미분가능한 함수 $f(x) = \frac{e^x \cos \pi x}{\sqrt{3x+4}}$에 대하여 $f'(4) = \frac{q}{p} e^{-4}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

15. 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=f(x)e^x$$

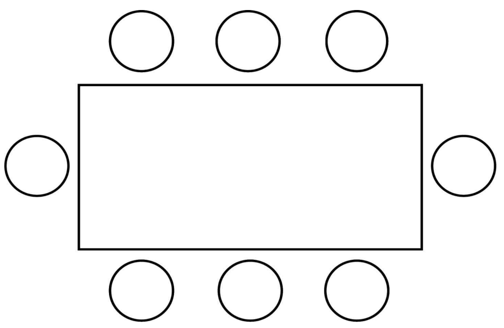
일 때, 모든 음의 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)+t=0$의 실근은 오직 하나이다. b의 최솟값을 $h(a)$라고 할 때, $h(7)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수) [4점]

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사 문제지

제 1회 수학 영역(확률과 통계)

PPL 수학연구소

11. 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 탁자에 2명의 여학생과 6명의 남학생이 둘러앉으려고 할 때, 여학생 2명이 마주보고 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 720 ② 1440 ③ 2160
④ 2880 ⑤ 3600

12. 6개의 문자 PPLLAB을 일렬로 나열할 때, 같은 문자는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 72 ③ 84
④ 96 ⑤ 108

13. 주머니에 검은 공 5개와 흰 공 6개가 들어있다. 주사위 한 개를 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 검은 공 1개를 흰 공으로 바꾸고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 흰 공 1개를 검은 공으로 바꾸는 시행을 한다.
위 시행을 5번 반복한 후 주머니에 들어있는 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많을 때, 두 번째 시행의 결과 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많을 확률은? [4점]

① $\frac{7}{24}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{13}{24}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

14. 다항식 $(x-1)(2x^2+1)^5$의 전개식에서 x^5의 계수를 구하시오. [3점]

15. 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)

〔4점〕

(가) $a+b+c+d=13$

(나) 좌표평면 위의 임의의 점$(c,\ d)$에 대하여, 점 $(c,\ d)$는 곡선 $y=x^3-18x^2+96x-128$ 위에 있지 않다.

[빠른 정답 및 해설]

공통					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	②	2번	③	3번	③
4번	②	5번	③	6번	①
7번	80	8번	64	9번	24
10번	12				
미적분					
11번	③	12번	⑤	13번	①
14번	157	15번	57		
확률과 통계					
11번	④	12번	③	13번	35
14번	40	15번	540		

About PPL 수학연구소

중, 고등학교 내신 및 수능 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작, 해설강의 등을 하고 있으며 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.

모든 문의는
인스타 DM : ppl_math_lab
팀장 메일 : dhtjddnjs0327@naver.com

제작 및 검토

오성원 (팀장)	홍익대학교 수학교육과
안정인	압구정 파인만학원
박종원	구로구 상아탑학원
박상우	건국대학교 교육공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
김대현	건국대학교 수학과
김도희	동국대학교 경제학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
심영섭	서울대학교 응용생물화학부
이경민	서울대학교 수학교육과

PPL 수학연구소

1. ②

$(\log_c a)(\log_b c)=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$\dfrac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a=3$

$\therefore\ b^3=a$

$\log_{ab^2}\sqrt{a}=\log_{b^5}\sqrt{b^3}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}$

2. ③

$\lim_{x\to 1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-3$, $f(-1)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to 1+}f(x)-\lim_{x\to 0-}f(x)+f(-1)=1-(-3)+2=6$

3. ③

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$이므로

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta^2)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{11}{16}$

4. ②

삼차함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 역함수를 가지려면
증가만 해야 한다.
$f'(x)=3x^2-4kx+3k$가 항상 0보다 크거나 같아야 하므로
판별식 $\dfrac{D}{4}=4k^2-9k\ge 0$, $k\ge\dfrac{9}{4}$, $k\le 0$

$\therefore\ M=3,\ m=-1,\ M+m=2$

5. ③

ㄱ. $2xf(x)=(x-k)\{g(x)-2\}$에서 양변에 $x=0$을 대입하면
$0=(-k)\{g(0)-2\}$이고 $k>0$이므로
$\therefore g(0)=2$ (참)

