24학년도 6월 모의고사 - 수학

구성

번호) 단원 - 주제 이름
수학1 / 수학2 / 미적분 수록되어있음(확통, 기하는 천천히 올리겠습니다)
풀이

참고 : 풀이에 사용된 발상이나 중요한 팁

참고할 내용

(주관적인) 총평

1. 가장 주목할 문제는 21번 ㄱㄴㄷ 주관식. 참/거짓 판단 문제로 출제되었으나 이런 식이면 선지의 개수를 엄청 늘릴 수 있어서 두렵다.(A가 맞으면 1, 다음은 2, 4, 8, 16 같은 식으로 하면 8개의 합답형이 만들어질 수도 있다)
2. 주제와 관련해서 잘 문제화되는 것들을 출제해 참신한 소재는 아니지만(미적분 30 제외), 조건에 맞는 경우를 찾는 과정에서 낯선 발상을 요구해서 까다로웠을 듯!(12, 28미 등)

문항별 한마디(해설을 읽기 전 읽고 다시 고민해보아요)
9. 합이 이차식이면 각각은 일차식(등차수열)!
10. 넓이와 적분은 항상 같이 고려하자
11. 무서워하지 말고 하나하나 좌표를 써보자
12. A, B의 원소들의 차가 각각 일정하고, 두 배 관계에 있다. 여기서 세 개가 겹치는 것이 무슨 뜻일까?
13. 사인법칙을 통해 변 길이 표현하기, 수선 플레이로 코사인법칙 대체하기
14. 속도의 부호가 운동 방향과 같다
15. k의 범위를 나눠서 수형도 가르기
20. 상자 안의 말을 잘 해석해서 $g(x)$의 그래프의 개형을 추론하자
21. (일단 문제 이해부터..) t의 값을 요리조리 조정해가며 상황을 분석하고, 직관적으로 참/거짓을 판단해보자
22. 평균변화율 두 개의 곱이 음수가 되려면 구간 안에 __가 있어야 한다
27미. 아마 이걸 도형(도형에서 등비급수 구하는 그 문제) 대체로 나온듯한데.. 기울기가 음수라서 어렵다면 양의 각을 미지수로 잡아서 써보자
28미. 형태가 같은 식 두 개를 보고 이차방정식 떠올리기, 루트 안은 음수가 될 수 없음 활용하기 모두 기출된 적 있는 내용이다.
29미. C가 제곱 더하기 제곱 꼴임이 보이는데, 바꾸고 나면 직선의 방정식도 비슷하게 바꾸고 싶어진다.
30미. 수열과 엮은 아주 신선한 문제. 언제부터 -1이고 언제부터 -1이 아닌지 잘 파악하자.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

〈공통〉

1) 수학1 - 지수법칙

$\sqrt[3]{27} = 3$, $4^{-\frac{1}{2}}$이므로 이 둘의 곱은 $\frac{3}{2}$이다. 답은 5번.

2) 수학2 - 미분계수의 정의

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$가 $f'(3)$의 정의 그 자체였다. $f'(x) = 2x - 2$이므로 답은 3의 2배에서 2를 뺀 4로 4번이다.

3) 수학1 - 시그마의 성질

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3) = 60$이라는 식은 $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 2배에 (3을 10번 더한 것)을 더한 것이 60이라는 뜻이다. 따라서 $\square \times 2 + 3 \times 10 = 60$처럼 식을 쓸 수 있고(혹은 상상할 수 있고), $\square$($= \sum_{k=1}^{10} a_k$)의 값은 60에서 30을 빼서(30) 2로 나눈 15이다. 답은 2번.

4) 수학2 - 극한과 연속

이 함수가 연속이라는 말은 극한값과 함숫값이 일치한다는 말이다. 따라서 $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$이고, 주어진 식으로부터 $f(1) = 4 - f(1)$을 얻을 수 있다. '어떤 것($= f(1)$)이랑 4에서 그걸 뺀 게 같다 : 어떤 것은 4의 절반이다'라고 이 식을 읽으면 답은 2, 2번이다.

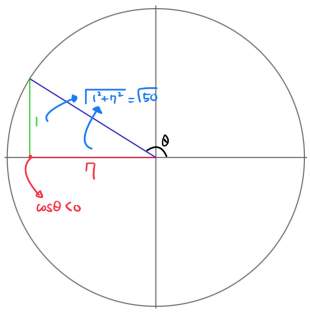
5) 수학2 - 곱의 미분

$f(1) = 2$, $f'(1) = 3$임이 주어졌으므로 굳이 두 번 쓰지 않고 바로 대입했다.

$g'(1)$을 물어보니까 $g(x)$를 미분해보자. $g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3 - 1)f'(x)$의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $g'(1) = 3{\cdot}1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 = 12$이고, 답은 1번이다.

6) 수학1 - 삼각함수의 성질

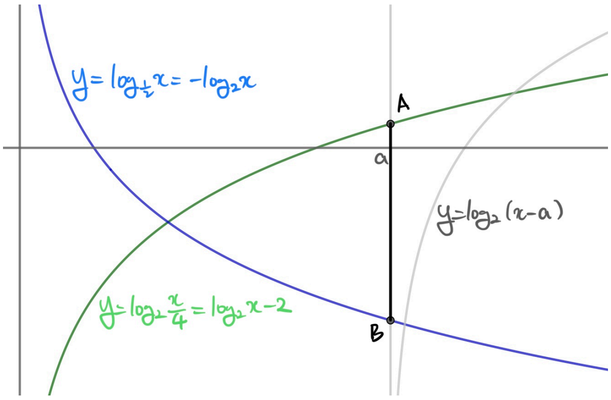
$\sin(-\theta)$를 보자마자 '사인은 원점대칭(홀함수)니까 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$'가 떠올라야 한다. 고쳐보면 $-\sin\theta = \frac{1}{7}\cos\theta$인데, 우리는 한 식에는 한 종류의 삼각함수만이 존재하는 것이 다루기 편함을 알고 있다. 따라서 양변을 $\cos\theta$로 나누면(당연하게도 $\cos\theta \neq 0$이다) $\tan\theta = -\frac{1}{7}$이다. $\cos\theta < 0$임을 활용하여 왼쪽과 같은 그림을 그려볼 수 있다.



그림과 같이 변의 길이를 작성한다면 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$이다. 답은 4번.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

7) 수학1 - 로그함수의 그래프

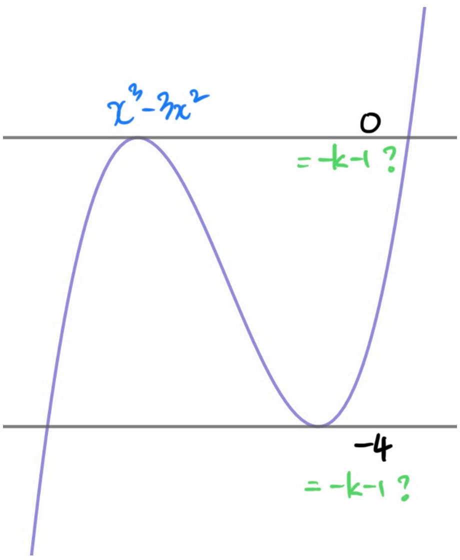


문제를 읽으면서 그림을 읽어본다면 다음과 같다. 위 그림에서 $y=\log_2(x-a)$의 점근선이 $x=a$이므로 A, B는 다음과 같이 그려진다. a가 적당히 크므로($a>2$를 대충 그렇게 읽어도 무방하고, 사실 두 그래프가 $x=2$에서 만나 그 후에서는 $\log_2 x-2>\log_{\frac{1}{2}}x$이다)

$\overline{AB}=(\log_2 a-2)+\log_2 a=2\log_2 a-2=4$, $\log_2 a=3$, $a=8$이다. 답은 3번.

8) 수학2 - 삼차함수의 그래프

두 그래프가 만나는 점의 개수는 두 그래프의 식이 같다는 방정식을 세울 때 그 방정식의 근이 2개라는 의미이다. $2x^2-1=x^3-x^2+k$라는 방정식을 세운다면 이 방정식의 근이 2개이고, 미지수는 미지수끼리 정리하면 $-k-1=x^3-3x^2 \;\to$ $x^3-3x^2=-k-1$이 된다(이때 '최고차항의 계수는 양수가 보기 편함'을 주의해 $2x^2$와 k를 이항하였고, 그 후 해설지에 쓰기 좋게 양변의 순서를 바꿨다).



