제 2 회

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사

수학 영역

성명		수험번호						-				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

내게로 와 눈부신 선물이 되고

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목(확률과 통계, 미적분) 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

배점은 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

PPL 수학연구소

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사 문제지

제 2회

수학 영역(공통)

PPL 수학연구소

1. 다항함수 $f(x)$에 대하여

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 2) \\ f(4-x) & (x > 2) \end{cases}$$

라 하자. $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}=-2$일 때, $g'(5)$의 값은?

〔3점〕

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

2. 다음 조건을 만족시키는 모든 $\sqrt{3^{9m}}$의 n제곱근의 합은? 〔3점〕

(가) n은 소수이다.
(나) 1이 아닌 자연수 m에 대하여 $\sqrt[3]{16^n}$의 m제곱근은 자연수이다.

① 752 ② 754 ③ 756 ④ 758 ⑤ 760

3. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+n+1$
(나) m이 자연수이고 $2^{m-1} \le n < 2^m$이면, $a_{n+1} = a_n + 2^{-m+2}$이다.

$\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

4. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ 위의 접선 중에서 기울기가 최소인 접선과 함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$의 두 교점을 각각 점 A, B라 하자. 점 P는 점 A부터 점 B까지 함수 $f(x)$ 위를 움직이는 점이라고 하자. 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 될 때, 점 P의 x 좌표는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

5. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\log_2|x|$와 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 교점의 x좌표를 크기가 작은 순서대로 $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$이라고 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $-1<x_1(n)<-\frac{1}{2}$

ㄴ. $n=2$일 때, $\log_2\frac{x_3(2)}{x_2(2)}=1$이다.

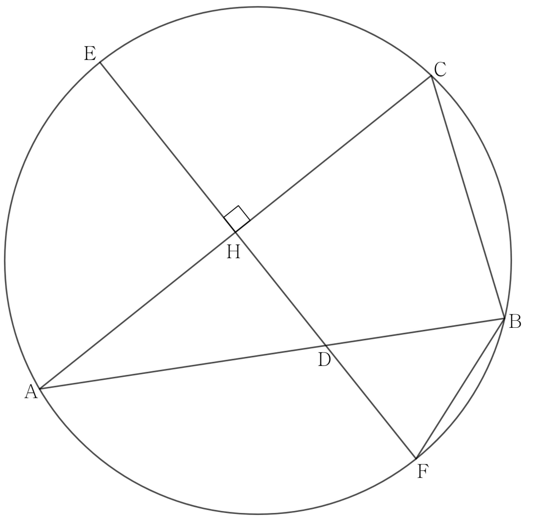
ㄷ. $n\geq 3$일 때, $\frac{x_3(n)-2n}{x_2(n)-2n}<\frac{\log_2 x_3(n+1)-2}{\log_2 x_2(n+1)-2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 그림과 같이 반지름이 7인 원에 삼각형 ABC가 내접한다. 선분 AC의 수직이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D, 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 두 점을 각각 E, F라 하자. 선분 AC의 중점을 H라 할 때,

$$\overline{\mathrm{DH}}=4,\quad \sin(\angle \mathrm{AEH})=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

이다. 삼각형 BDF의 넓이는? [4점]



① $5\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $9\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $13\sqrt{3}$

7. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 두 함수
>
> $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \geq 1) \\ -2x-3 & (x < 1) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & (x \neq -1) \\ 2 & (x=-1) \end{cases}$
>
> 에 대하여 함수 $f(x)h(x)$와 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h(3)$의 값을 구하시오. [3점]

8. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-21t+30, \quad v_2(t)=3t-2$$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$와 $t=b$ $(a<b)$에서 다시 만날 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리를 구하시오. [4점]

9. 첫째항이 음수이고 모든 항이 서로 다른 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 세 수 $|S_2|$, $|S_4|$, $|S_6|$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
a_4가 최소가 되도록 하는 a_8의 값을 구하시오. [4점]

10. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)-f(x)=0$이다.
(나) 함수 $|f(x)-t|$가 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 실수 t의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
(다) 함수 $|f(x)-kx|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최댓값은 3이다.