ㄴ. $2xf(x)=(x-k)\{g(x)-2\}$에서 $f(k)=0$, $g(0)=2$이고 $f(x)$가 최고차항 계수가 1인 삼차함수이므로 $g(x)-2$도 최고차항 계수가 2인 삼차함수이다. 따라서 어떤 두 이차식 $f_1(x)$, $g_1(x)$에 대하여
$f(x)=(x-k)f_1(x)$
$g(x)-2=xg_1(x)$ $\quad\therefore g(x)=xg_1(x)+2$
이다. 이때 $f'(k)=g'(0)=0$이므로
$f'(k)=f_1(k)=0$
$g'(0)=g_1(0)=0$이고
따라서 어떤 두 실수 a, b에 대하여 $f_1(x)$, $g_1(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$f_1(x)=(x-k)(x-a)$
$g_1(x)=x(2x-b)$
그러므로
$f(x)=(x-k)^2(x-a)$
$g(x)=x^2(2x-b)+2$이고 모든 실수 x에 대하여
$2x(x-k)^2(x-a)=x^2(x-k)(2x-b)$이므로
$a=0$, $b=2k$이다. 따라서
$f(x)=x(x-k)^2$, $g(x)=2x^2(x-k)+2$이고
$f(k)=0$, $g(k)=2$이므로
$\therefore\ f(k)\neq g(k)$ (거짓)

(다른 풀이)
$2xf(x)=(x-k)\{g(x)-2\}$에서 양변을 미분하면
$2f(x)+2xf'(x)=g(x)-2+(x-k)g'(x)$
이고 양변에 $x=k$을 대입하면 $f(k)=f'(k)=0$이므로
$2f(k)=g(k)-2=0$, $g(k)=2$
$\therefore\ f(k)\neq g(k)$

ㄷ. $f(x)=x(x-k)^2$, $g(x)=2x^2(x-k)+2$이므로
$2f(x)+g(x)=4x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)+2$이고
방정식 $2f(x)+g(x)=0$은 다음과 같다.
$4x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)+2=0$
$4x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)=-2$
$\therefore\ x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)=-\dfrac{1}{2}$
이때 위 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $-\dfrac{1}{2}$은 함수 $y=h(x)=x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)$에서 극솟값이 되어야 한다.
$h'(x)=\left(x-\dfrac{k}{2}\right)(x-k)+x(x-k)+x\left(x-\dfrac{k}{2}\right)$
$=3x^2-3kx+\dfrac{k^2}{2}$
$=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}k\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}k\right)$
이므로 $x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}k$에서 함수 $h(x)$가 극솟값을 가진다.
$h\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}k\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}k\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}k\right)\left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{6}k\right)=-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\sqrt{3}}{6}k\times\left(-\dfrac{k^2}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ k^3=6\sqrt{3}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

6. ①

$a_{14}=2a_4+1=2(3a_1+1)+1=6a_1+3$이고, $a_{14}=21$에서
$a_1=3$이다.
(가), (나), (다) 조건의 식을 모두 더하면
$a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}=6a_n+1$이고,
$\sum_{n=1}^{53}a_n=a_1+a_2+\sum_{n=1}^{17}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})=a_1+a_2+\sum_{n=1}^{17}(6a_n+1)$
정리하면, $a_1+a_2+17+6\sum_{n=1}^{17}a_n$
똑같은 방법으로 간단히 하면,
$(1+6)(a_1+a_2)+17+5\times 6+6^2\sum_{n=1}^{5}a_n$
$(1+6+6^2)(a_1+a_2)+17+5\times 6+6^2+6^3\sum_{n=1}^{1}a_n$

조건을 대입하면

$43(3+a_2)+17+5\times 6+6^2+6^3=1333$에서, $a_2=11$

$\therefore a_{19}=3a_6+1=3(a_2-1)+1=31$

7.80

수열 $\{a_n\}$를 구하기 위해 S_n을 이용하자.

$$S_n-S_{n-1}=n^2+2n+2-(n-1)^2+2(n-1)+2$$
$$=2n+1=a_n\,(n\geq 2)$$

이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 두번째항부터 공차가 2인 등차 수열이다. 이때, $a_1=S_1=5$이다.

$$\sum_{k=1}^{6}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$$
$$=a_1+5a_7$$
$$=5+5\times 15$$
$$=80$$

8. 64

$\sin^2\frac{\pi x}{8}+\cos^2\frac{\pi x}{8}=1$ 이므로, $1-\sin^2\frac{\pi x}{8}=\cos^2\frac{\pi x}{8}$이다.