굳이 우변을 상수로 바꾼 이유는 이 방정식을 다시 그래프의 관점에서 해석해야 하기 때문이다(이 풀이 방법은 개념 혹은 기출을 충분히 학습했다면 자연스럽게 나올 것이므로 더이상 자세한 설명을 생략하겠다).이를 다시 그래프에 옮겨서 생각해보면 왼쪽과 같고, '삼차함수(좌변)와 상수함수(우변)의 교점이 2개'라고 조건을 다시 선택할 수 있다. 그림과 같이 $y=-k-1$의 후보가 두 개 나오는데, $k>0$이므로 $-k-1$은 당연히 음수여서 밑의 것을 먼저 고려하는 것이 맞다.

x^3-3x^2의 극솟값은 -4(삼차함수의 비율 관계에 따라서 $x=2$에서 극값이 등장함을 구해도 좋고, 경험이 많이 쌓였다면 이 함수의 그래프를 아예 외우고 있는 것도 나쁘진 않다)이므로 $-4=-k-1$, $k=3$이다. 답은 3번.

24학년도 6월 모의고사 – 수학

9) 수학1 – 수열의 합과 시그마

합($\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k}$)이 2차식(등차수열의 합은 항 개수 n에 대한 2차식이다)이므로 각각($\frac{1}{(2n-1)a_n}$)은 1차식(=등차수열)이 된다. n^2+2n을 등차수열의 합으로 읽겠다(그리고 그 등차수열의 일반항이 $\frac{1}{(2n-1)a_n}$인 것이다)는 의미이므로, 이 등차수열은 $(2n-1)+2=2n+1$이다. 따라서

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1,\ a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$이 되고, 구해야 하는 시그마는

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\}$이다. 지워지는 항들이 있는 시그마를 계산하면

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}+\cancel{\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}}+\frac{1}{21}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$=\frac{10}{21}$이다. 답은 1번.

참고 : $S_n \leftrightarrow a_n$ 변환하기

S_n이 이차식이라면 a_n은 일차식임은 이미 배웠다. 이때 네 가지 규칙을 사용하여 $S_n \leftrightarrow a_n$을 손쉽게 변환할 수 있다.

1. $S_n=n^2 \leftrightarrow a_n=2n-1$
2. $S_n=n \leftrightarrow a_n=1$
3. 수열을 상수배하면 합도 상수배이고, 수열이 무언가의 합이라면 수열의 합도 합으로 표현할 수 있다. 예를 들어 $S_n=cn \leftrightarrow a_n=c$, $S_n=n^2+3n \leftrightarrow a_n=2n-1+3$이 성립한다.
4. S_n(이차식)에 상수항이 있다면, 그 상수항은 a_1에 더해준다.

증명은 스스로 하길 바라겠다.
예를 들어 $S_n=n^2+2n$을 (합이 n^2인 수열)+(합이 $2n$인 수열)로 해석해서 $a_n=(2n-1)$(합이 n^2이 됨)$+(2)$(합이 $2n$이 됨)$=2n+1$로 쓸 수 있다. 여타 방법들에 비해 훨씬 빠른 방법임을 자신하므로 꼭 숙지해 사용해보자.

10) 수학2 – 적분과 넓이

A의 넓이(함숫값이 양수인 구간에서 함수와 축이 만드는 도형의 넓이)보다 B의 넓이(음수인 구간에서의 넓이)가 3만큼 크다는 말은 $\int_0^3 f(x)dx=3$이라는 말이다. 따라서

계산해보면 $k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$

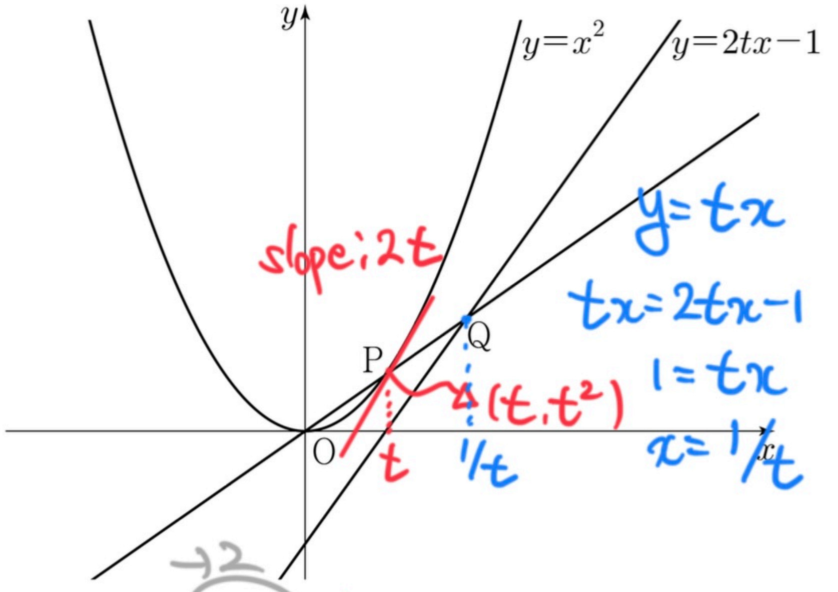
$=k\left(\frac{81}{4}\cancel{-45+27}^{=-18=-\frac{72}{4}}\right)=\frac{9}{4}k=3,\ k=\frac{4}{3}$이다. 답은 2번.

−45+27(정수의 연산)이 편하고 빠르니까 먼저 계산해서 분수로 바꿔줬다.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

11) 수학2 - 극한의 계산

<DGP : 문제를 읽으면서 실시간으로 필기/식 쓰기를 해 보자>

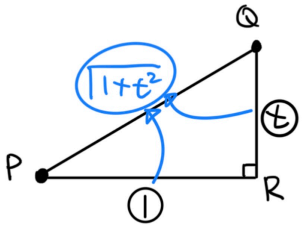


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$$\lim_{t\to1^-}\cancel{\left(\frac{1}{t}-t\right)}\sqrt{1+t^2}\,\frac{1}{\cancel{1-t}}=2\sqrt{2}$$

$\frac{\cancel{1-t^2}}{t}$, $1+t \to 2$, $\sqrt{1+t^2} \to \sqrt{2}$

1. 포물선($y = x^2$)과 직선($y = 2tx - 1$) 사이의 거리가 최소인 점을 P라고 정의했는데, P를 지나고 이 포물선에 접하는 직선은 이 직선에 접한다. 접선의 기울기(y') = x좌표의 2배($2x$) = 직선의 기울기($2t$), 곧 $y' = 2x = 2t$에서 $x = t$이므로 P의 x좌표는 t, $P(t, t^2)$이다.
2. 직선 OP의 방정식이 $y = tx$(원점을 지나므로 상수항이 없고, y좌표가 x좌표의 t배이기 때문이다)이므로 Q의 x좌표는 $tx = 2tx - 1$의 근이다. $tx, -1$를 이항하면 $1 = tx$, $x = \frac{1}{t}$이 되고, 곧 Q의 x좌표가 $\frac{1}{t}$임을 알아낼 수 있다.
3. P, Q의 정보를 모두 알고 있으므로 $\overline{PQ}$를 구할 수 있겠다. x좌표의 차가 $\frac{1}{t} - 1$이므로 y좌표의 차는 그것의 t배일 것이다. 따라서 왼쪽 그림과 같이 $\overline{PQ} = \sqrt{1+t^2}\left(\frac{1}{t} - t\right) = \sqrt{1+t^2}\frac{1-t^2}{t}$이고, 구하고자 하는 극한은 $\lim_{t\to1-}\frac{\cancel{1-t^2}^{\,1+t}}{t}\sqrt{1+t^2}\frac{1}{\cancel{1-t}} = 2\sqrt{2}$이다. 답은 3번.



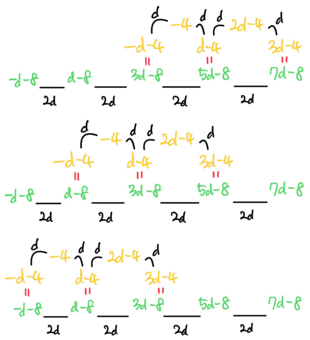
동그라미 안의 숫자들은 길이의 비를 나타낸다. 미지수를 도입하지 않고 길이의 비를 나타내고 싶을 때의 팁이다.

24학년도 6월 모의고사 – 수학

참고 : DGP – 덮어쓰며 계산 빠르게

정갈하게 쓴 해설지는 예쁘지만 실전에서 쓰기 힘들다. 실전에서는 문제를 읽으면서 바로바로 떠올려야 하는 것들이 있고, 그에 따라 낼 수 있는 결론이 있다. 따라서 본 해설은 실전성을 향상하기 위해서 필기와 식을 함께 보여주는 'DGP : 덮어쓰며 계산 빠르게'를 수록하였다. 필자가 문제를 풀면서 어떤 생각과 어떤 행동을 했는지 더 실감나게 느낄 수 있었으면 좋겠다.