11. 두 직선 $y=2x+1$과 $y=mx$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 모든 m의 값의 합은? [3점]

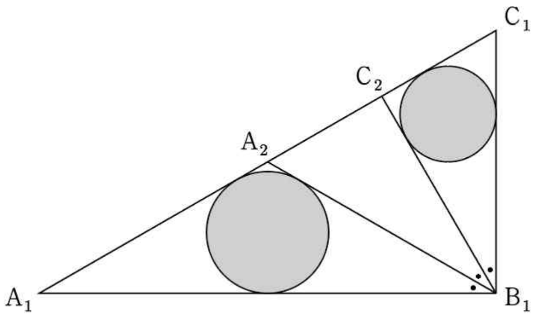
① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

12. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)$에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 교점의 x좌표를 $g(t)$라고 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

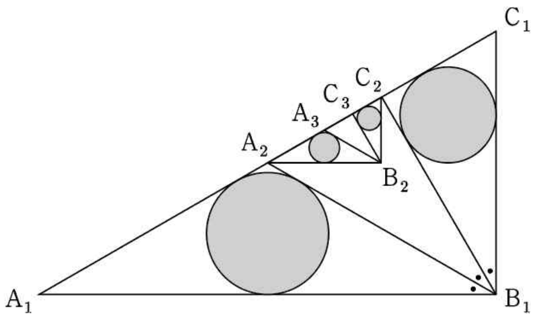
① $\frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{5(e^3-1)}$ ② $\frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{4(e^3-1)}$ ③ $\frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{3(e^3-1)}$
④ $\frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{3(e^3-1)}$ ⑤ $\frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{2(e^3-1)}$

13. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}=4$를 빗변으로 하고 $\angle \mathrm{C_1A_1B_1}=30^\circ$인 직각삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. $\angle \mathrm{A_1B_1C_1}$의 삼등분선과 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 교점 중 점 $\mathrm{A_1}$과 가까운 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{C_1}$과 가까운 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{A_1B_1A_2}$에 내접하는 원과 삼각형 $\mathrm{B_1C_1C_2}$에 내접하는 원을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 빗변으로 하고 $\angle \mathrm{C_2A_2B_2}=30^\circ$인 직각삼각형이 되도록 점 $\mathrm{B_2}$를 잡자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{C_3}$을 잡을 때, 삼각형 $\mathrm{A_2B_2A_3}$에 내접하는 원과 삼각형 $\mathrm{B_2C_2C_3}$에 내접하는 원을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{350-200\sqrt{2}}{15}\pi$

② $\dfrac{350-208\sqrt{2}}{15}\pi$

③ $\dfrac{352-200\sqrt{3}}{15}\pi$

④ $\dfrac{352-206\sqrt{3}}{15}\pi$

⑤ $\dfrac{352-208\sqrt{3}}{15}\pi$

14. $a_1=1$, $a_2=5$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$$

을 만족시킨다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a_n-(-4)^{n+1}}{a_n+2\times(-4)^{n+2}}$의 값을 구하시오. [3점]

15. 자연수 n에 대하여 두 함수

$$f(x)=(x+2)^2+e^x, \quad g(x)=ne^x$$

의 그래프의 서로 다른 교점의 개수를 a_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}=0$) [4점]

2024학년도 6월 대비 PPL RE-BOOT 하프 모의고사 문제지

제 2회 수학 영역(확률과 통계)

PPL 수학연구소

11. 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k}={}_{2n}\mathrm{C}_{2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 127 ② 128 ③ 129 ④ 130 ⑤ 131

12. 서로 다른 종류의 초콜릿 4개와 서로 다른 종류의 사탕 2개를 3명의 학생 A, B, C에게 나누어 줄 때, 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는? (단, 초콜릿과 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 243 ② 324 ③ 405 ④ 486 ⑤ 567

13. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c+d+e=12$
> (나) $a \geq b$, $a \geq c$인 자연수 a, b, c를 한 변의 길이로 하는 삼각형이 존재한다.

① 55 ② 56 ③ 57 ④ 58 ⑤ 59

14. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2. 3중에서 두 개의 숫자를 선택할 때, 두 수의 합이 홀수일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

15. 상자 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어있고, 상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 상자 B에 넣은 다음 다시 상자 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다.
이 시행에서 상자 A에서 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 흰 공이었을 때, 상자 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[빠른 정답 및 해설]

공통					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	④	2번	③	3번	③
4번	③	5번	⑤	6번	①
7번	64	8번	71	9번	29
10번	3				
미적분					
11번	①	12번	⑤	13번	③
14번	75	15번	17		
확률과 통계					
11번	①	12번	②	13번	②
14번	8	15번	78		

About PPL 수학연구소

중, 고등학교 내신 및 수능 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작, 해설강의 등을 하고 있으며 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.