방정식 $\cos^2\frac{\pi x}{8}-2\cos\frac{\pi x}{8}-(\cos\frac{\pi}{4}+2)\cos\frac{\pi}{4}=0$에서

$$(\cos\frac{\pi x}{8}-\cos\frac{\pi}{4}-2)(\cos\frac{\pi x}{8}+\cos\frac{\pi}{4})=0$$

$\therefore\ \cos\frac{\pi x}{8}=\cos\frac{\pi}{4}+2$ 또는 $-\cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \cos\frac{\pi x}{8}=\cos\frac{\pi}{4}+2$ 에서 $\cos\frac{\pi}{4}+2>2$이므로 방정식을 만족시키는 실수 x의 값은 없다.

$\cos\frac{\pi x}{8}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 실수 x의 값은 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{8}$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로 $0<x<32$에서의 모든 교점음 다음과 같다.

〈그림〉

따라서 모든 $6+10+22+26=64$

9. 24

(가), (나) 조건을 이용하면

$f(0)=0$, $f(-2)=0$ 임을 구할 수 있다,

$\therefore\ f(x)=-x(x-2)(x+2)=-x^3+4x$

(다) 조건을 이용하면

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)|dx$$
$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|-x^3+4x\right|dx$$
$$=2\int_{0}^{\alpha}\left|-x^3+4x\right|$$
$$=2\left(\int_0^2(-x^3+4x)dx+\int_2^{\alpha}(x^3-4x)dx\right)$$
$$=2\left(\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_2^{\alpha}\right)$$
$$=2\left\{(-4+8)-0+\left(\frac{1}{4}\alpha^4-2\alpha^2\right)-(4-8)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{4}\alpha^4-2\alpha^2+8\right)=\frac{1}{2}\alpha^4-4\alpha^2+16$$

$$\frac{5}{2}\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\frac{5}{2}\int_0^2(-x^3+4x)dx$$
$$=\frac{5}{2}\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{2}(-4+8)=10$$

$\therefore\ \frac{1}{2}\alpha^4-4\alpha^2+16=10$

$\alpha^4-8\alpha^2+12=0$

$(\alpha^2-2)(\alpha^2-6)=0$

$\alpha^2=6$, $\alpha=\sqrt{6}$ $\qquad(\because \alpha>2)$

$f(\alpha)=k=f(\sqrt{6})=-(\sqrt{6})^3+4\sqrt{6}=-6\sqrt{6}+4\sqrt{6}=-2\sqrt{6}$

$\therefore k^2=(-2\sqrt{6})^2=24$

10. 12

주어진 식의 우변이 $x=b$에서 부호가 변화하므로 좌변도 $x=b$에서만 부호가 변화한다.

따라서 $x=b$이다..

한편, 준식의 양변을 미분한

$\{(x-a)|f(x)|\}'=|g(x)-g(a)|\geq 0$ ⋯ ㉠

에서 $(x-a)|f(x)|$가 $x=a$에서 미분 가능하기 위해

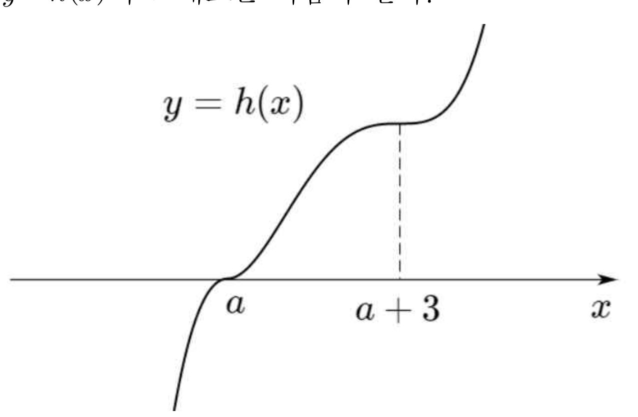
$f(a)=0$

이다.