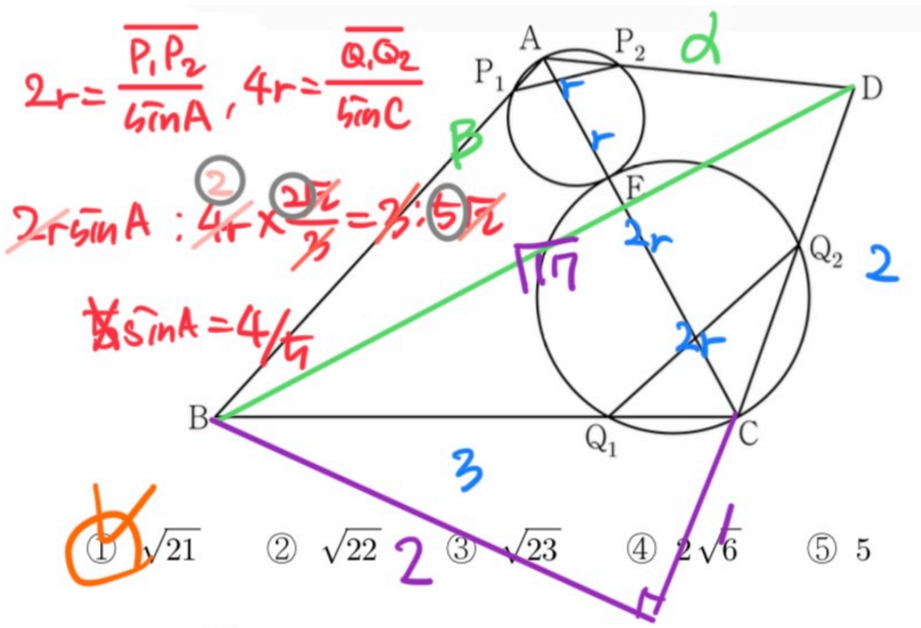
12) 수학1 – 등차수열과 좌표평면



항상 그랬듯이 공차를 d로 두고 집합 A를
$A=\{-4-d,\ -4,\ d-4,\ 2d-4,\ 3d-4\}$로 쓸 수 있다. b_n이 a_n(같은 항 번호의 a_n)$+a_{n+1}$(와 바로 다음 항을 합한 것)으로 정의되었다. 예를 들어 $b_1=a_1+a_2$ $=-4-d-4=-d-8$이므로
$B=\{-d-8,\ d-8,\ 3d-8,\ 5d-8,\ 7d-8\}$이다. $n(A\cap B)=3$은 이 다섯 개와 이 다섯 개 중에 겹치는 것이 3개라는 말이다.
분명히 뭔가 규칙이 있지 않을까? 생각해보니 이것들은 차이가 d이고, 이것들은 $2d$이다. 예를 들어 왼쪽과 같이 $3d-4=7d-8$라면 세 개가 겹칠 수 있고, '조건을 만족하려면 A의 $-4-d, d-4, 3d-4$의 세 개가 겹쳐야 한다'는 사실을 알 수 있다.
다음과 같은 세 경우를 떠올릴 수 있고, 각각 방정식
$3d-4=7d-8$, $3d-4=5d-8$, $3d-4=3d-8$을 통해 d의 값을 구할 수 있다. 각 방정식을 풀면 $d=1$, $d=2$, (해가 없음) 이 된다. (해가 없음)의 경우를 제외한 두 경우에서 $a_{20}(=a_2+18d=18d-4)$를 각각 구하면 14, 32으로, 답은 $14+32=46$이다. 답은 5번.

13) 수학1 - 사인법칙/코사인법칙

⟨DGP⟩



$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \alpha\beta = 2$, $\alpha\beta = 5$

$\frac{\alpha^2+\beta^2-17}{2\alpha\beta} = -\frac{3}{5}$ $\quad \alpha^2+\beta^2 = 17-6 = 11$

$+2\alpha\beta \qquad +10$

$\alpha+\beta = \sqrt{21}$

(뒤 페이지 해설)

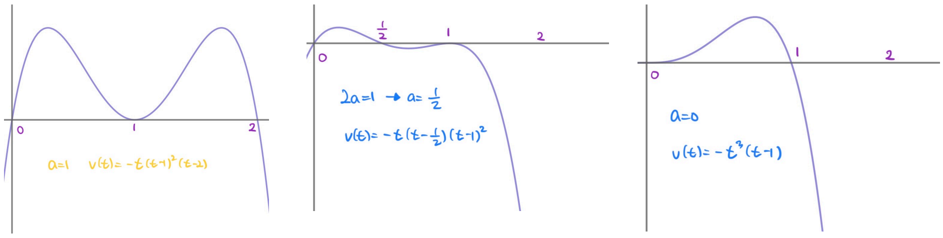
24학년도 6월 모의고사 - 수학

1. 변의 길이를 준다면 그 변 위에 쓰는 습관을 들이자. 또한 $\overline{AE} : \overline{EC} = 1 : 2$이고 이 두 변이 각각 원의 지름이므로 그 원의 반지름을 각각 r, $2r$로 쓸 수 있다. 무언가를 노리고 하는 행위가 아니고, 일단 습관적으로 쓰고 보는 것이다.
2. $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_1Q_2}$의 비가 주어졌는데, 코사인법칙을 써서 구하기에는 알고 있는 것이 너무 부족하다. 마침 외접원의 반지름에 대한 정보가 있으므로 사인법칙을 사용해보자. 다음과 같이 식을 작성할 수 있고, 주어진 비례식을 $\sin A$에 대한 식으로 다시 작성할 수 있다. 좌변의 양쪽을 $2r$로 나누고, 각 변의 오른쪽에 있는 $\sqrt{2}$를 소거하고, 좌변의 양쪽에 3을 곱하면 우변의 왼쪽에 있는 3과 지워지므로 약분하면 $\sin A : 4 = 1 : 5 \rightarrow 5 \sin A = 4,\ \sin A = \dfrac{4}{5}$를 얻을 수 있다. $\angle A$가 둔각이므로 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$는 덤으로 생각해두자.
3. $\triangle ABD$의 넓이를 제시했으므로 삼각형을 완성해보면 보이는 게 많아진다. $\triangle BCD$에서 코사인법칙을 쓰면 $\overline{BD}$도 구할 수 있고, $\triangle ABD$에서의 코사인법칙을 통해 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$에 대한 식도 쓸 수 있어 보인다.
4. $\triangle BCD$에서 코사인법칙은 수선 그리기로 대체하겠다. 다음과 같이 수선을 그리면 $\cos(\angle BCD) = -\dfrac{1}{3}$와 $\overline{BC} = 3$을 활용해 변의 길이를 작성할 수 있고, 피타고라스 정리를 사용하면 $\overline{BD} = \sqrt{17}$이다.
   편의상 $\overline{AD} = \alpha$, $\overline{AB} = \beta$로 두면 $\triangle ABD$의 넓이를 다음과 같이 쓸 수 있고, 분모와 분자를 약분하면 $\alpha\beta = 5$이다. 또한 $\cos A$를 알고 있으므로(아까 덤으로 생각해두길 잘했다!) 코사인법칙을 사용하면 α, β에 대한 식을 하나 더 작성할 수 있고, 곧 $\alpha^2 + \beta^2 = 11$을 구할 수 있다.
5. 구하고자 하는 것이 $\alpha + \beta$인데 우리는 $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$를 쉽게 알 수 있으므로 답은 $\sqrt{11 + 2 \times 5} = \sqrt{21}$이다. 답은 1번.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

14) 수학2 - 4차함수의 그래프 개형

속도함수 $v(t)$가 운동 방향(부호와 같다)를 한 번 바꾸려면, 이 함수의 그래프가 함숫값의 부호를 바꾸는 순간이 단 한 번 있어야 한다. 나머지 (0보다 큰 t)절편에서는 (두 번이든 세 번이든)접해야 한다. 이미 제시된 절편이 2개($t=0,\ 1$)이므로 이것들과 $t=a,\ 2a$이 겹쳐야 축에 접해서 함숫값의 부호가 변하지 않는다(겹치지 않는다면 부호 변화의 순간이 3번이나 생겨 조건을 만족하지 않는다).
$a=1,\ 2a=1,\ a=2a=0$의 세 가지를 떠올릴 수 있고, 각각의 경우에서 $v(t)$는 아래와 같다.