모든 문의는
인스타 DM : ppl_math_lab
팀장 메일 : dhtjddnjs0327@naver.com

제작 및 검토

오성원 (팀장)	홍익대학교 수학교육과
안정인	압구정 파인만학원
박종원	구로구 상아탑학원
박상우	건국대학교 교육공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
김대현	건국대학교 수학과
김도희	동국대학교 경제학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
심영섭	서울대학교 응용생물화학부
이경민	서울대학교 수학교육과

PPL 수학연구소

1. ④

함수 $g(x)$가 $x=2$에 대하여 선대칭이므로

$g'(5)=-g'(-1)$이다.

이때, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}2\times\left\{\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\right\}$

$=2f'(-1)=-2$

$f'(-1)=g'(-1)=-1$

$\therefore\ g'(5)=1$

2. ③

$\sqrt[3]{16^n}$의 m제곱근은 $\left(\sqrt[3]{16^n}\right)^{\frac{1}{m}}$이다.

즉, $2^{\frac{4n}{3m}}$이다.

이때, $2^{\frac{4n}{3m}}$이 자연수이므로 $\dfrac{4n}{3m}$이 자연수이다.

4와 3은 서로소이므로 m은 4의 양의 약수이다.

또, n은 소수이므로 $n=3$

$\sqrt{3^{9m}}$의 n제곱근은 $\left(\sqrt{3^{9m}}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 $3^{\frac{9m}{2n}}$이다.

$n=3$이므로 $3^{\frac{3m}{2}}$이다.

$m=2$일 때, $3^{\frac{3m}{2}}=3^3=27$이고

$m=4$일 때, $3^{\frac{3m}{2}}=3^6=729$이므로 모든 $\sqrt{3^{9m}}$의 n제곱근의 합은 $27+729=756$

3. ③

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=\left(\sum_{k=1}^{2}a_k-\sum_{k=1}^{1}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{2}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{4}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{16}a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k\right)+a_1-a_{16}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}a_k-\sum_{k=1}^{1}a_k=1^2+1+1=3$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{2}a_k=2^2+2+1=7$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{4}a_k=4^2+4+1=21$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16}a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=8^2+8+8=73$

이고,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16}a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=a_9+a_{10}+\cdots+a_{16}$

$=a_9+\left(a_9+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(a_9+\dfrac{7}{4}\right)$

$=8a_9+\dfrac{\frac{7\times8}{2}}{4}$

$=8a_9+7$

$=73$

$\therefore a_9=\dfrac{33}{4}$

따라서

$a_{16}=a_9+\dfrac{7}{4}=10$

한편,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}a_k-\sum_{k=1}^{1}a_k=a_2=3$

$a_2=a_1+2$

이므로

$\therefore a_1=1$

$\displaystyle\therefore\sum_{n=1}^{15}a_n-a_1=3+7+21+73+1-10=95$

4. ③

$y=x^3-3x^2+2x+3$에서 $y'=3x^2-6x+2=3(x-1)^2-7$ 이므로 접선의 기울기는 $x=1$에서 최소이고 최솟값 -1을 갖는다.

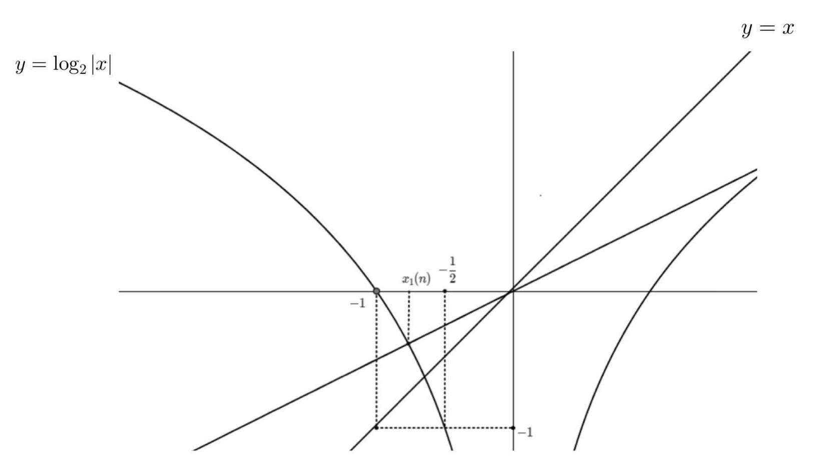
기울기가 최소인 접선의 접점은 $(1,3)$이고 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은 $y-3=-(x-1)$이다.

