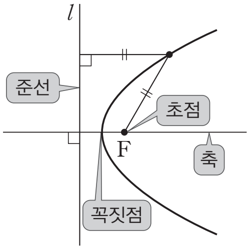
01 포물선

1. 포물선의 뜻

(1) 평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F에 이르는 거리와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.

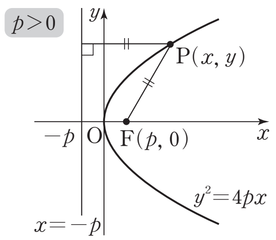
(2) 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라 한다. 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.

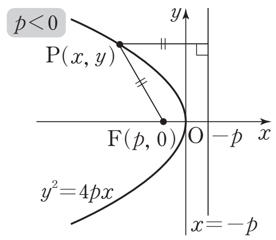


2. 포물선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

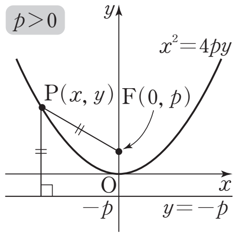
초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

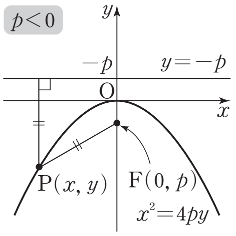




(2) 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)





설명 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

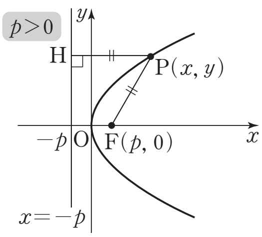
그림과 같이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2=4px$$



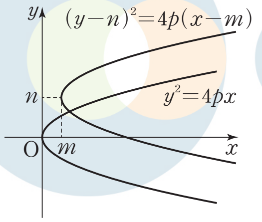
3. 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 두 포물선 $y^2=4px$, $(y-n)^2=4p(x-m)$의 초점, 준선, 꼭짓점은 다음과 같다.

방정식	$y^2=4px$	$(y-n)^2=4p(x-m)$
초점	$(p, 0)$	$(p+m, n)$
준선	$x=-p$	$x=-p+m$
꼭짓점	$(0, 0)$	(m, n)

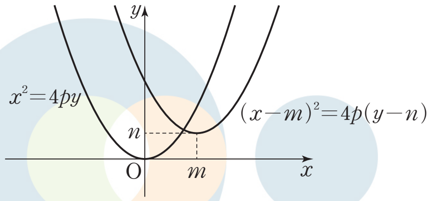


(2) 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n)$$

이다. 이때 두 포물선 $x^2=4py$, $(x-m)^2=4p(y-n)$의 초점, 준선, 꼭짓점은 다음과 같다.

방정식	$x^2=4py$	$(x-m)^2=4p(y-n)$
초점	$(0, p)$	$(m, p+n)$
준선	$y=-p$	$y=-p+n$
꼭짓점	$(0, 0)$	(m, n)



4. 포물선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 방정식을 각각 $y^2=4px$, $y=mx+n$ $(m\neq0)$이라 할 때, $y=mx+n$을 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

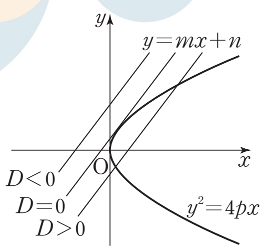
$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



5. 포물선의 접선

(1) 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ (단, $m\neq 0$)

설명 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq 0)$인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이를 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=4p(p-mn)=0$$

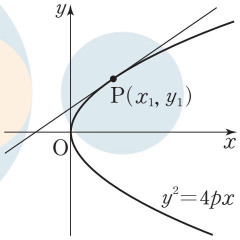
이다. 이때 $p\neq 0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\frac{p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$이다.