속도함수의 정적분이 위치의 변화량과 같으므로 이 세 경우 중 $\int_0^2 v(t)dt$가 최대가 되는 경우를 찾아야 한다. 그런데 이 두 경우는 $\int_0^2 v(t)dt$의 값이 음수가 되므로(1 이후에 그래프가 급격히 감소한다) 이 경우만 계산하면 되겠다. 그냥 한 번만 눈 딱 감고 전개해서 적분해보자. 마침 다행인 것은 이 함수가 $t=1$에 대해서 대칭이라 $2\int_0^1 v(t)dt$로 처리할 수 있다.

$$\int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 -t(t-1)^2(t-2)dt = -\int_0^1 (t^2-2t)(t^2-2t+1)dt$$

$$= -\int_0^1 \{t^2(t-2)^2 + (t^2-2t)\}dt = -\int_0^1 \{t^4-4t^3+4t^2+t^2-2t\}dt$$

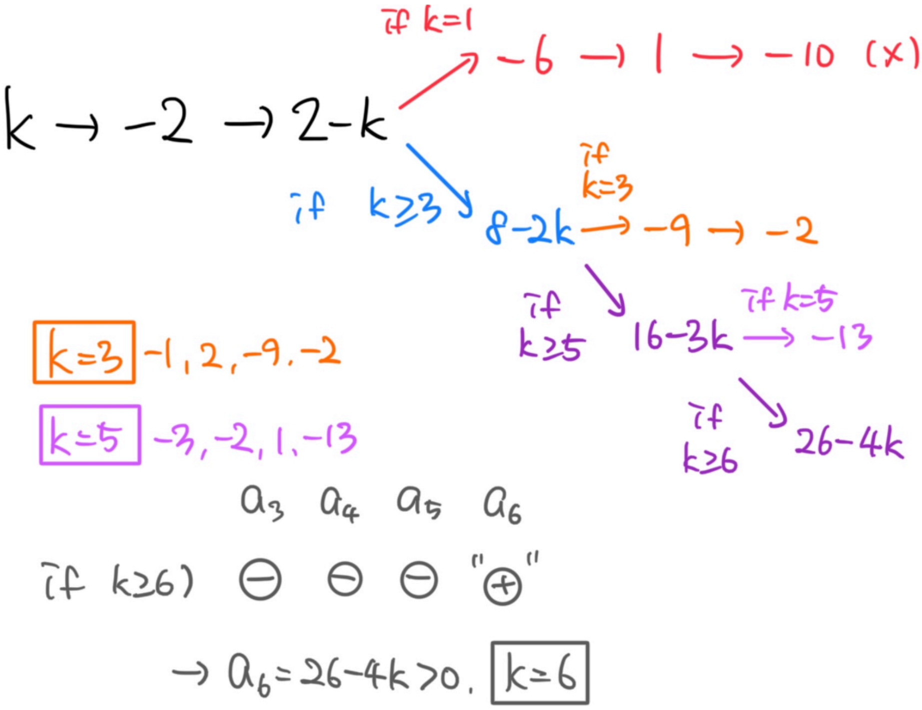
$$= \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{5} + \cancel{2-\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{15}$$

이다. t^2-2t로 묶어서 '제곱꼴에 t^2를 곱함'으로 계산하는 것이 사소한 팁이다. 보일 때만 하는거지 그냥 전개해도 무방하다. 답은 3번.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

15) 수학1 - 수열의 점화식

〈DGP : 수형도를 그려서 상황을 파악해보자〉



1. a_1부터 하나하나 항들을 구해가며 부호를 따져보자. $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$은 '3번부터 6번까지 음수 항이 홀수 개'라는 의미이므로 항상 되새기자. a_3까지는 별로 특이한 상황이 발생하지 않는다.
2. 그러나 $a_3 \to a_4$에서 첫 번째 선택지가 생긴다. 만약 $a_3 = 2-k$가 양수라면(곧 $k = 1$을 의미한다) 다음 항들을 계산할 수 있고, a_3부터 a_6까지의 음수 항이 2개라서 조건을 만족하지 못한다. $k = 1$은 탈락!
3. 따라서 $a_3 = 2-k$가 음수($k \neq 2$이므로 $k \geq 3$을 의미한다. $k = 2$이면 $a_3 = 0$이라 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$이 된다)여야만 한다. 그러면 $a_4 = 8-2k$인데, 여기에서 또 갈림길이 생긴다. $a_4 = 8-2k$가 양수라면($k = 3$) 다음 항들을 계산할 수 있고, a_3부터 a_6까지의 음수 항이 3개라서 조건을 만족한다. $k = 3$은 합격!
4. 아직 모든 상황을 모두 탐색한 것이 아니므로 하나 찾았다고 멈추면 안 되고 계속 찾아야 한다. $a_4 = 8-2k$가 음수일 때 $a_5 = 16-3k$이고, 또 갈림길이다. $a_5 = 16-3k$가 양수라면($k = 5$) $a_6 = -13$이 되고, a_3부터 a_6까지의 음수 항이 3개라서 조건을 만족한다. $k = 3$은 합격이다.
5. $a_5 = 16-3k$가 음수라면($k \geq 6$) $a_6 = 26-4k$이다. 이 이후는 관심이 없으므로 더이상 갈림길 만들기를 멈추고 고민해보자. $k \geq 6$일 때 a_3부터 a_6까지의 음수 항의 개수를 세 보자. a_3, a_4, a_5 모두 음수이므로 a_6은 양수여야만 하고, 곧 $26-4k > 0$, $k = 6$을 얻을 수 있다.
   정리하자면 k가 될 수 있는 수는 3, 5, 6으로 합은 14이다. 답은 2번.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

16) 수학1 - 지수와 부등식

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{-2x}$로 바꾸면 $x - 6 \le -2x,\ x \le 2$이다. $x = 1, 2$이므로 답은 3.

17) 수학2 - 부정적분

$f'(x) = 8x^3 - 1 \rightarrow f(x) = 2x^4 - x + 3$($f(0)$, 곧 상수항이 3이므로 C를 굳이 쓰지 않았다)이므로 답은 $2 \times 2^4 \cancel{-2+3}^{+1} = 32 + 1 = 33$이다.

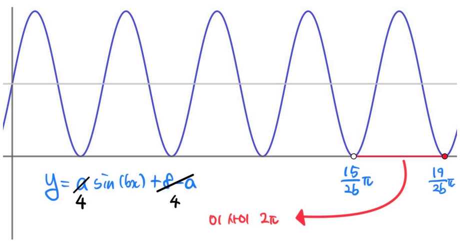
18) 수학2 - 미분과 극값

$x = 1$에서 이 함수가 극소임은 $f'(1) = 0$을 의미한다. 따라서 $f'(1) = 3a + b = 0,\ b = -3a$이다. 두 개의 미지수를 하나로 통일했다. 극솟값이 $f(1)$($x = 1$에서 이 함수가 극소라고 줬다) $= a - 3a + a = -a = -2$이므로 $a = 2$, 극대는 $x = -1$일 때 $-a + 3a + a = 3a = 6$이다. 답은 6.

19) 수학1 - 삼각함수의 그래프

조건 (가)에 따르면 함숫값이 0 이상이어야 하는데 (나)를 보면 0인 점이 있어야 한다. 따라서 이 함수의 최솟값이 0이고, 이는 $-a + 8 - a$와 같다. $8 - 2a = 0,\ a = 4$를 계산할 수 있다.

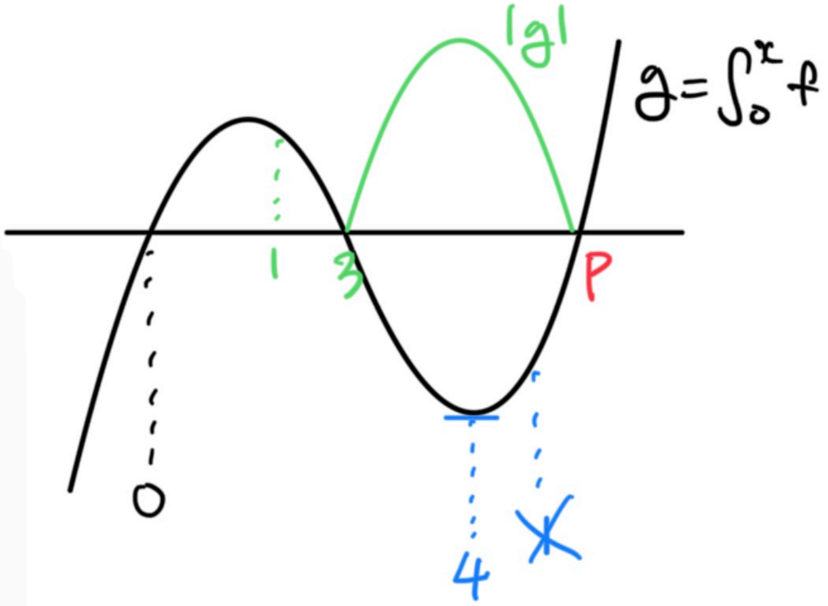
(가)에서는 더이상 얻을 게 없어보이고.. (나)를 한 번 더 유심히 보면 구간 안에서 $f(x) = 0$인 점이 4개 있어야 하는데, 이건 그림을 그려봐야겠다.



왼쪽과 같은 그림에서 4번째로 최소가 되는 점은 $\left(6\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{1}{b}$, 5번째로 최소가 되는 점은 $\left(8\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{1}{b}$인데, 그 사이에 2π가 있어야 구간 안에 근이 4개만 있을 수 있다. 4번째 최소와 2π가 만나면 근의 개수가 3개가 되므로 등호를 포함하지 않고, 5번째 최소와 2π가 만나도 근의 개수가 4개이므로 등호를 포함하는 부등식을 쓰면 $\frac{15\pi}{2b} < 2\pi \le \frac{19\pi}{2b}$, $15 < 4b \le 19$, $4b = 16$, $b = 4$이다. 이때 b는 자연수이므로 $4b = 16$으로 쓸 수 있었다. 따라서 답은 $a + b = 4 + 4 = 8$.