선분 AB의 길이는 일정하므로 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 길이 PH가 최대일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다. 직선 AB의 기울기 -1과 점 P에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.

$f'(x)=-2x+4$이므로 $x=\dfrac{5}{2}$일 때 점 P에서의 접선의 기울기가 -1이고 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 된다.

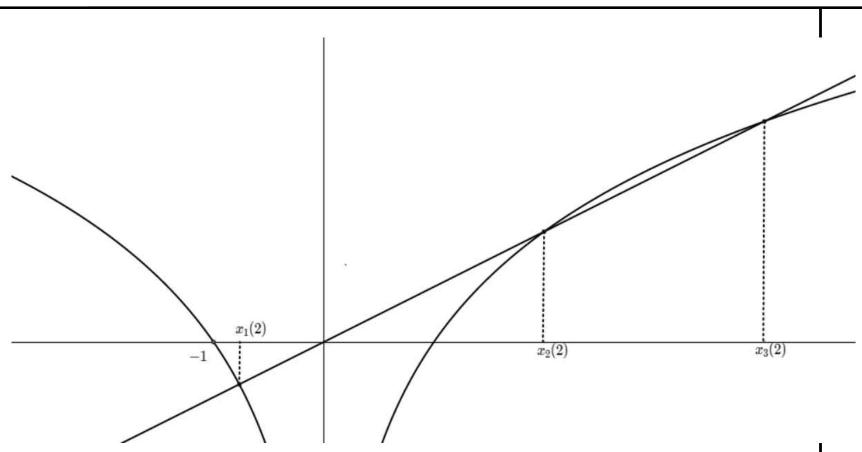
5. ⑤

ㄱ. 곡선 $y=\dfrac{1}{n}x$와 $y=\log_2|x|$와의 첫 번째 교점인 $x_1(n)$의 위치는 다음 그림과 같다.



따라서 $-1<x_1(n)<-\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $n=2$일 때, 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x$는 (2, 1), (4, 2)를 지나고 곡선 $y=\log_2|x|$도 (2, 1), (4, 2)를 지난다. 두 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 $x_2(2)=2$, $x_3(2)=4$이므로 $\log_2\frac{x_3(2)}{x_2(2)}=\log_2 2=1$ (참)

ㄷ. $\frac{x_3(n)-2n}{x_2(n)-2n}<\frac{\log_2 x_3(n+1)-2}{\log_2 x_2(n+1)-2}$

$\frac{\frac{x_3(n)}{n}-2}{\frac{x_2(n)}{n}-2}<\frac{\frac{x_3(n+1)}{n+1}-2}{\frac{x_2(n+1)}{n+1}-2}$이므로

점 $(2,\ 2)$와 점 $\left(\frac{x_2}{n},\ \frac{x_3}{n}\right)$을 지나는 직선의 기울기를 l_n이라 할 때, $l_n<l_{n+1}$임을 묻고 있다.

이때 $n\ge 3$에서 $\frac{x_3(n)}{n}<\frac{x_3(n+1)}{n+1}$이고, $\frac{x_2(n)}{n}>\frac{x_2(n+1)}{n+1}$ 이므로 $l_n<l_{n+1}$아다. (참)

6. ①

$\triangle$EAF에서 $\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\sin \mathrm{E}}=14$, $\overline{\mathrm{AF}}=14\times\frac{2}{\sqrt7}=4\sqrt7$

$\overline{\mathrm{EF}}$는 지름이므로 $\triangle$EAF는 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AE}}^2=14^2-\overline{\mathrm{AF}}^2=84$

$\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{21}$

$\overline{\mathrm{EH}}=2\sqrt{21}\times\cos\mathrm{E}=2\sqrt{21}\times\frac{\sqrt3}{\sqrt7}=6$

$\overline{\mathrm{AH}}^2=(2\sqrt{21})^2-6^2=48$, $\overline{\mathrm{AH}}=4\sqrt3$이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AD}}=8$이다.

$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{EF}}-\overline{\mathrm{DE}}=14-10=4$

$\triangle$ABF에서 $\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin\mathrm{A}}=14$, $\overline{\mathrm{BF}}=14\times\sin\mathrm{A}$

$\sin\mathrm{A}=\cos(\angle\mathrm{EAD})$이고,

$\cos(\angle\mathrm{EAD})=\frac{84+64-100}{2\times8\times2\sqrt{21}}=\frac{48}{32\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=14\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\sqrt{21}$

$\triangle$BDF에서 현 $\overline{\mathrm{BE}}$에 대해 원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{EFB}=\angle\mathrm{EAB}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{EAB})=\sin(\angle\mathrm{EAD})=\frac{5\sqrt7}{14}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{21}\times\frac{5\sqrt7}{14}=5\sqrt3$

7. 64

(ⅰ) 함수 $y=f(x)h(x)$의 $x=1$에서 연속성을 조사하자.