$h(x)=(x-a)|f(x)|$라고 할 때,

$g(a)=g(a+3)$에서 $h'(a+3)=0$이므로

$y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $f(1)=0$이므로

$a=1$

이고, 위의 그림에서 사차함수의 비율 관계에 의해

$$(x-a)f(x)=(x-a-3)^3(x-a+1)+k$$
$$=x(x-4)^3+k$$

으로 둘 수 있다.

$f(1)=0$임을 이용해 k의 값을 구하면 $k=27$.

$$(x-1)f(x)=x(x-4)^3+27$$
$$=x^4-12x^3+48x^2-64x+27$$
$$=(x-1)^2(x^2-10x+27)$$

이므로

$f(x)=(x-1)(x^2-10x+27)$

$\therefore\ f(6)=15$

[미적분]

11. ③

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(3+\frac{b_n}{a_n}\right)=1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

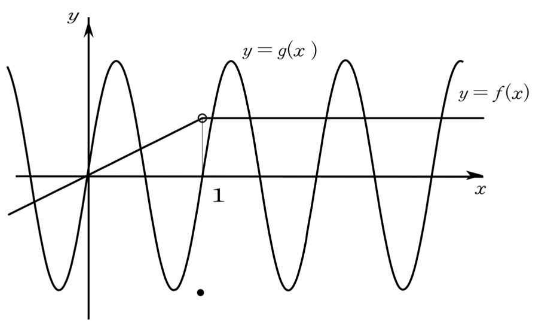
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n^2+4a_n-b_n}{3a_n^2+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n+4-\frac{b_n}{a_n}}{3a_n+\frac{b_n}{a_n}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}+4}{1}=\frac{11}{3}$$

12. 17

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-7x^n+x}{2x^{2n}+x^n+2}$에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x>1)\\ -1 & (x=1)\\ \frac{x}{2} & (-1<x<1)\end{cases}$

방정식 $f(x)=\sin(2\pi x)$에서 우변을 $g(x)=\sin(2\pi x)$라 하고, 좌표평면에 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 나타내면 다음과 같다.



교점은 $(-1<x<1)$인 범위에서 3개가 나타나며, a_1과 a_3는 원점에 대하여 대칭이고, a_2는 0이다.

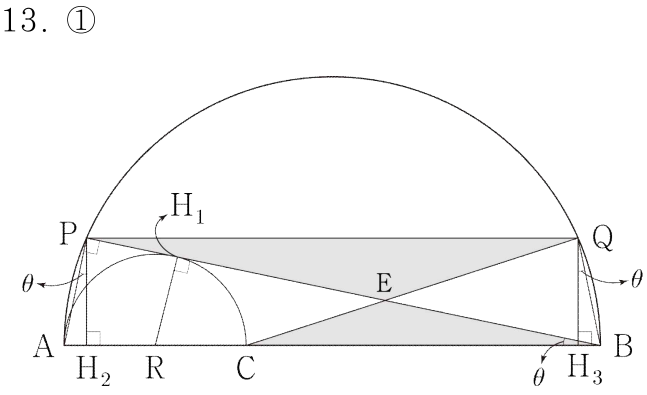
$a_1+a_2+a_3=a_1+0+(-a_1)=0$

$n\geq 2$일 때, $a_{2n}=n-\frac{11}{12}$ 이고,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)=\frac{12}{13}$$

$\therefore p+q=25$

13. ①



반원 C_2의 중심을 R이라 하자. 점 R에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하고 $\mathrm{RH_1}=r$라 하자.

삼각형 $\mathrm{BH_1R}$에서 $\angle\mathrm{RBH_1}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CR}}=2-r$이므로 $\sin\theta=\frac{r}{2-r}$

$\therefore\ r=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}&=2-2r\\&=2(1-r)\\&=2\left(1-\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\\&=2\times\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

한편, 두 선분 BP와 PQ가 평행하므로

$\angle\mathrm{RBH_1}=\angle\mathrm{QPB}=\theta$

따라서 두 삼각형 EPQ와 EBC는 닮음이다.

