제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3) = 60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1 \ (n \geq 2), \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$$

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

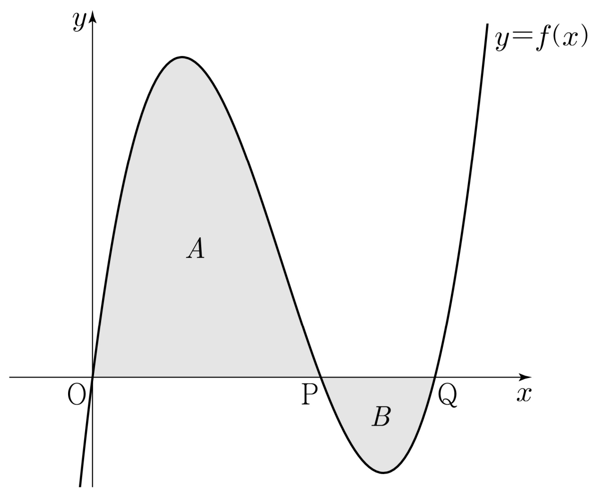
$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q($\overline{OP} < \overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이}) - (B\text{의 넓이}) = 3$$ ⇒ 정적분

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



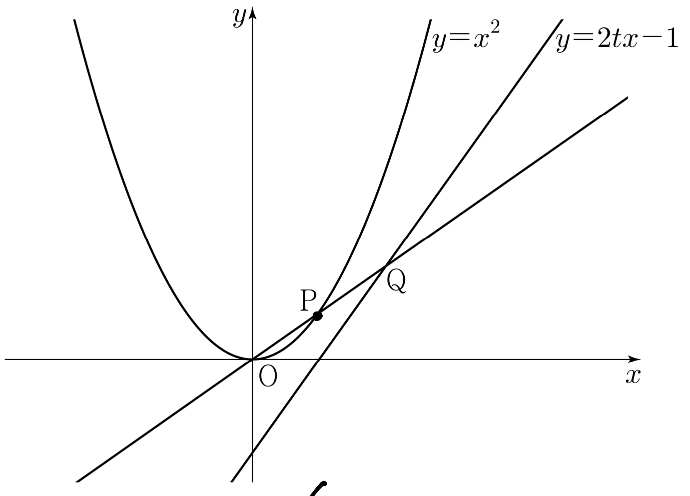
$$\int_0^3 f(x)dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx = k\int_0^3 x^3-5x^2+6x\,dx$$
$$= k \cdot \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4}k = 3$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$P=(p, p^2)$이라 하면 $2p=2t$ ($\because$ 거리 최소)

직선 OP의 방정식은 $y=tx$ 이므로

Q의 x 좌표는 방정식 $tx=2tx-1$ 의 해 $\frac{1}{t}$

점 P와 Q의 x좌표 차가 $\frac{1}{t}-t$ 이므로

$\overline{PQ}=\left(\frac{1}{t}-t\right)\sqrt{t^2+1} = \frac{(1-t^2)\sqrt{t^2+1}}{t}$ ($\because$ 피타고라스 정리)

$\therefore \lim_{t\to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} = \lim_{t\to 1-} \frac{(1+t)\sqrt{t^2+1}}{t} = 2\sqrt{2}$

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n \ge 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

⇒ 가능한 d 찾기 (노가다)

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$A=\{-4-d, -4, -4+d, -4+2d, -4+3d\}$

$B=\{-8-d, -8+d, -8+3d, -8+5d, -8+7d\}$

a_n은 공차가 d고 b_n은 공차가 2d

⇒ 3개가 같으려면 $\{a_1, a_3, a_5\} = \{$B에서 연속 3개$\}$

(이걸 생각하고 case를 찾아야 지성인이다)

i) $-4-d=-8+d \Rightarrow d=2$

집합을 써보고 확인해보면 좋지만 귀찮으니 pass

$a_{20}=-4+18d=32$

ii) $-4-d=-8+3d \Rightarrow d=1$

$a_{20}=-4+18d=14$

이거 둘밖에 안 됨

13. 그림과 같이 그림을 더럽게 준 건 낚시다.

