

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

평면 위의 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 2 : 1 : 2$ 이다.

1. $\left| \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} \right| = 2$ 인 경우 \overline{AB} 의 값을 구하시오.

2. 아래의 등식을 만족하는 평면 위의 두 점 P와 Q에 대하여, \overline{AQ} 가 최소가 될 때 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BC}}$ 의 값을 구하시오.

$$2(\overline{PB} - \overline{AB}) = 2(\overline{AC} - \overline{PC}) = 2(\overline{AQ} - \overline{PQ}) = \overline{BC}$$

3. 삼각형 ABC의 각 A의 크기를 θ 라고 하자.

함수 $f(x) = \left(x - \frac{7}{8}\right)^3 + \frac{1}{\theta}$ 에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^\theta x \sin x f'(\cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

[문제 2번] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 자연수 n 에 대하여 $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n}{2n+2k-1}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 을 구하시오.

2. 함수 $f(x)$ (단, $x > 0$)가 세 조건

$$(i) f''(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow \pi} f'(x) = 1$$

을 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_x^{\sqrt{3}x} f'(t) dt$ 을 구하시오.

(단, $\sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0.97$, $\cos \frac{\pi}{\sqrt{3}} = -0.24$, $\sin(\sqrt{3}\pi) = -0.75$, $\cos(\sqrt{3}\pi) = 0.67$ 이다.)

3. 선분 AB를 지름으로 하고, 반지름의 길이가 1인 반원의 호 위에

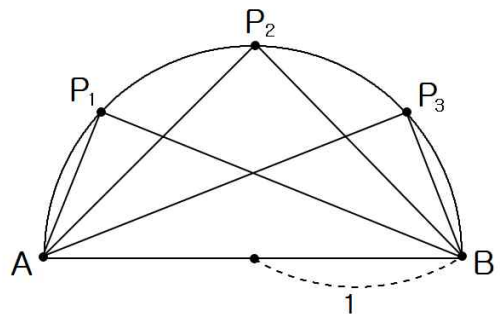
$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots = \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_nB}$ 를 만족시키는 n 개의 점

P_1, P_2, \dots, P_n 이 순서대로 놓여있다.

자연수 k ($1 \leq k \leq n$)에 대하여 삼각형 AP_kB 의 넓이를 S_k 라 할 때,

극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2}{n+1}$ 을 구하시오.

(오른쪽 그림은 $n = 3$ 인 경우이다.)



1. $(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}) = 4$ 이고 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{9}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 - 3(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = 4.$$

$\cos B = \frac{1}{4}$ 이다. $|\overrightarrow{AB}| = 4d$ 라 하면 $|\overrightarrow{BC}| = 2d$ 이므로, 위의 등식으로부터, $19d^2 = 4$ 임을 알 수 있다.

따라서, $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \frac{8}{\sqrt{19}}$ 이다.

2. 문제에 주어진 식으로부터 세 점 B, C, Q는 두 점 P, A를 초점으로 하는 쌍곡선 위에 있으며, 점 C, Q는 점 P쪽에, 점 B는 A쪽에 가까움을 알 수 있다.

문제는 도형의 위치가 아닌 크기에 관한 것이므로, $P = (-c, 0)$, $A = (c, 0)$ 로 하고, 쌍곡선은 다음의 방정식을 만족하는 것으로 하고 문제를 해결하여야 무방하다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{단, } b^2 = c^2 - a^2, a > 0)$$

이 경우 $\overline{BC} = 4a$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8a$ 이다.

\overline{AQ} 가 최소가 되는 경우를 생각하므로 $Q = (-a, 0)$ 로 하고 문제를 생각한다.

$2(\overline{PB} - \overline{AB}) = \overline{BC}$ 로부터 $\overline{PB} = 10a$, $2(\overline{AC} - \overline{PC}) = \overline{BC}$ 로부터 $\overline{PC} = 6a$ 가 되어

$\overline{PB} = \overline{PC} + \overline{BC}$ 가 성립하여 점 C가 선분 PB 위에 있음을 알 수 있는데, 선분 BC의 중점과 점 A, P는 직각삼각형을 이루므로 $\overline{PA} = 2a\sqrt{31}$ 임을 알 수 있다. 한 편 두 초점사이의 거리 $\overline{PA} = 2c$ 이므로, $c = a\sqrt{31}$ 이다.

따라서, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BC}} = \frac{a+c}{4a} = \frac{a+a\sqrt{31}}{4a} = \frac{1+\sqrt{31}}{4}$ 이다.

3. $(xf(\cos x))' = f(\cos x) - x \sin x f'(\cos x)$ 이므로

값을 구하고자 하는 식의 첫 번째 항에 부분적분법을 적용하면,

$$\int_0^\theta x \sin x f'(\cos x) dx = [x(-f(\cos x))]_0^\theta + \int_0^\theta f(\cos x) dx.$$

두 번째 항에 치환 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 을 적용하면,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_\theta^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) \cdot (-1) dt = \int_0^\theta f(\cos t) dt.$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 값은

$$[x(-f(\cos x))]_0^\theta = -\theta f(\cos \theta).$$

세 변의 비가 2:1:2인 이등변 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면 $\cos \theta = \frac{2^2+2^2-1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$ 이다.

따라서, 구하고자 하는 값은 $-\theta f(\cos \theta) = -\theta f(\frac{7}{8}) = -\theta \frac{1}{\theta} = -1$ 이다.

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속함수이다.

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n}{2n+2k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln 3.$$

$$\begin{aligned} 2. \int_x^{\sqrt{3}x} f'(t) dt &= [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} - \int_x^{\sqrt{3}x} f''(t)t dt \\ &= [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} - \int_x^{\sqrt{3}x} \sin t dt = [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} + [\cos t]_x^{\sqrt{3}x} \\ &= f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x - f'(x)x + \cos(\sqrt{3}x) - \cos x \end{aligned}$$

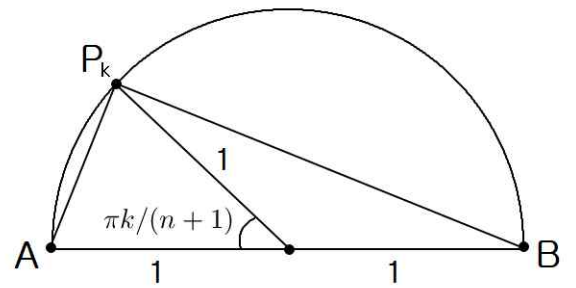
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_x^{\sqrt{3}x} f'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \{f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x - f'(x)x + \cos(\sqrt{3}x) - \cos x\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(\sqrt{3}x) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \sqrt{3}x - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(x) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} x + \cos \pi - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi - 0.76 \end{aligned}$$

3. 오른쪽 그림에서

$$\overline{AP_k}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$$

$$\overline{P_k B}^2 = 4 - \overline{AP_k}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) \text{ 이고, 따라서}$$

$$\begin{aligned} S_k^2 &= \left(\frac{1}{2} \times \overline{AP_k} \times \overline{P_k B}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right) \left(2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) \end{aligned}$$



이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) \frac{1}{n+1} = \lim_{n+1 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n+1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \sin^2\left(0 + \frac{\pi-0}{n+1}k\right) \frac{\pi-0}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt \end{aligned}$$

이고, 부분적분법에 의해 $\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t) + C$ 이므로,

$$\text{구하는 값은 } \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{1}{2\pi} [t - \cos t \sin t]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$