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면

$\angle\mathrm{APH_2}=\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta=2\sin\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH_2}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH_2}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\sin\theta=2\sin^2\theta$

같은 방법으로 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$라 하면 $\overline{\mathrm{BH_3}}=2\sin^2\theta$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AB}}-\left(\overline{\mathrm{PH_2}}+\overline{\mathrm{QH_3}}\right)=2-4\sin^2\theta$ …… ㉡

삼각형 EPQ의 밑변을 $\overline{\mathrm{PQ}}$, 삼각형 EBC의 밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$라 하면 두 삼각형의 높이비는 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{BC}}$이고 두 높이의 합은 $\overline{\mathrm{PH_2}}=\sin 2\theta$

㉠, ㉡에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{BC}}&=2-4\sin^2\theta:2\times\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\\&=1-2\sin^2\theta:\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\left(2-4\sin^2\theta\right)\times\left(\frac{1-2\sin^2\theta}{1-2\sin^2\theta+\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\times\sin 2\theta\right)\\&=\left(1-2\sin^2\theta\right)\times\left(\frac{1-2\sin^2\theta}{1-2\sin^2\theta+\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\times\sin 2\theta\right)\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}T(\theta)&=\frac{1}{2}\left(2\times\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\times\left(\frac{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}{1-2\sin^2\theta+\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\times\sin 2\theta\right)\\&=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\left(\frac{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}{1-2\sin^2\theta+\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\times\sin 2\theta\right)\end{aligned}$$

$\therefore\ S(\theta)-T(\theta)$

$$=\frac{\sin 2\theta}{1-2\sin^2\theta+\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\times\left\{\left(1-2\sin^2\theta\right)^2-\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\right\}$$

$$=\sin 2\theta\times\left(1-2\sin^2\theta-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta\times\left(1-2\sin^2\theta-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta^2}\times\frac{(1-2\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta^2}\times\frac{1+\sin\theta-2\sin^2\theta-2\sin^3\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta^2}\times\frac{2\sin\theta-2\sin^2\theta-2\sin^3\theta}{1+\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta^2}\times\frac{2\sin\theta(1-\sin\theta-\sin^2\theta)}{1+\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{2\sin\theta}{\theta}\times\frac{1-\sin\theta-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$

$=4$

14. 157

식의 양변에 자연로그를 취하자.

$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{e^x\cos\pi x}{\sqrt{3x+4}}\right|=x+\ln|\cos\pi x|-\frac{1}{2}\ln|3x+4|$

양변을 미분하면,

$\frac{f'(x)}{f(x)}=1-\pi\tan\pi x-\frac{3}{2(3x+4)}$

$\frac{f'(4)}{f(4)}=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$

$f(4)=\frac{e^4}{4}$이므로 $f'(4)=\frac{29}{32}\times\frac{e^4}{4}=\frac{29}{128}e^4$

$\therefore\ p=128,\ q=29,\ p+q=157$

15. 57

$g(x)=f(x)e^x=(x^2+ax+b)e^x$

$g'(x)=\{f(x)+f'(x)\}e^x=\{(x^2+ax+b)+(2x+a)\}e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

방정식 $g(x)+t=0$의 실근이 오직 하나이기 위해서는

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-t$의 교점의 개수가 오직 하나 존재해야한다.

즉, 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 증가만 하거나 감소만 해야한다.

$y=e^x$의 그래프는 증가하는 그래프이므로, $(e^x)'=e^x>0$

그러므로 $x^2+(a+2)x+a+b\geq0$

$x^2+(a+2)x+a+b\geq0$

$D=(a+2)^2-4(a+b)\leq0$

$a^2+4a+4-4a-4b=a^2+4-4b\leq0$

$a^2+4\leq4b$

$b\geq\frac{a^2+4}{4}$

$\therefore\ h(a)=\frac{a^2+4}{4}$

$h(7)=\frac{7^2+4}{4}=\frac{49+4}{4}=\frac{53}{4}$

$p=4,\ q=53$이므로

$p+q=53+4=57$

[확률과 통계]