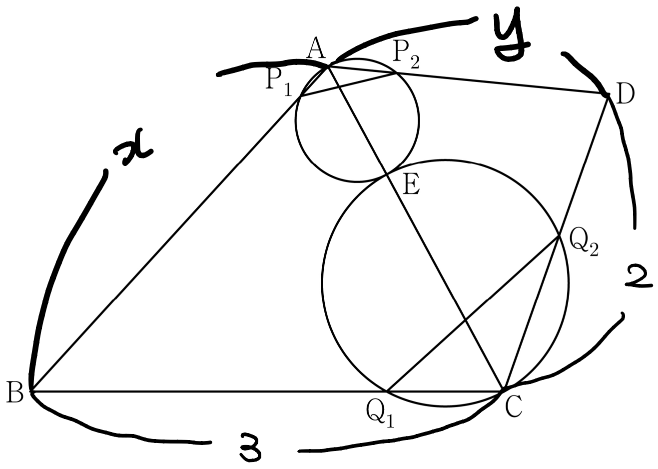
$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]

$x:=\overline{AB}$

$y:=\overline{AD}$



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$\overline{AC}=6R$이라 하자

$\overline{Q_1Q_2}=4R\sin\angle Q_1CQ_2=\frac{8\sqrt{2}}{3}R$ 이므로

$\overline{P_1P_2}=\frac{8}{5}R=2R\sin\angle P_1AP_2$

$\Rightarrow \sin\angle P_1AP_2=\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}xy\sin\angle P_1AP_2=\frac{1}{2}xy\cdot\frac{4}{5}=2$

$\therefore xy=5$

코사인 법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cos\angle DAB$

$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos\angle BCD$

$\Rightarrow x^2+y^2=11$

$x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=21$

$\therefore x+y=\sqrt{21}$

14. 실수 $a\,(a\ge 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$v(t)$의 부호가 $t>0$에서 1번만 바뀜

$\Rightarrow a=1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ (a=0이어도 되는데 누가 봐도 적분이 음수라 out)

i) $a=1$

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$ 계산하기 귀찮으니 평행이동 해준다.

$\Delta x=\int_0^2 v(t)dt=\int_{-1}^{1}-(t-1)t^2(t+1)dt$

$=-2\int_0^1 t^4-t^2dt=\frac{4}{15}$

ii) $a=\frac{1}{2}$

$v(t)=-t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$

$\Delta x=\int_0^2 v(t)dt=-\frac{11}{15}$ 사실 얘도 누가 봐도 음수지만 성의로...

$\therefore \max\{\Delta x \mid a=0,\frac{1}{2},1\}=\frac{4}{15}$

참고 : 집합 S에 대하여 max S 는 S의 원소 중 최댓값

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

노가다가 가능한 범위

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

$a_1 = k > 0$

$a_2 = k - 2 - k = -2 \le 0$

$a_3 = -2 + 2\cdot 2 - k = 2 - k$

$2 - k + 6 - k$

$k \ne 2$ $a_3 = 2 - k$

$2 - k \le 0 \Rightarrow k \ge 2$ $2 - k > 0 \Rightarrow k = 1$

$k \ne 4$ $a_4 = 8 - 2k$ $a_4 = -4 - 2k = -6$

$8 - 2k \le 0$ $8 - 2k > 0 \Rightarrow k = 3$

$a_5 = 1$

$a_5 = 16 - 3k$ $a_5 = -3k$

$k \ge 6$ $k = 5$

$a_6 = 10 - 4k$ $a_6 = -10$

$a_6 = 26 - 4k$ $a_6 = -14$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$26 - 4k > 0$ OK OK X

$k = 6$ $k = 5$ $k = 3$

$6 + 5 + 3 = 14$

단답형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
>
> (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

⇒ $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$

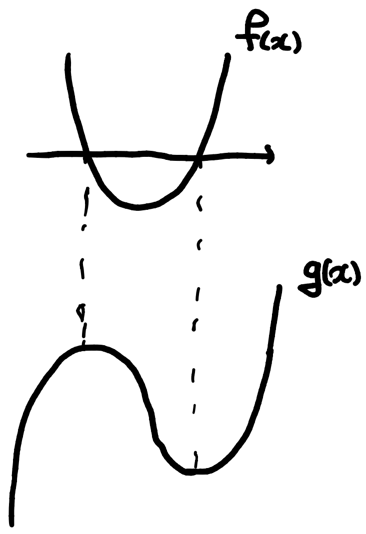
최고차항 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

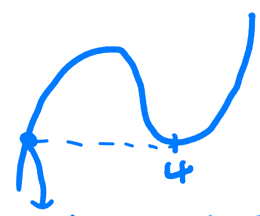
> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