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$

설명 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$x_1\neq 0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq 0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

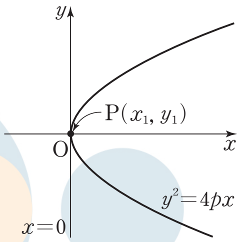
㉠과 ㉡은 같은 직선이므로 $-mx_1+y_1=\frac{p}{m}$

양변에 m을 곱해 얻은 m에 대한 이차방정식 $x_1m^2-y_1m+p=0$에서 $m=\frac{y_1\pm\sqrt{(-y_1)^2-4px_1}}{2x_1}$

이때 $y_1{}^2=4px_1$, 즉 $x_1=\frac{y_1{}^2}{4p}$이므로 $m=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}$ $(y_1\neq 0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{2p}{y_1}x-\frac{2p}{y_1}x_1+y_1$이고, $y_1{}^2=4px_1$이므로 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$



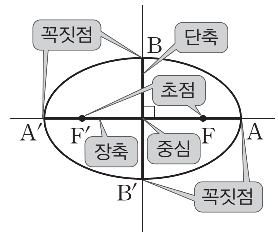
$x_1=0$일 때 $y_1=0$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 $x=0$이고, 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선이 y축 $(x=0)$이므로 $x_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

02 타원

1. 타원의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 타원의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 타원의 장축, 선분 BB′을 타원의 단축이라 하며, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 중심이라 한다.



2. 타원의 방정식

(1) 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식은

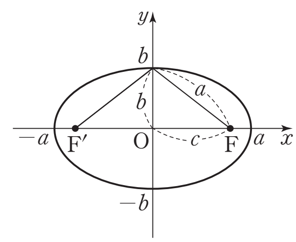
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } b^2=a^2-c^2,\ b>0)$$

① 장축의 길이: $2a$, 단축의 길이: $2b$

② 초점의 좌표: F$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, F′$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

③ 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



(2) 두 초점 F$(0,\ c)$, F′$(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식은

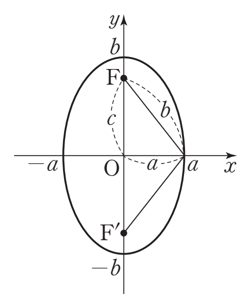
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a^2=b^2-c^2,\ a>0)$$

① 장축의 길이: $2b$, 단축의 길이: $2a$

② 초점의 좌표: F$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$, F′$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

③ 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



설명 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

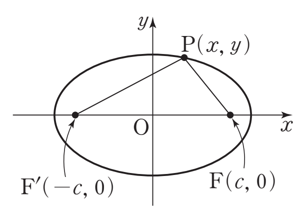
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2$이라 하면 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



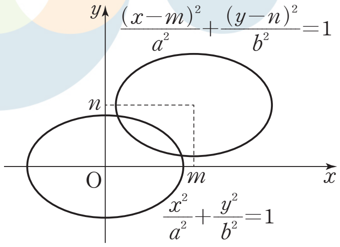
3. 타원의 평행이동

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 두 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표는 다음과 같다.

방정식	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$	$(\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$
꼭짓점	$(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$	$(a+m,\ n)$, $(-a+m,\ n)$, $(m,\ b+n)$, $(m,\ -b+n)$
중심	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$



참고 (1) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

(2) 타원을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 장축의 길이, 단축의 길이는 변하지 않는다. 즉, 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이고, 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$의 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$이다.

4. 타원과 직선의 위치 관계

타원과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

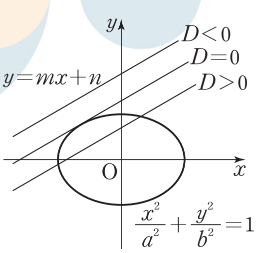
$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



5. 타원의 접선

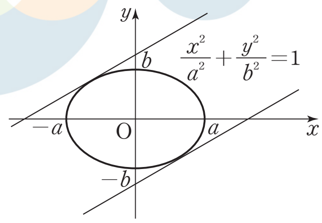
(1) 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

설명 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$



x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

이다. 이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로

$a^2m^2+b^2-n^2=0$, 즉 $n^2=a^2m^2+b^2$에서 $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