$\lim_{x\to1-}f(x)h(x)=-5h(1)$, $\lim_{x\to1+}f(x)h(x)=3h(1)$

함수 $y=f(x)h(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$-5h(1)=3h(1)$, $h(1)=0$

함수 $y=h(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

(ⅱ) 함수 $y=g(x)h(x)$의 $x=-1$에서 연속성을 조사하자.

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 불연속이므로

$h(0)=0$이고, $g(0)h(0)=0$

$\lim_{x\to-1}g(x)h(x)=\lim_{x\to-1}\frac{xh(x)}{x+1}=0$이므로

$h(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 갖는다.

최고차항의 계수가 2이므로 $h(x)=2(x-1)(x+1)^2$이다.

$\therefore\ h(3)=64$

8. 71

두 점 P, Q의 위치를 각각 $s_1(t)$, $s_2(t)$라 하면

$s_1(t)=t^3-\frac{21}{2}t^2+30t$, $s_2(t)=\frac{3}{2}t^2-2t$ 이다.

$s_1(t)-s_2(t)=t^3-12t^2+32t=t(t-4)(t-8)$

$\therefore a=4$, $b=8$

구하고자 하는 값을 s라 하자.

$s=\int_4^8|v_1(t)|\,dt=\int_4^8|3t^2-21t+30|\,dt$

$=3\int_4^8|(t-2)(t-5)|\,dt$

$=-3\int_4^5(t-2)(t-5)dt+3\int_5^8(t-2)(t-5)dt$

$=-3\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_4^5+3\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_5^8$

$=\frac{7}{2}+\frac{135}{2}=\frac{142}{2}=71$

[별해]

함수 $s_1(t)=t^3-\frac{21}{2}t^2+30t$는 $t=5$에서 극솟값을 가진다.

$s_1(4)=22$, $s_1(5)=\frac{25}{2}$, $s_1(8)=100$이므로

$s=|s_1(5)-s_1(4)|+|s_1(8)-s_1(5)|$

$=\left|\frac{25}{2}-22\right|+\left|100-\frac{25}{2}\right|=\frac{7}{2}+\frac{135}{2}=71$

9. 29

수열 $\{a_n\}$의 첫째 항을 a, 공차를 d라 하자. 모든 항이 서로 다른 정수이므로 $d\ne0$이어야 한다. 이때 $d<0$이면 S_2, S_4, S_6이 이 순서대로 등차수열을 이루어야 한다. 그러나

$S_4-S_2=S_6-S_4$

$a_2+a_3=a_5+a_6$

$3d=9d$

이므로 $d=0$이 되어 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $d>0$이어야 한다.

(i) S_2, S_4, S_6가 모두 양수이거나 음수인 경우

S_2, S_4, S_6이 이 순서대로 등차수열을 이루어야 하므로 $d=0$이어야 한다. 그러나 $d>0$이므로 위의 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $S_2 < 0$, $S_4 > 0$, $S_6 > 0$인 경우

$-S_2$, S_4, S_6이 이 순서대로 등차수열을 이루어야 하므로

$S_4 + S_2 = S_6 - S_4$

$2S_4 = S_6 - S_2$

$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$8a + 12d = 4a + 14d$

$2a = d$

이때 첫째 항이 음수이므로 $a < 0$이고 $d < 0$이어야 한다.

그러나 $d > 0$이므로 위의 경우는 존재하지 않는다.

(iii) $S_2 < 0$, $S_4 < 0$, $S_6 > 0$인 경우

$-S_2$, $-S_4$, S_6이 이 순서대로 등차수열을 이루어야 하므로

$S_2 - S_4 = S_6 + S_4$

$-2S_4 = S_6 - S_2$

$-2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$-8a - 12d = 4a + 14d$

$\therefore 6a = -13d$

이때 첫째 항이 음수이므로 $a < 0$이고 $d > 0$이므로 위의 조건을 만족한다.

$a_4 = \frac{5}{6}d$가 최소인 경우는 $d = 6$일 때이므로

등차수열 $\{a_n\}$은 $a_n = 6n - 19$이다.