20) 수학2 - 정적분으로 정의된 함수

〈DGP〉



$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p)$$

$$\rightarrow g'(x)=\frac{1}{3}x(x-3)+\frac{1}{3}(2x-3)(x-p)$$

$$\rightarrow g'(4)=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}(4-p)=0$$

$$\frac{1}{5}\times\frac{4}{\cancel{3}}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}(p-4)$$

$$\frac{24}{5}=p$$

$$f(9)=g'(9)=\frac{1}{\cancel{3}}\times\overset{3}{\cancel{9}}\times 6+\cancel{\frac{1}{3}\times 15}\times\frac{21}{\cancel{5}}$$

$$=18+21=\boxed{39}$$

(뒷 페이지 해설)

24학년도 6월 모의고사 – 수학

1. $g(0)=0,\ g'=f$가 바로 떠올라야 한다. 상자 안 내용을 읽어보면 'g의 최소는 $x=4$일 때, $|g|$의 최소는 $x=3$일 때'가 된다. 그래프의 x좌표가 어디에 있어야 하는지 추론해보자.
2. $g(x)$의 그래프는 삼차함수의 그래프이고, x축은 $x=0$인 점이 정해준다. 조건에서 제한해준 $x \geq 1$에서 극점이든 변곡점이든 특이한 상황이 많이 존재하도록 0을 설정하는 것이 사소한 팁이다. 일단 이해를 위해서 대충 그려놓는 것이고, 어차피 아니면 새로 그래프나 $x=0$을 그리면 되기 때문이다.
3. 'g의 최소는 $x=4$일 때 나옴'을 먼저 고민해보면 $x=1$은 극소 이후(오른쪽)에 나올 수 없음을 알 수 있다. 그렇게 되면 g의 최소는 $x=1$일 때 나오기 때문이다. 따라서 $x=1$은 극소 이전(왼쪽)에 나올 수밖에 없고, $x \geq 1$에서의 최소는 극소인 점과 같다. 따라서 이 삼차함수의 극솟점의 x좌표는 4이다. 극소라는 특징을 잘 표현하기 위해 평행선을 그리자.
4. 이번에는 '$|g|$의 최소는 $x=3$일 때'를 고민해보자. x축보다 아래의 그래프를 접어올리면($x<0$인 부분은 논의 대상이 아니라서 굳이 할 필요 없다) $x=3$은 $g(x)$와 x축의 두 교점 중 하나여야 한다. 그런데 오른쪽은 될 수 없으므로(4보다 오른쪽이기 때문이다) 왼쪽이어야만 하고, 그림과 같이 $x=3$인 점을 찾을 수 있다. $x=1$은 더이상 쓸모가 없어보이니까 0과 3 사이 적당한 곳에 써두자.
5. $g(x)$의 세 x절편 중 두 개를 알고 있으므로 나머지 하나를 알아내기 위해 미지수를 도입해서 식을 써보자. 그림과 같이 식을 쓸 수 있고(절편 $0,3,p$ 반영), 아직 반영하지 않은 정보인 '$x=4$에서 극값 $\rightarrow g'(4)=0$'을 위해 미분해서 $x=4$를 대입해보자. 미지수가 있는 식인 $x-p$를 한 덩어리로, 나머지를 한 덩어리로 간주해 곱의 미분법을 사용하는 것이 팁이다.
6. $p=\dfrac{24}{5}$를 구해냈고, 이제 $g(x)$의 모든 것(곧 $f(x)$의 모든 것)을 알고 있으므로 미분해서 $x=9$를 대입하면 되겠다(이미 미분해둔 식이 위에 있으니까 그냥 대입만 하자). 따라서 답은 39.

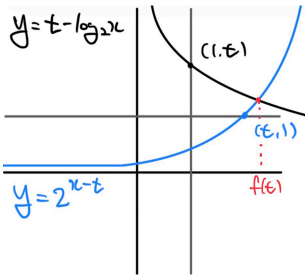
⋆ 참고로, $f(x)=(x-p)(x-4)$로 두고 $g(3)=g(0) \rightarrow \displaystyle\int_0^3 f(x)dx=0$을 사용하는 것도 하나의 방법이다. 오히려 이 풀이의 계산이 더 빠를 수 있으나, 필자는 여지껏 삼차함수를 분석해왔으므로 삼차함수의 식에서 미지수를 도입하였다. 이 방법으로의 풀이도 시도해보는 것을 추천한다.

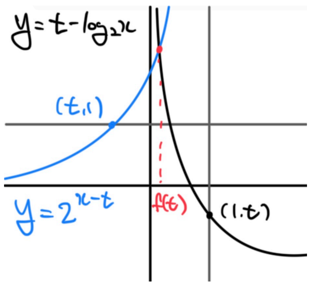
24학년도 6월 모의고사 - 수학

21) 수학1 - 지수함수와 로그함수

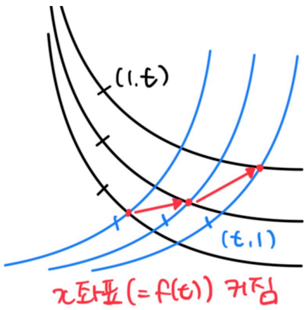
문제부터 이해하고 풀어보자. ⟨보기⟩의 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 문장이 각각 맞으면 뭔가가 더해지고, 틀리면 더해지지 않는 것이다. 예를 들어서 ㄱ이 맞고 ㄴ, ㄷ이 틀리다면 답은 $A(100)+B(0)+C(0)=100$이 되는 것이다. ㄱ, ㄴ이 틀리고 ㄷ만 맞다면 답은 $A(0)+B(0)+C(1)=1$이 된다. 각 자리수에 들어갈 수 있는 수의 경우의 수가 2가지(0 혹은 1)이므로, 정답은 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$의 8가지(실은 000을 제외한 7가지)중 하나인 것이다.

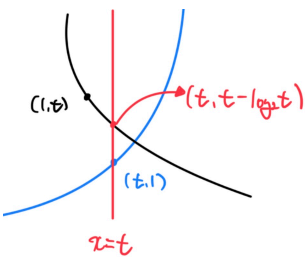
지수함수와 로그함수의 교점의 x좌표를 $f(t)$로 설정한 것을 보니, x좌표는 t에 따라 달라지는 것인가보다. 예시 그림을 그려서 확인해보자.
로그함수에서는 $(1,t)$점이, 지수함수에서는 $(t,1)$ 점이 중요함은 이미 알고 있으므로 t를 움직여가면서 함께 표시해보자. 왼쪽의 그림들로 문제의 상황을 잘 이해했다면 좋겠다. 각각 $t>0$, $t<0$일 때의 그림이다.





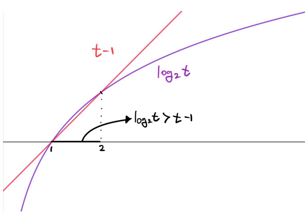
ㄱ. 그냥 대입해서 확인해보자. $f(t)=1$은 $t=1$일 때 두 그래프의 교점의 x좌표가 1임을 의미한다.
$t=1$일 때 두 식은 $1-\log_2 x$, 2^{x-1}으로, 모두 $x=1$일 때 그 값이 1로 같다.
$t=1$일 때 두 식은 $2-\log_2 x$, 2^{x-2}으로, 모두 $x=2$일 때 그 값이 1로 같다.
따라서 ㄱ은 맞는 말이고, $A=100$이다.





ㄴ. 사실 직관적으로 파악해야 하는 부분이다. t가 아주 작을 때부터 살금살금 크게 조정해보면서 $f(t)$(교점의 x좌표)가 커짐을 파악해보자. t가 커질수록 지수함수의 함숫값은 작아지고, 로그함수는 위로 이동하므로 더 나중(더 오른쪽)에 만나는 것이 당연해 보인다. 따라서 ㄴ은 맞는 말이고, $B=10$이다.

ㄷ. 필자는 $f(t)\ge t$를 '두 함수의 교점의 y좌표가 1보다 크거나 같음'이라고 해석했다. 지수함수는 $x=t$일 때 함숫값이 1이고, 그것보다 $f(t)$(x좌표임을 항상 기억하자)이 크다면 지수함수의 함숫값이 1보다 커야 하기 때문이다. 따라서 두 함수의 교점이 $y=1$ 아래에 생길 수 있는가를 골똘히 고민했다.
왼쪽의 그림을 그려본 결과 알아낸 것은, $t>2$일 때는 확실히 $f(t)\ge t$라는 것이다. $x=t$일 때 로그함수의 함숫값 $t-\log_2 t$가 1보다 크다고도 생각해볼 수 있겠다. 근데 이 말은 꼭 $t>2$일 때뿐만이 아니라 항상 성립해야 하는 것 아닐까? 로그함수는 감소함수이고 지수함수는 증가함수이므로 그림과 같이 $t-\log_2 t\ge 1$이면 $f(t)\ge t$가 된다. 그래서 이제는 $t-\log_2 t\ge 1$를 판단해보기로 하자.