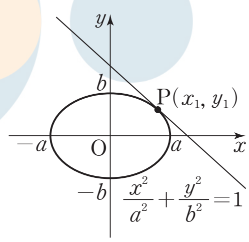
(2) 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

설명 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$



또 기울기가 m인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2+b^2$

$$(a^2-x_1{}^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-y_1{}^2=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

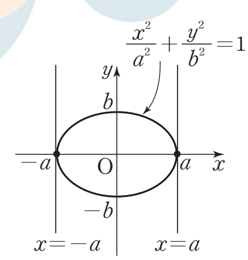
$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$에서 $a^2-x_1{}^2=\dfrac{a^2y_1{}^2}{b^2}$, $b^2-y_1{}^2=\dfrac{b^2x_1{}^2}{a^2}$이므로 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m+\frac{b}{a}x_1\right)^2=0,\ \text{즉}\ m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\dfrac{b^2x_1{}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$이므로

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

한편, $y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 타원 위의 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

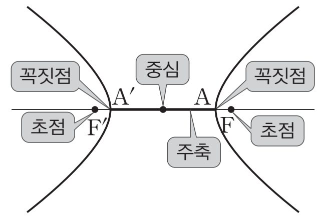


03 쌍곡선

1. 쌍곡선의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점, 선분 AA′을 쌍곡선의 주축이라 하고, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라 한다.



2. 쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

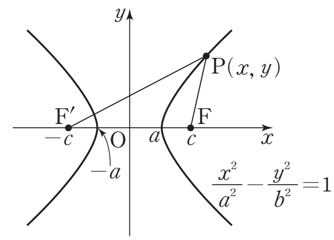
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

① 초점의 좌표: F$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, F′$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

② 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$

③ 주축의 길이: $2a$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



(2) 두 초점 F$(0,\ c)$, F′$(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

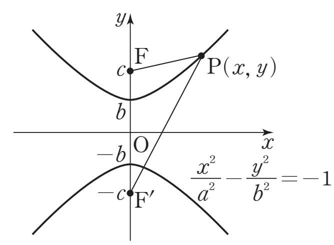
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

① 초점의 좌표: F$(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$, F′$(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

② 꼭짓점의 좌표: $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 주축의 길이: $2b$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



설명 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a\ (c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면

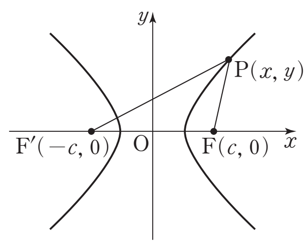
$$\overline{\text{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\text{PF}'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}}|=2a$이므로

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$



이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

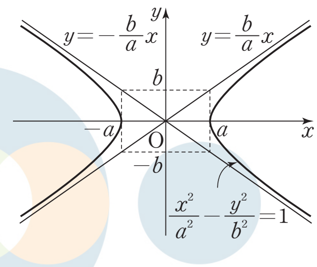
$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$이라 하면 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

03 쌍곡선

3. 쌍곡선의 점근선

곡선 위의 점이 한없이 가까워지는 직선을 점근선이라 한다.



(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

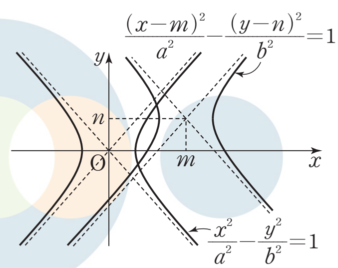
4. 쌍곡선의 평행이동

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 점근선의 방정식은 다음과 같다.

방정식	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$	$(\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$
꼭짓점	$(a, 0)$, $(-a, 0)$	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$
중심	$(0, 0)$	(m, n)
점근선	$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$	$y-n=\frac{b}{a}(x-m)$, $y-n=-\frac{b}{a}(x-m)$



참고 (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 점근선의 방정식도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

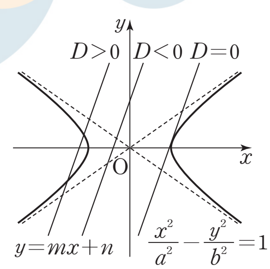
(2) 쌍곡선을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 주축의 길이는 변하지 않는다. 즉, 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2a$이다.