$\therefore a_8 = 29$

10. 3

(가)에 의하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x) = x^4 + ax^2 + b$라 하면 $f'(x) = 4x^3 + 2ax = 2x(2x^2 + a)$

따라서 a값의 범위가 $a \geq 0$와 $a < 0$일 때,

그래프 개형은 다음 두 가지로 나타난다.

(i) $a \geq 0$

$f'(x)$가 $x = 0$에서 극솟값 b를 가진다.

따라서 $|f(x) - t|$가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않도록 하는 실수 t의 범위는 $t > b$로 조건을 만족시키는 최솟값 t가 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$

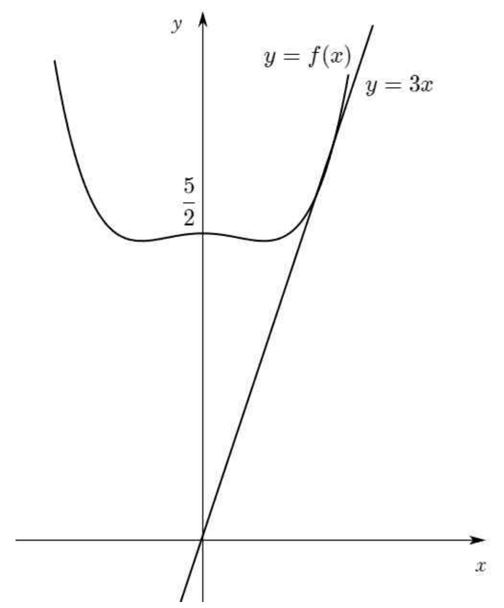
$f'(x)$가 $x = 0$에서 극솟값 b를 가지고 $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$에서 극대값을 가진다.

따라서 $|f(x) - t|$가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않도록 하는 실수 t의 범위는 $t \geq b$이다.

$\therefore b = \frac{5}{2}$

한편 $g(x) = f(x) - kx$라 할 때, 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $y = g(x)$의 그래프가 x과 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

즉, $f(x) - kx \geq 0$이어야 하므로 $f(x) \geq kx$



이때 (다)에서 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최댓값이 3이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 3x$는 $x > 0$인 점에서 서로 접한다.

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 3x$는 $x > 0$인 점에서 서로 접한다.

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 3x$의 접점의 x좌표를 $t(t > 0)$라 하면

$f(t) = 3t$에서 $t^4 + at^2 + \frac{5}{2} = 3t$ ……㉠

$f'(t) = 3$에서 $4t^3 + 2at = 3$ ……㉡

㉡과 ㉠을 연립하면 $t = 1$, $a = -\frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$이므로

$f(1) = 3$

[미적분]

11. ①

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-2}{1+2m}\right| = 1$

(i) $\frac{m-2}{1+2m} = 1$일 때,

$m - 2 = 1 + 2m$, $\therefore m = -3$

(ii) $\frac{m-2}{1+2m} = -1$일 때,

$-1 - 2m = m - 2$, $\therefore m = \frac{1}{3}$

따라서 모든 m의 값의 합은 $-3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$

12. ⑤

$\ln(x^2 + 1) = t$에서

$g'(t) = \frac{dx}{dt}$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

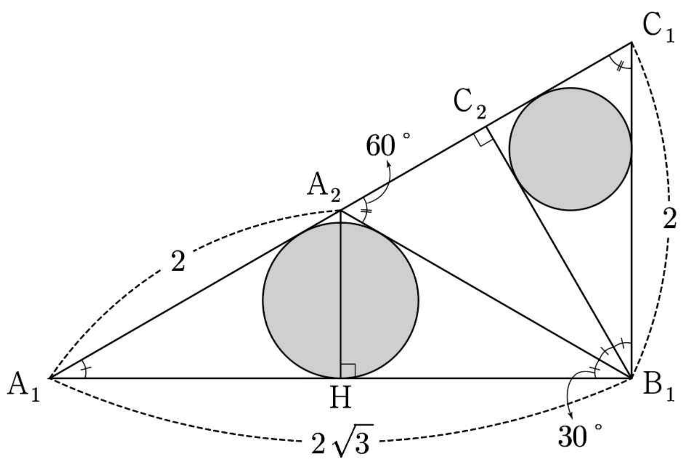
$\frac{2x}{x^2+1}\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+1}{2x}$