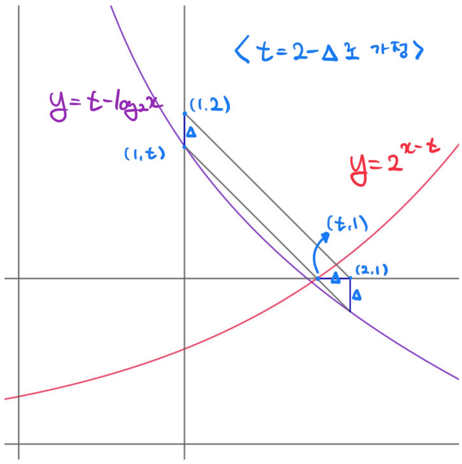


$t-\log_2 t\ge 1$를 적당히 이항하면 $t-1\ge \log_2 t$가 되는데, 좌표평면상에 두 그래프를 그려보면 $1<t<2$일 때 $t-1<\log_2 t$이다. 따라서 '모든' 양의 실수 t에 대해서 $f(t)\ge t$라고 볼 수 없고, ㄷ은 틀린 말이다. $C=0$이다.

정답은 $A(100)+B(10)+C(0)=110$이다.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

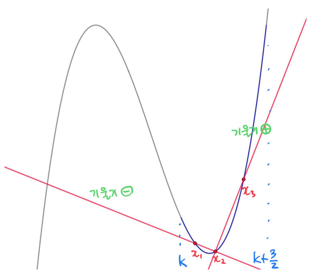
* 특히 ㄷ을 풀 때 돌아갈 수밖에 없는 것 같다. 이것저것 생각해보며 참/거짓을 판단해야하기 때문에, 실전에서는 가장 어려운 문제였을 것이다. 필자도 떨리는 순간에 이 문제를 풀 수 있겠냐고 한다면… 아마 정말 어렵게 풀어낼 것이다.



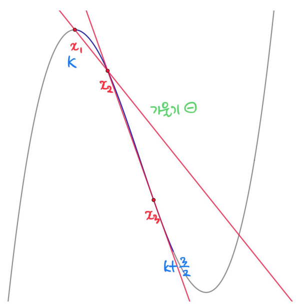
*참고로, 로그함수의 $(1,t), (2,t-1)$을 잇는다면 $1 < t < 2$에서 두 함수의 교점의 y좌표가 1보다 작다. 그러나 이 점을 그리겠다는 발상을 하기 몹시 힘들고, 필자가 다시 풀어볼 때에도 그렇게 안 풀고 본 해설처럼 풀었으므로 본 해설처럼 풀이하였다.

22) 수학2 - 평균변화율의 정의 & 그래프 개형 추론

$f(x) = x^3 - 2ax^2$를 보자마자 '0에서 접하고 $2a$에서 절편'이 떠올라 왼쪽과 같은 그림을 그렸다면 좋겠다. 우선은 $a > 0$인 상황에서의 그래프가 먼저 떠오르므로 이 그래프를 토대로 상황을 더 이해해보고, 아니면 그때 $a < 0$의 그래프를 그려보자.



'열린 구간 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$에 $\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$을 만족하는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 있음'을 '구간 안 어떤 세 점을 잡았을 때 세 점으로 만들어지는 세 직선 중 두 개의 기울기가 부호가 반대이다'로 읽어야 한다. 예를 들어 구간 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$가 다음과 같이 생긴다면 다음과 같이 세 점과 두 직선을 그어 기울기의 부호가 반대가 되게 할 수 있으므로 이때의 k값은 조건을 만족시킨다.



이번에는 안 되는 경우를 살펴보자. 왼쪽과 같이 $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$가 생긴다면 이 구간 안에 아무런 세 점을 잡아도 두 직선의 기울기의 부호가 반대가 될 수 없다(항상 두 직선의 기울기의 부호가 같다).

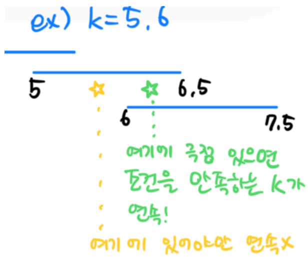
되는 경우와 안 되는 경우는 뭐가 달라서 차이가 발생한 것일까? $\left(k, k+\dfrac{3}{2}\right)$안에 극점이 있으면(있어야) 조건을 만족시킬 수 있다.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

여러 가지 예시들을 생각해보며 상황을 이해해보자. 그 결과 다음의 몇 가지를 추론하거나 알아낼 수 있다.

$x = 0$일 때는 확실하게 극점이 존재하므로 이 조건을 만족시키는 정수 k가 하나 보이는데, 바로 $k = -1$이다. 왼쪽 그림과 같이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에는 극점이 하나 존재한다. 이제 나머지 k들의 곱은 12가 되어야 한다.

수적인 감이 좋은 수험생이라면 12가 꽤나 작은 수라는 사실을 눈치챌 수 있을 것이다. 12를 정수들의 곱으로 나타내려면 3와 4, 2와 6, 1와 12뿐(물론 2, 2, 3의 조합도 있겠다)이므로 한두 개만 더 찾아내면 끝일 것이라는 예상을 할 수 있다.



또한 조건을 만족하는 k가 웬만하면 연속하는 정수들일 것임을 추론할 수 있다. 왼쪽과 같이 두 개의 구간들을 생각한다면 구간의 길이가 1보다 크므로 겹치는 부분이 반드시 존재하고, 그 부분에 극점이 존재한다면 조건을 만족하는 k는 연속하게 된다. 따라서 $-1,3,4$ 혹은 $-1, -4, -3$의 조합이 유력하다.

위의 도식화를 힌트삼아 아래 내용들을 이해해보자.

지금까지 그려온 $a > 0$인 상황에서 $k = 3,\ k = 4$가 조건을 만족하도록 a의 값을 구해보자. 이 함수의 극솟값은 $x = \frac{4}{3}a$일 때 나오므로 두 구간 $\left(3, \frac{9}{2}\right), \left(4, \frac{11}{2}\right)$이 겹치는 부분인 $\left(4, \frac{9}{2}\right)$ 안에 $\frac{4}{3}a$가 있어야 하고, $4 < \frac{4}{3}a < \frac{9}{2}$이다. 그런데 이 방정식을 만족시키는 정수 a가 없으므로 이 경우($k = 3,\ k = 4$)는 틀렸다.

아까 유력하다고 한 다른 경우 $k = -4,\ k = -3$를 생각해보자. 이 경우에는 그래프가 왼쪽과 같이 그려지고, 전과 같은 방법으로 두 구간이 겹치는 부분인 $\left(-3, -\frac{5}{2}\right)$ 안에 $\frac{4}{3}a$가 있어야 한다. $-3 < \frac{4}{3}a < -\frac{5}{2},\ -\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$을 만족하는 정수 a는 -2뿐이다. 다른 경우들도 마찬가지의 방법으로 틀렸음을 납득해보자.
$f(x) = x^3 + 4x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x$이므로 $f'(10) = 380$이다.

풀이의 흐름을 정리해 보자면
1. 그래프를 그리면서 문제에서 말하고자 하는 바 이해하기
2. 어떻게 하면 조건을 만족할 수 있을 지 고민하기
3. 예시를 많이 들어가며 사실들 알아내기(혹은 추론하기)
4. 조건의 내용을 식에 담아 범위 추론하기

가 되겠다.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

<미적분>

23) 미적분 - 수열의 극한

$\infty - \infty$꼴의 극한은 유리화하면 좋은 일이 있음은 이미 알고있다. 따라서 문제의 극한을 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n})\times\dfrac{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{(\cancel{n^2}+9n)-(\cancel{n^2}+4n)}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{1+\cancel{\frac{9}{n}}^{\to 0}}+\sqrt{1+\cancel{\frac{4}{n}}^{\to 0}}} = \dfrac{5}{2}$로 계산할 수 있다. 정답은 5번.

24) 미적분 - 매개변수로 정의된 함수

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$로 간주해 식을 써보자. 주어진 두 식을 각각 t에 관해서 미분하면 $\dfrac{dx}{dt} = 5\dfrac{\cancel{t^2}+1\cancel{-t(2t)}^{-t^2}}{(t^2+1)^2} = 5\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}, \dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{2t}{t^2+1}$이다(계수는 덜렁덜렁 달고 다니지 말고 앞으로 빼서 곱해주는 것이 팁이다). 따라서 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\frac{2t}{\cancel{t^2+1}}}{5\frac{1-t^2}{(t^2+1)^{\cancel{2}}}} = \dfrac{6t(t^2+1)}{5(1-t^2)}$이고, $t=2$를 대입하면 답은 −4이다. 정답은 4번.

