(요약) 수열

1. $a_n = S_n - S_{n-1}$

→ n이 1부터 성립하려면 $S_0 = 0$

2. 점화식 [$S_{n+1} - S_n$ or $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 의 형태
주어진 식 자체를 변형

3. 등차수열에서 S_n이 주어졌을때 a_n 빠르게 구하기

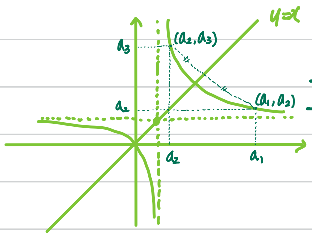
$$a_n = (S_n)' - \frac{1}{2}d$$

4. $a_{n+p} = f(a_n)$, $f(x) = f^{-1}(x)$

→ 주기가 2P형태의 수열. ($\because a_n = f(a_{n+p}) = a_{n+2p}$)

ex) $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $a_1 = 1$

$f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f(f(x)) = x$ (점근선의 교점이 $y=x$ 위에있음)

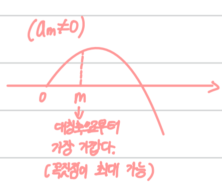


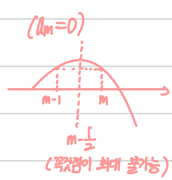
→ $a_1 = a_3$
→ $a_{n+2} = a_n$

5. 등차수열 합 분석

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

1) $a>0$, $d<0$





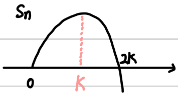
2) $a<0$, $d<0$

6. 등차수열 합 분석 심화

등차수열 a_n, 그 합 S_n이 있을 때

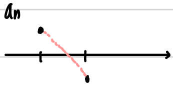
$S_n = an(n-k)$라 하자.

① k가 짝수



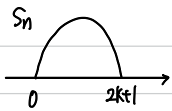
최대) 유일하게 존재

나머지 전부 대칭



} 부호 반대, 함숫값 대칭

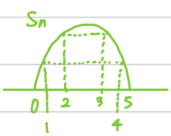
② k가 홀수



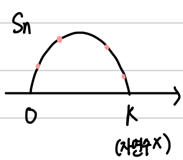
최대) 유일하지 않음.

나머지 전부 대칭

ex)



③ k가 이상한 숫자



→ 대칭X

$a_n \neq 0$

부호 반대, 절댓값 다름

연연하지말고 이연

7. 수열을 그래프로 분석하기

a_{n+1}이 a_n에 관한 식으로만 표현되어 있을 때, $a_{n+1} = f(a_n)$이라 생각해 그래프로 그려보기.

단, 식에 'n'이 포함되어 있으면 이 풀이는 적합하지 않음.

(수열의 경향 파악할 때도 효과적임)

8. 수열의 귀납적 추론

'나열'은 귀찮아도 계속 해본다는 마인드 가지기.

나열
- i) 기준이 되는 항을 알고 있는 경우 → 당연히 나열
- ii) 기준이 되는 항을 모르는 경우 → 수열의 규칙성 / 경향성을 파악해보기 위해 임의의 숫자를 대입해 하나씩 나열해보는 것도 나쁘지 않음.

수열 관찰
- i) 나열할 때 '각 항'의 범위
- ii) 주어진 조건에서 나올 수 있는 범위 관찰

ex) $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1 & (a_n \geq k) \\ \sim & (a_n < k) \end{cases}$ 인 경우 $a_n \geq k$에서 나올 수 있는 a_{n+1}의 범위는

$a_{n+1} \geq 2k+1$ 이다.

즉, 어떤 항에 대해 $a_{n+1} < 2k+1$ 이었다면, 그때의 a_n은 아래쪽 식을 통해 구해야 함.

(해설) 수열

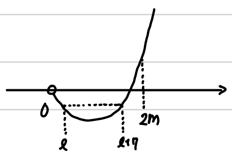
5, 6 등차수열 합 분석 - 관련문제 (2022 수특 , 문항번호 21008 - 0156)

첫째항이 -30이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. d와 S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) d는 $3 < d < 30$인 자연수이다.
(나) $|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 l, m이 존재한다.

$a_l + a_{l+7} + a_m$의 값을 구하시오. (단, $m > l+7$) 35

S_n의 그래프를 그려보자.



→ S_n의 대칭축이 $l+\frac{7}{2}$ 이므로,
$S_n = \frac{d}{2}n\{n-(2l+7)\}$ 이라고 할 수 있다.

→ $S_1 = \frac{d}{2}(-2l-6) = -30$ 이므로 $d(l+3) = 30$ 이다.
d와 l은 모두 자연수이므로, 이때 가능한 (d, l)의 순서쌍은 $(5, 3)$, $(6, 2)$가 있다.

i) $d=5$, $l=3$

$S_n = \frac{5}{2}n(n-13)$

$S_3 = -75$, $S_m = \frac{5}{2}\times m \times (m-13) = 75$.