$t = 3$일 때, $\ln(x^2 + 1) = 3$이므로

$x^2 + 1 = e^3$, $x = \sqrt{e^3 - 1}$ ($\because x > 0$)

따라서 $g'(3) = \frac{e^3}{2\sqrt{e^3-1}} = \frac{e^3\sqrt{e^3-1}}{2(e^3-1)}$

13. ③



점 A_2에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$이고 $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$이므로 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2B_2} = 2$

이때 삼각형 $A_2B_1C_1$은 정삼각형이므로 $\overline{A_2C_2} = \overline{C_2C_1} = 1$이고 $\overline{B_1C_2} = \sqrt{3}$

삼각형 $A_1B_1A_2$에 내접하는 원의 반지름을 r_1이라 하자.

삼각형 $A_1B_1A_2$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times \sin 30^\circ = \sqrt{3}$이므로

$\frac{r_1}{2}\times(2+2+2\sqrt{3}) = r_1(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$\therefore\ r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$

삼각형 $B_1C_1C_2$에 내접하는 원의 반지름을 r_2라 하자.

삼각형 $B_1C_1C_2$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 1\times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{r_2}{2}\times(2+1+\sqrt{3}) = \frac{r_2}{2}(3+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\therefore\ S_1 = \left({r_1}^2 + {r_2}^2\right)\pi = \left\{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\right\}\pi = \left(\frac{44-25\sqrt{3}}{2}\right)\pi$$

한편, 두 삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$가 서로 닮음비 $\overline{A_1C_1} : \overline{A_1C_1} = 4:1$의 닮음이므로 넓이비는 $16:1$

따라서 공비 $r = \frac{1}{16}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\left(\frac{44-25\sqrt{3}}{2}\right)\pi}{1-\frac{1}{16}} = \frac{\left(\frac{44-25\sqrt{3}}{2}\right)\pi}{\frac{15}{16}} = \frac{352-200\sqrt{3}}{15}\pi$$

14. 75

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $(a_{n+1})^2 = a_na_{n+2}$을 만족하고, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 5인 등비수열이다.

$a_n = 5^{n-1}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+1}-(-4)^{n+1}}{a_n+2\times(-4)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\times 5^n-(-4)^{n+1}}{5^{n-1}+2\times(-4)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\times 5-(-4)\times\left(-\frac{4}{5}\right)^n}{5^{-1}+2\times(-4)^2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^n} = 15\times 5 = 75$$

15. 17

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$(x+2)^2 + e^x = ne^x$에서 $e^x > 0$이므로 $(x+2)^2e^{-x} = n-1$

$h(x) = (x+2)^2e^{-x}$이라 하면

$h'(x) = (2x+4-x^2-4x-4)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}$

$h'(x) = 0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이다.

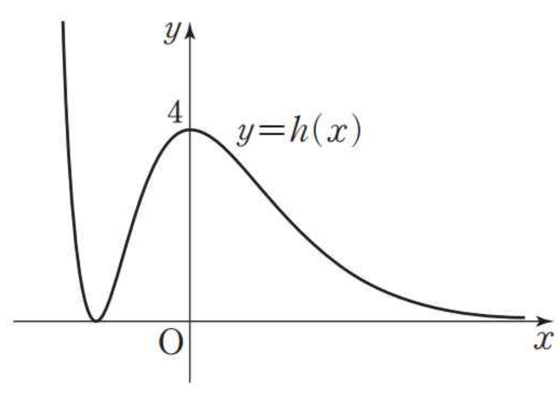
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 극솟값은 $h(-2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $h(0)=4$

$\lim_{x\to-\infty}(x+2)^2e^{-x} = \infty$, $\lim_{x\to\infty}(x+2)^2e^{-x} = 0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=n-1$의 서로 다른 교점의 개수가 a_n이므로

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 2,$

$a_5 = a_7 = \cdots = a_{10} = 1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 17$

[확률과 통계]

11. ①

$f(4) = {}_8C_2 + {}_8C_4 + \cdots + {}_8C_8$
$2^7 = {}_8C_0 + {}_8C_2 + \cdots + {}_8C_8$이므로
$f(4) = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

12. ②
학생 A는 사탕을 받지 못하므로 사탕을 받는 학생은 B 또는 C이다. 사탕을 한 학생이 모두 받을 수 있으므로 서로 다른 종류의 2개의 사탕을 두 학생에게 나누어주는 경우의 수는 $2^2 = 4$
마찬가지로 서로 다른 종류의 4개의 초콜릿을 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $3^4 = 81$
따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 81 = 324$