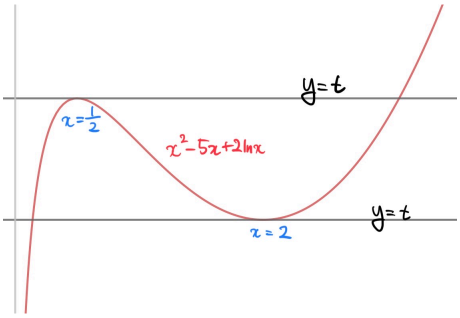
25) 미적분 - 지수함수의 극한

$\dfrac{0}{0}$꼴의 부정형임이 보인다. 분모가 0(1−1)로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 하고, $2^b-8=0, b=3$을 구할 수 있다. 이제 문제의 극한을 $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{ax+3}-8}{ax\cancel{+3-3}}\times\dfrac{ax}{2^{3x}-1} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2^{ax+3}-8}{ax}\times\dfrac{3x}{2^{3x}-1}\times\dfrac{a}{3}$로 변형하면 미분계수×미분계수×상수 꼴이 된다. (2^{x+3}의 $x=0$에서의 미분계수)×(2^x의 $x=0$에서의 미분계수의 역수)×$\dfrac{a}{3}$로 저 극한식을 해석하면 극한값은 $2^{\cancel{3}}\cancel{\ln 2}\times\dfrac{1}{\cancel{\ln 2}}\times\dfrac{a}{3} = \cancel{16}^{2}$이고, $a=6$이다. 따라서 답은 $6+3=9$이고, 정답은 1번.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

26) 미적분 - 미분과 그래프 그리기

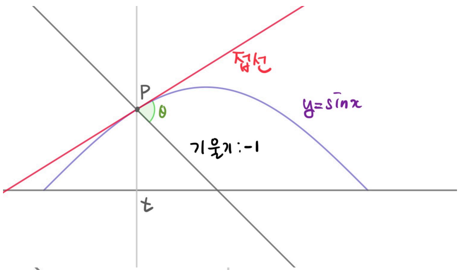
이 방정식을 그래프의 관점(방정식의 근의 개수가 그래프의 교점의 개수와 같음)에서 해석해야 한다. 방정식을 풀만한 좋은 방법이 보이지 않기 때문이다.
우변의 그래프는 상수함수이므로 좌변만 분석해보자. 정의역은 $\{x\,|\,x > 0\}$이므로 y축 오른쪽만 보면 되겠다. 그래프를 그리기 위해 x에 대해서 미분해보면 $2x-5+\frac{2}{x} = \frac{2x^2-5x+2}{x} = \frac{(2x-1)(x-2)}{x}$가 되므로 그래프는 왼쪽과 같다.



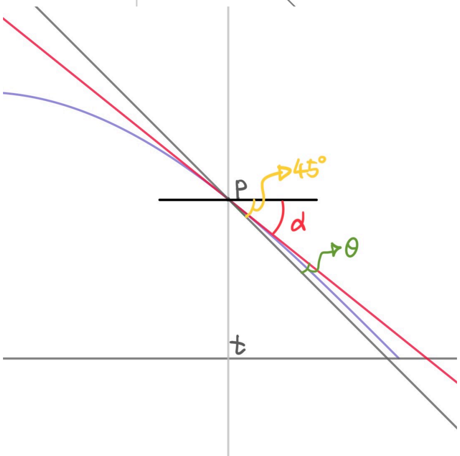
두 그래프의 교점의 개수가 2개인 경우는 다음 두 가지이고, 각각의 y좌표(그게 t이다)는 $\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+2\ln\frac{1}{2}$,$4-10+2\ln 2$이다. 따라서 답은

$\cancel{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}}^{-\frac{9}{4}}+\cancel{2\ln\frac{1}{2}}+\cancel{4-10}^{-6}+\cancel{2\ln 2} = -\frac{9}{4}-6 = -\frac{33}{4}$이다.
정답은 2번.

27) 미적분 - 삼각함수의 덧셈정리와 극한 계산



'실수 $t(0 < t < \pi)$에 대하여 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $P(t, \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ'를 읽으며 왼쪽과 같이 그림을 그려서 예시를 확인할 수 있다. 이제 $t \to \pi-$일 때를 확인해보자.



$0 < t < \pi$일 때 접선의 기울기는 항상 -1보다 크므로(완만하므로) $t \to \pi-$일 때는 이런 상황을 상상할 수 있겠다. 이때 α를 그린다면 α와 접선의 기울기가 큰 연관이 있고, $\alpha + \theta = 45°$이 성립하게 된다. α를 예각으로 설정하는 것이 팁이다.
$y' = \cos x$이므로 접선의 기울기는 $\cos t$인데, α를 통해서 설명하면 $\cos t = -\tan\alpha$(α는 예각인데 $\cos t$가 음수이므로 -를 붙혀야 한다)가 된다. 이제 $\tan\theta - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$을 사용하면 $\tan\theta$를 t를 사용하여 표현할 수 있겠다. $\tan\theta = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$($\tan\frac{\pi}{4}=1$) $= \frac{1+\cos t}{1-\cos t}$이므로 구하고자 하는 극한은

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(\pi-t)^2} \times \frac{1}{\cancel{1+\cos t}^{\to 2}} = \lim_{p\to 0+}\frac{1-\cos p}{p^2} \times \left(\frac{1}{2}\text{로 수렴할 운명인 것들}\right)$$

($\pi - t = p$로 치환하였고, $\cos(\pi-p) = -\cos p$이다) $= \frac{1}{4}$이다. 답은 3번.

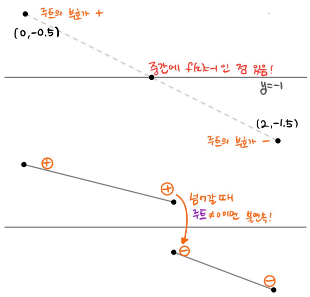
24학년도 6월 모의고사 - 수학

28) 미적분 - 복잡한 초월함수와 합성함수

복습 : 구조가 완전히 같은 식의 대입 꼴 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, $a\beta^2 + b\beta^2 + c = 0$의 두 식이 성립한다면 이것을 두고 '$\alpha, \beta$가 x에 대한 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근'임을 알아낼 수 있다. 이 발상을 하는 이유는 근과 계수의 관계를 사용하여 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$를 얻어낼 수 있기 때문이다.

(가) 조건을 읽으면.. 무언가 들어오는 게 없다. 어쩌라는 건지 전혀 감이 잡히지 않는다. (나) 조건에서 $f(0), f(2)$에 대한 식을 제시했으니 (가)에 대입이라도 해봐야겠다. $\begin{matrix}\{f(0)\}^2 + 2f(0) = a + b \\ \{f(2)\}^2 + 2f(2) = a + b\end{matrix}$의 두 식을 보니까(조금은 힘들겠지만 고1때 배운 지식을 살려서) '$f(0), f(2)$가 x에 대한 방정식 $x^2 + 2x = a + b$의 두 근'이라는 점이 떠오른다. 근과 계수의 관계에 따라 $f(0) + f(2) = -2$, $f(0)f(2) = -(a + b)$ 를 알아낼 수 있다. 이 식과 (나)의 $f(0) = f(2) + 1$을 연립하면 각각을 구할 수 있겠다. 둘이 합하면 -2인데 하나($f(2)$)가 나머지($f(0)$)보다 1 크다면 합(-2)를 절반 나눠서(-1) 한쪽에는 0.5를 더해주고 한쪽에는 0.5를 빼주면 차이가 1이 된다. $f(2) = -1.5$, $f(0) = -0.5$임을 ('차'의 의미를 응용한) 암산으로 구한 것이다. 또한 $f(0)f(2) = \frac{3}{4}$, $a + b = -\frac{3}{4}$도 구했다.

필자는 여기까지는 순조롭게 구하였으나 그 후에는 길을 찾지 못하였다. 아직 사용하지 않은 조건이 있나 살펴보던 중 '$f(x)$는 연속함수'라는 말을 충분히 활용하지 않음을 깨닫고 함수식을 작성해보기로 하였다. (가)에서 주어진 식을 $f(x)$에 대한 방정식처럼 생각하면 양변에 1을 더해(좌변을 완전제곱식으로 만듦) 루트를 씌우고(좌변이 $f(x) + 1$이 됨) 1을 빼 $f(x) = -1 \pm \sqrt{a\cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b + 1}$을 얻었다.