이때 $m = 15$

ii) $d=6$, $l=2$

$S_n = 3n(n-11)$

$S_2 = -54$, $S_m = 3m(m-11) = 54$.

이를 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$\therefore$ $a_1 = -30$, $d = 5$

$a_l = a_3 = -20$

$a_{l+7} = a_{10} = 15$

$a_m = a_{15} = 40$

7. 수열을 그래프로 분석하기 - 관련 기출 (22학년도 9평 15번)

그래프로 그리면 역추적 할 때 직관적으로 이해하는 것에 도움이 될 것이다.

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

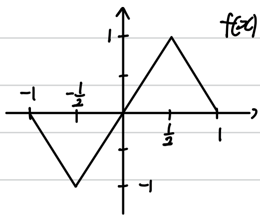
$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

V 1

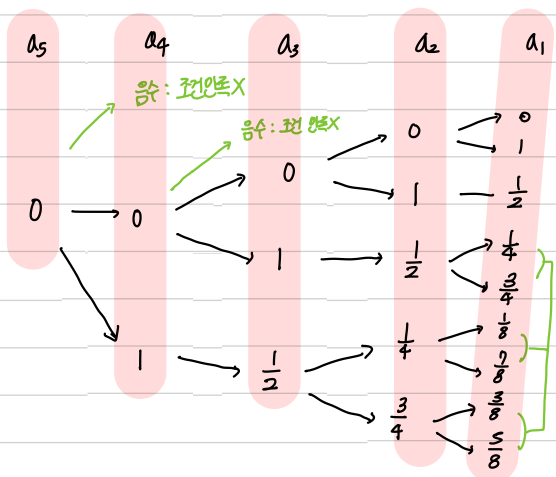
$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\frac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$



역추적하여 a_{n+1}이 한 번이라도 음수가 나오면 이후 a_n은 계속 음수,

a_{n+1}이 양수가 나오면 이후 a_n은 계속 양수이다.

$a_6 = -a_5 \Rightarrow f(a_5) = -a_5$: a_5는 $f(x)$와 $y=-x$의 교점 $\Rightarrow \therefore a_5 = 0$



각 항 안 구하고 대칭성 이용해 2개 합 1이다 라고 해도 됨.

$\therefore$ 가능한 a_1의 합은 $1 \times 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

연연하지말고 이연

8. 수열의 귀납적 추론 - 관련기출 (2023 시행 고3 4월 15번)

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

④

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

$a_{n+1} = f(a_n)$으로 표현하기 애매해서 그래프 안 그림

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

주어진 수열을 관찰해보자.

$a_n < 1 \rightarrow a_{n+1} > 0$ / a_{n+1}은 a_n과 별개로 확정

$a_n \geq 1 \rightarrow a_{n+1} = \log_2 a_n \geq 0$

즉, $n \geq 2$ 인 모든 n에 대하여 $\boxed{a_n \geq 0}$ 이다.

a_5의 범위에 따라 (나) 조건을 살펴보자

i) $a_5 < 1 \Rightarrow a_6 = 8$

이 경우 $a_5 = -7$ 이라 불가능하다.

ii) $a_5 \geq 1 \Rightarrow a_6 = \log_2 a_5$

$a_5 + \log_2 a_5 = 1$

→ 이를 만족시키는 $\boxed{a_5 = 1}$, $\boxed{a_6 = 0}$ 이다.

이제 역추적을 해 보자.

$a_4 < 1 \rightarrow a_5 = 2^2$ (X)

$a_4 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_4 = 1 \rightarrow \boxed{a_4 = 2}$

$\boxed{a_3 < 1} \rightarrow a_4 = 2^1$

$a_3 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_3 = 2 \rightarrow \boxed{a_3 = 4}$

i) $\boxed{a_3 < 1}$

$a_2 < 1 \rightarrow a_3 = 2^0 = 1$ (X)

$a_2 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_2 = a_3 \rightarrow a_2 = 2^{a_3} \rightarrow \boxed{1 \leq a_2 < 2}$ ($a_3 < 1$ 이용)

$a_1 < 1 \rightarrow a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (X)

$a_1 \geq 1 \rightarrow a_2 = \log_2 a_1 \rightarrow 1 \leq \log_2 a_1 < 2$

$\boxed{2 \leq a_1 < 4}$

ii) $\boxed{a_3 = 4}$

$a_2 < 1 \rightarrow a_3 = 2^0 = 1$ (X)

$a_2 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_2 = 4 \rightarrow \boxed{a_2 = 16}$

$a_1 < 1 \rightarrow a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (X)

$a_1 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_1 = 16 \rightarrow \boxed{a_1 = 2^{16}}$

$\therefore\ 2 \leq a_1 < 4$ or $a_1 = 2^{16}$

$m = 2$, $M = 2^{16}$

$\log_2 \frac{M}{m} = 15$