13. ②
(나) 조건에 따라
$b + c \le 2a$
a를 삼각형에서 가장 긴 변으로 생각하면, 삼각형이 존재하기 위해서는
$a < b + c$를 만족시켜야 한다.
그러므로 $a < b + c \le 2a$
(ⅰ) $a = 1$일 때
$1 < b + c \le 2$ 와 $a \ge b,\ a \ge c$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는 $(1,\ 1)$뿐이다.
$a = b = c = 1$이므로
$d' = d - 1,\ e' = e - 1$이라고 할 때,
$d' + e' = 7$을 만족한다.
$d' \ge 0,\ e' \ge 0$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 ${}_2H_7 = {}_8C_7 = 8$
(ⅱ) $a = 2$일 때
$2 < b + c \le 4$ 와 $a \ge b,\ a \ge c$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는
$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$이다.
① $a + b + c = 5$일 때
$d + e = 7$이므로 $d' + e' = 5$
따라서 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$일 때의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $2 \times {}_2H_5 = 2 \times {}_6C_5 = 2 \times 6 = 12$
② $a + b + c = 6$일 때
$d + e = 6$이므로 $d' + e' = 4$
따라서 $(2,\ 2)$일 때의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$
(ⅲ) $a = 3$일 때
$3 < b + c \le 6$ 와 $a \ge b,\ a \ge c$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는
$(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ 이다.
① $a + b + c = 7$일 때
$d + e = 5$이므로 $d' + e' = 3$
따라서 $(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2)$일 때의 순서쌍
$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $3 \times {}_2H_3 = 3 \times {}_4C_3 = 3 \times 4 = 12$
② $a + b + c = 8$일 때
$d + e = 4$이므로 $d' + e' = 2$
따라서 $(2,\ 3),\ (3,\ 2)$일 때의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $2 \times {}_2H_2 = 2 \times {}_3C_2 = 2 \times 3 = 6$
③ $a + b + c = 9$일 때
$d + e = 3$이므로 $d' + e' = 1$
따라서 $(3,\ 3)$일 때의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 2
(ⅵ) $a = 4$일 때
$4 < b + c \le 8$ 와 $a \ge b,\ a \ge c$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는
$(1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 4),$
$(4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (3,\ 3)$
이다.
① $a + b + c = 9$일 때
$d + e = 3$이므로 $d' + e' = 1$
따라서 $(1,\ 4),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$ 일 때의
순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $2 \times 4 = 8$.
② $a + b + c = 10$일 때
$d + e = 2$이므로 $d' + e' = 0$
따라서 $(3,\ 3),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$ 일 때의 순서쌍
$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $3 \times 1 = 3$
③ $a + b + c \ge 11$일 때
$d + e \le 1$이므로 $d' + e' \le -1$
이때 존재하는 순서쌍은 없다.
이와 같은 이유로 $a \ge 5$일 때는 조건을 만족시키는 순서쌍이 존재하지 않는다.
따라서 모든 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$8 + 12 + 5 + 12 + 6 + 2 + 8 + 3 = 56$

14. 8
전체 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$
두 수의 합이 홀수인 경우는
$(1,\ 2),\ (2,\ 3)$이므로
${}_2C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 = 9$
구하는 확률은 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
$\therefore\ p + q = 8$

15. 78
상자 A에서 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 E라 할 때, 사건 E는 상자 A에서 붉은 공 2개를 꺼내는 사건의 여사건이므로 $\mathrm{P}(E) = 1 - \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$
상자 A에서 꺼낸 공 중 흰 공이 1개인 사건을 C_1, 2개인 사건을 C_2라 하고, 상자 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 D라 하면 $\mathrm{P}(C_1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$
$\mathrm{P}(D \mid C_1) = \frac{{}_4C_1}{{}_7C_1} = \frac{4}{7}$
$\mathrm{P}(C_2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_0}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
$\mathrm{P}(D \mid C_1) = \frac{{}_5C_1}{{}_7C_1} = \frac{5}{7}$
$E = C_1 \cup C_2$이므로
$\mathrm{P}(E \cap D) = \mathrm{P}(C_1 \cap D) + \mathrm{P}(C_2 \cap D)$

$= \mathrm{P}(C_1)\mathrm{P}(D \mid C_1) + \mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}(D \mid C_2)$

$= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{29}{70}$

$\therefore \mathrm{P}(D \mid E) = \dfrac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(E)} = \dfrac{\frac{29}{70}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{29}{49}$