이 값은 항상 양수 혹은 0고, $f(0) > -1 > f(2)$이므로 왼쪽과 같이 점을 찍을 수 있고, $f(0)$은 이게 +이고 $f(2)$는 이게 -인 경우임을 알 수 있다.
$f(0)$에서 $f(2)$로 넘어갈 때(즉, $0 < x < 2$일 때) 이게 +에서 -로 바뀐 순간이 있다는 의미인데, 그때는 이 부분이 0이 되어야만 $f(x)$가 연속함수일 수 있다. 왼쪽처럼 루트 앞의 부호가 바뀔 때 이 부분이 0이 아니라면 바뀌는 순간에 불연속점이 생긴다. 따라서 이 부분의 최솟값은 0이다. 혹은 중간값 정리를 사용해서 구간 $(0,2)$에서 $f(x) = -1$(루트가 0임과 같다)인 점이 반드시 생기므로 루트의 최솟값이 0이라고 구해도 된다.

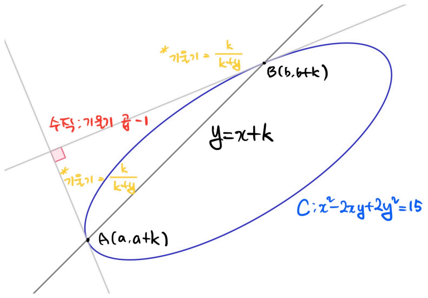
$f(x)$의 식을 작성하여 몇 단계의 추론을 해본 결과 루트 안의 최솟값이 0이 되어야 함을 알아냈다. 그렇다면 x가 얼마일 때 루트 안이 최소일까? $b + 1$은 상수이므로 고려 대상이 아니고, $\cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x}$만 따지면 된다. 미분을 해서 그래프를 상상해보자. 귀찮지만 한 번만 눈 딱 감고 미분하면 $\left(\cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x}\right)' =$
$-3\pi\cos^2 \pi x \sin \pi x e^{\sin^2 \pi x} + 2\pi \cos^4 \pi x \sin \pi x e^{\sin^2 \pi x}$

틈만 나면 인수분해하는 습관이 있길 바란다.

$= \pi\cos^2 \pi x \sin \pi x e^{\sin^2 \pi x}(-3 + 2\cos^2 \pi x)$이 되는데, 이것들은 항상 양수이므로 (이것이 0인) x가 정수일 때만 극값을 가지고, 최소가 될 수 있다. $0 < x < 2$일 때 루트가 최소인 순간은 $x = 1$일 때이고(그때만이 x가 정수여서 유일한 후보이다), 최솟값은 $-a \times 1 + b + 1$이다. $-a + b + 1 = 0$을 얻었고, 아까 구해둔 $a + b = -\frac{3}{4}$와 연립해서 $b = -\frac{7}{8}$, $a = \frac{1}{8}$을 얻을 수 있다. 따라서 답은 $-\frac{7}{64}$이고, 정답은 2번이다.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

29) 미적분 - 음함수의 기울기



$A(a, a+k)$, $B(b, b+k)$를 보자마자 'x좌표에 k를 더한 것이 y좌표'라는 규칙이 보였다. 따라서 A, B를 왼쪽의 직선 위의 두 점이라고 이해할 수 있고, 이 직선과 C가 만나는 두 점에서 C의 접선이 수직(기울기의 곱이 -1)한다고 상황을 이해했다. $y = x + k$와 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$를 연립하면 나오는 두 x가 각각 a, b인 것이다.

문제에 대한 이해를 해봤고, 접선의 기울기가 등장하므로 미리 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$(음함수로 간주)를 미분해두자.

$2x - 2y - 2xy' + 4yy' = 0$, $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$ 를 구했는데, 우리는

$x = a, b$일 때 $x - y = -k$임을 이미 알고 있다! $x = a, b$일 때

$y = x + k \rightarrow x - y = -k$ 가 성립하므로 $y' = \dfrac{-k}{-k-y} = \dfrac{k}{k+y}$(언제까지나 $x = a, b$일 때만임을 유의하자)가 성립한다. 따라서 이 말을 '두 도형이 만나는 점의 y좌표를 여기에 각각 대입해 곱하면 -1'로 다시 이해할 수 있겠다.

그러면 이젠 (두 교점의)y값을 k를 사용해서 표현하기만 하면 되겠다. $x = k - y$를 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$에 대입해도 되겠지만, $x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2$임이 보인다면(이미 $x - y$를 한번 분석했으므로 생각해내기가 비교적 쉽다)

$k^2 + y^2 = 15$, $y = \pm\sqrt{15 - k^2}$를 더 쉽게 구할 수 있다. 이제 $y' = \dfrac{k}{k+y}$에 대입하면 $\dfrac{k}{k+\sqrt{15-k^2}} \times \dfrac{k}{k-\sqrt{15-k^2}} = -1$,.

$\dfrac{k^2}{k^2-(15-k^2)} = \dfrac{k^2}{2k^2-15} = -1$,(분모를 합차공식을 이용해 계산)

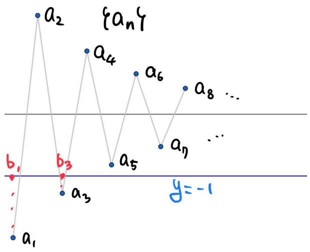
$k^2 + 2k^2 - 15 = 0$,(-1배 관계라는 것은 더해서 0이라는 것이다)$3k^2 = 15$, $k^2 = 5$이다. 따라서 답은 5.

24학년도 6월 모의고사 - 수학

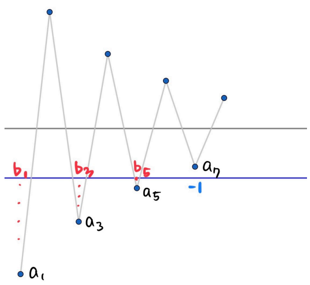
30) 미적분 - 급수 + 수학1 - 수열 정의하기

수열 $\{b_n\}$을 'a_n이 -1보다 크면 똑같이, -1보다 작거나 같으면 -1로 대체'한 것으로 정의했으므로(두 줄로 되어있는 식을 해석한 것이다) $\{b_n\}$은 $\{a_n\}$을 바탕으로 만들어지는 것이다. 둘이 아주 비슷할 것이라는 추측을 해볼 수 있다. 두 개의 급수를 제시했는데 $\{b_n\}$을 홀수 번째들과 짝수 번째들로 나눠서 분석하겠다는 것과, 두 급수 모두 0이 아닌 값으로 수렴하므로 $\{a_n\}$은 음수와 양수가 반복되는(곧, 공비가 음수인) 수열이며, 그 공비는 -1과 1 사이일 것임을 파악할 수 있다. 또한 $b_3 = -1$이므로 $a_3 \le -1$이며, $\{a_n\}$을 수직선에 표현해보면 왼쪽과 같을 것이다. 식을 써가며 본격적으로 수열을 분석하지는 않았지만, 일단 눈에 보이는 단서들을 종합하면 이렇게 된다.

짝수 번째들의 급수가 수렴하므로 공비를 r로 두면 $|r^2| < 1$이다.



(나) 조건이 상대적으로 단순해 보이므로 먼저 생각해보자. $\{b_n\}$의 짝수 번째들은 모두 양수이며 $\{a_n\}$와 같으므로 $a_1 = a$, (공차) $= d$로 두면 $\dfrac{ar}{1-r^2} = 8$, $ar = 8(1-r^2)$의 식을 구할 수 있다. (가) 조건을 통해서도 하나의 식을 더 얻어냈으면 좋겠다.



$\{b_n\}$의 홀수 번째들은 모두 음수라서, $\{a_n\}$과 같을 수도 있고 -1로 대체되었을 수도 있다. 과연 몇 개가 대체된 것일까? 우선 $a_3 \le -1$이므로 $a_1 \le -1$(a_3보다도 절댓값이 커서 -1보다 당연히 작아야 한다)이고, $b_1 = b_3 = -1$(최소 2개가 대체됨)은 보장되어있다. 만약 하나가 더 -1로 대체되었다면(그것은 b_5가 될 것이고,) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + \cdots = -1 - 1 - 1 + $(음수 쪼가리들)은 절대 -3이 될 수 없다. 따라서 $b_5 = a_5 > -1$이어야 한다. 이를 a, r을 통해 나타내면 $ar^2 \le -1 < ar^4$가 된다. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = b_1 + b_3 + (b_5 + \cdots)$ $= -2 + \dfrac{ar^4}{1-r^2} = -3$, $ar^4 = -(1-r^2)$이다. 이 식과 연립해서 우변을 같게 만들어서 좌변이 서로 같다고 식을 세우면 $\dfrac{ar}{8} = -ar^4$, $r^3 = -\dfrac{1}{8}$, $r = -\dfrac{1}{2}$가 된다. 여기에 대입하면 $-\dfrac{1}{2}a = 8 \times \dfrac{3}{4} = -6$, $a = 12$도 구할 수 있다.

$\{a_n\} = \{-12, 6, -3, \cdots\}$, $\{|a_n|\} = \{12, 6, 3, \cdots\}$을 알아냈고, 이는 초항이 12이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 정답은 $\dfrac{12}{1-1/2} = 24$이다.