11. ④

(ⅰ) 여학생 두 명이 한 자리만 있는 변에 앉는 경우

여학생 두 명이 마주보고 앉는 경우의 수는 $\frac{2!}{2}$

이고 남은 6명의 남학생이 앉는 경우의 수는 $6!$

이므로 $\frac{2!}{2}\times6!$

(ⅱ) 여학생 두 명이 세 자리가 있는 변에 앉는 경우

여학생 두 명이 마주보고 앉는 경우의 수는 $\frac{3!}{2}$

이고 남은 6명의 남학생이 앉는 경우의 수는 $6!$

이므로 $\frac{3!}{2}\times6!$

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{2!}{2}\times6!+\frac{3!}{2}\times6!=4\times6!=2880$

12. ③

6개의 문자 PPLLAB을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!}=180$

그 중 문자 P가 이웃할 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

마찬가지로 문자 L이 이웃할 경우의 수도 60이다.

문자 P가 이웃하고 문자 L이 이웃할 경우의 수는

$4!=24$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$180-60-60+24=84$

13. 35

5번째 시행 후 주머니에 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많은 사건을 X, 두 번째 시행 후 주머니에 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많은 사건을 Y라 하자.

총 5번의 시행 중 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 x,

3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수를 $5-x$라 할 때, $(0\leq x\leq5)$

5번째 시행 후 검은 공의 개수는 $10-2x$이고 흰 공의 개수는 $2x+1$이다. 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많아야 하므로

$10-2x>2x+1\quad\therefore\ x\leq2$

따라서 5번째 시행의 결과 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많아지는 경우는 3의 배수가 눈이 나온 횟수가 2 이하인 경우이다. 그러므로 사건 X가 일어날 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

두 번째 시행 후 주머니에 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많은 경우는 두 번째 시행까지 3의 배수인 눈이 나온 횟수가 2이거나 3의 배수와 3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수가 각각 1인 경우이다. 그러므로 사건 X와 Y가 동시에 일어날 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

그러므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y\mid X)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\right\}}{{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{88}{243}}{\frac{192}{243}} = \frac{11}{24}$$

따라서 $p=24$, $q=11$이므로
$\therefore\ p+q=35$

14. 40

$(x-1)(2x^2+1)^5 = x(2x^2+1)^5-(2x^2+1)^5$ ……㉠

$(2x^2+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r \times (2x^2)^r = {}_4\mathrm{C}_r \times 2^r \times x^{2r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

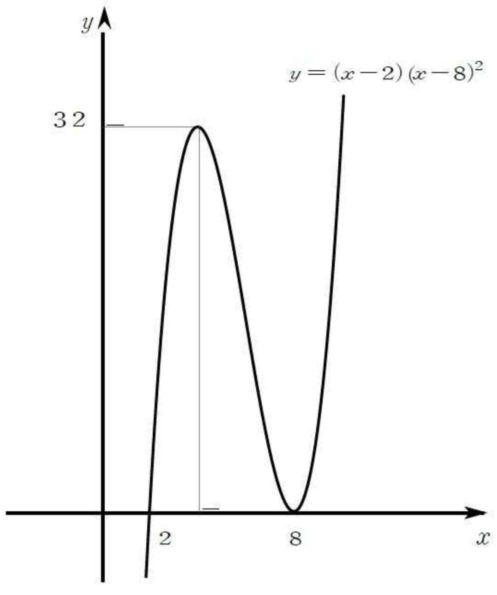
x^4의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 40$

따라서 x^5의 계수는 40

15. 540

전체 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_{13} = {}_{16}\mathrm{C}_3 = 560$

$y=x^3-18x^2+96x-128$는 다음 그림과 같이 같다.



함수 위의 정수인 점은

(2, 0), (3, 25), (4, 32), (5, 27), (6, 16), (7, 5), (8, 0), (9, 7), (10, 80), ⋯

이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

(i) $(c,\ d)=(2,0)$

$a+b=11$ 인 $(a,\ b)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_{11} = {}_{12}\mathrm{C}_1 = 12$

(ii) $(c,\ d)=(7,\ 5)$

$a+b=1$ 인 $(a,\ b)$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_1 = {}_2\mathrm{C}_1 = 2$

(iii) $(c,\ d)=(8,\ 0)$

$a+b=5$ 인 $(a,\ b)$의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_2 = {}_6\mathrm{C}_1 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $560-20=540$