$x=4$에서 극소고

$g(3)=0$일 거라는 추측

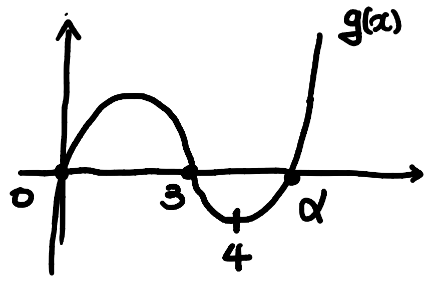


⇒



얘가 1보다 작으면 OK

⇓



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-\alpha)$

$g'(4)=f(4)=0 \Rightarrow \alpha=\frac{24}{5}$

$g'(x)=f(x)=(x-4)(x-\frac{6}{5})$

$\therefore f(9)=5(9-\frac{6}{5})=45-6=39$

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

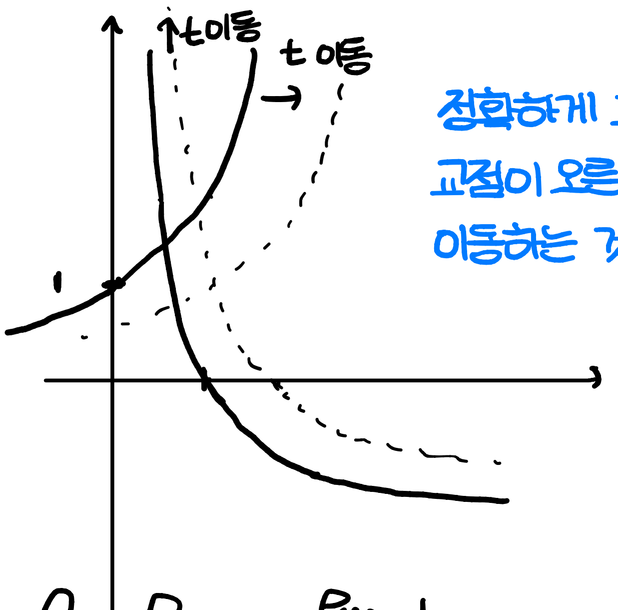
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

$t-\log_2 f(t) = 2^{f(t)-t}$

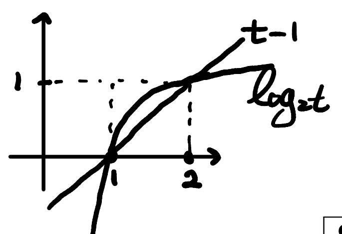
ㄱ. 대입해보면 참이다. $\Rightarrow A=100$

ㄴ. 그림을 그려보면 당연하다. $\Rightarrow B=10$



정확하게 그리진 않았지만
교점이 오른쪽으로
이동하는 것은 자명하다

ㄷ. $\log_2 f(t)+2^{f(t)-t}$에 대하여
$f(t)=t$라고 하면 $t\geq 2$에서
$\log_2 t+1\leq t$이므로 $f(t)\geq t$이다.
$1<t<2$에서
$\log_2 t+1>t$이므로 $f(t)<t$이다.
($\log_2 t$가 위로 볼록이므로)



$1<t<2$가 반례가 된다
$\Rightarrow C=0$

$\therefore A+B+C=110$

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $f(x)$에 대하여
$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

발문해석: 어느 한 점과 다른 두 점 사이의 기울기 부호가 다르다.

※ x_1, x_2, x_3의 대소관계는 신경 쓸 필요가 없다.

$(k, k+\frac{3}{2})$에 극점이 존재한다.

* 왜 그런지 모르겠으면 구간에 극점이 없을 때를 생각해볼 것.

i.e., $0\in(k, k+\frac{3}{2}) \Rightarrow k=-1$

$\frac{4a}{3}\in(k, k+\frac{3}{2}) \Rightarrow k=3, 4$
$\Rightarrow \frac{4a}{3}\in(4, \frac{9}{2})$
or
$k=-3, -4$
$\Rightarrow \frac{4a}{3}\in(-3, -\frac{5}{2})$

$\frac{4a}{3}\in(4, \frac{9}{2})$인 정수 a는 없고
$\frac{4a}{3}\in(-3, -\frac{5}{2})$인 정수 $a=-2$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2$, $f'(x)=3x^2+8x$

$\therefore f'(10)=380$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.