5. 쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

따라서 $a^2m^2-b^2\neq0$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

6. 쌍곡선의 접선

(1) 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

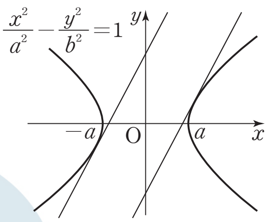
② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$ (단, $b^2-a^2m^2>0$)

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$ …… ㉠



x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=4a^2b^2(-a^2m^2+n^2+b^2)=0$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $n^2=a^2m^2-b^2$에서 $a^2m^2-b^2>0$이면 $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(2) 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$ …… ㉠

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ …… ㉡

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

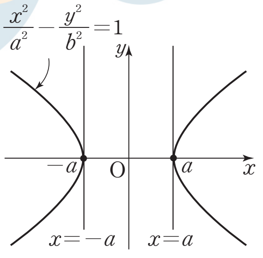
즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2-b^2$에서 $(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2+b^2)=0$ …… ㉢

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서 $x_1^2-a^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}$, $y_1^2+b^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}$이므로 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$\left(\frac{a}{b}y_1m-\frac{b}{a}x_1\right)^2=0$, 즉 $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이를 ㉠에 대입하고 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$임을 이용하여 이 직선의 방정식을 정리하면

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

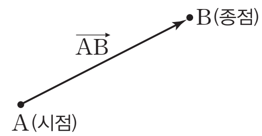


한편, $y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 쌍곡선 위의 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

04 벡터의 연산

1. 벡터의 정의

크기와 방향을 모두 가지는 양을 벡터라 하고, 특히 평면 위의 벡터를 평면벡터라 한다.



방향이 점 A에서 점 B를 향하고, 크기가 선분 AB의 길이인 벡터를 벡터 AB라 하고, 기호로

$$\overrightarrow{AB}$$

와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점이라 한다. 또 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기를 기호로

$$|\overrightarrow{AB}|$$

와 같이 나타낸다.

한편, 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …와 같이 나타내고 벡터의 크기는 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, …와 같이 나타낸다.

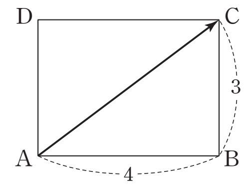
참고 속도, 가속도, 물체에 작용하는 힘 등은 크기와 방향을 함께 표시해야 바르게 나타낼 수 있는 양으로 이는 벡터를 이용하여 나타낼 수 있다.

예 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$인 직사각형 ABCD에서

벡터 $\overrightarrow{AC}$는 시점이 A, 종점이 C인 벡터이고 벡터 $\overrightarrow{AC}$의 크기는

$$|\overrightarrow{AC}|=5$$

이다.



2. 서로 같은 벡터

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 모두 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고 기호로

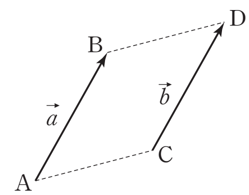
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

와 같이 나타낸다.

특히, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$를 한 문자로 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\vec{a}=\vec{b}$$

이다.

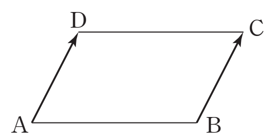


참고 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이면 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

예 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

이다.



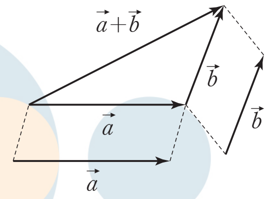
3. 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈

벡터 $\vec{a}$의 종점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시켰을 때, 시점을 벡터 $\vec{a}$의 시점으로 하고 종점을 벡터 $\vec{b}$의 종점으로 하는 벡터를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고 이것을 기호로

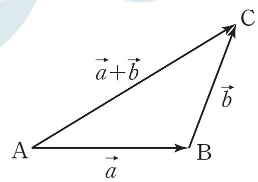
$\vec{a}+\vec{b}$

와 같이 나타낸다.



즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

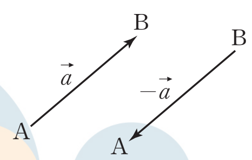


(2) 영벡터와 벡터 $-\vec{a}$의 뜻

① 크기가 0이고 방향을 고려하지 않는 것을 영벡터라 하고 기호로 $\vec{0}$과 같이 나타낸다.

② 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다.

즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$일 때, $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이다.



참고 벡터 $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ 등은 영벡터이다.

(3) 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

③ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

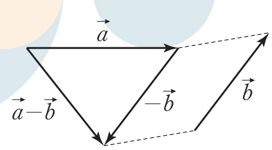
④ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

4. 벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고 기호로

$\vec{a}-\vec{b}$

와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$이다.



04 벡터의 연산

5. 벡터의 실수배

(1) 벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라 하고 다음과 같이 정의한다.

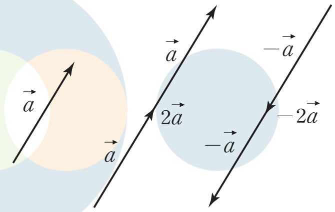
① $\vec{a} \neq \vec{0}$일 때,

(i) $k>0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 같은 방향이고 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터

(ii) $k<0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 반대 방향이고 크기는 $|k||\vec{a}|$인 벡터

(iii) $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$



(2) 벡터의 실수배의 성질

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 두 실수 k, l에 대하여

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

(3) 벡터의 실수배와 단위벡터

① 단위벡터의 뜻

크기가 1인 벡터를 단위벡터라 한다.

② 벡터의 실수배와 단위벡터

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터는 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$이다.

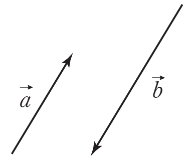
(4) 벡터의 실수배와 평행

① 벡터의 평행의 뜻

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행하다고 하고 기호로

$$\vec{a} /\!/ \vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



② 벡터의 실수배와 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$$

참고 서로 다른 세 점 A, B, C와 0이 아닌 실수 k에 대하여

A, B, C가 한 직선 위에 있다. $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

참고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때,

$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow k=m,\ l=n$ (단, k, l, m, n은 실수이다.)

04 벡터의 연산

6. 위치벡터

(1) 위치벡터

평면에서 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

설명 평면에서 벡터의 시점을 한 점 O로 고정시킬 때, 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 점 A가 유일하게 정해진다. 역으로 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 오직 하나로 결정된다.

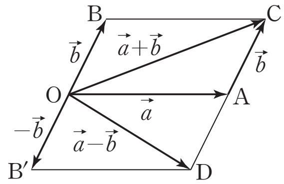
(2) 위치벡터와 덧셈, 뺄셈

평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하자.

① 덧셈

선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형 OACB에서

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$



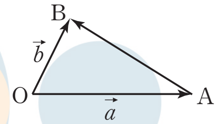
② 뺄셈

$-\vec{b}=\overrightarrow{OB'}$일 때, 선분 AB′을 대각선으로 하는 평행사변형 OB′DA에서

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OD}$$

(3) 위치벡터의 활용

① 평면 위의 벡터의 위치벡터로의 표현



평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

설명 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이다.

② 내분점과 외분점

평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하고, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터를 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$라 하면

(i) $\vec{p}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

(ii) $\vec{q}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

③ 무게중심

평면 위의 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하고, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터를 $\overrightarrow{OG}=\vec{g}$라 하면

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

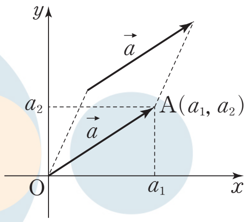
7. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$를 종점으로 하는 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.



이때 두 실수 $a_1,\ a_2$를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, $a_1,\ a_2$를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라고 한다.

설명 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{E}_2(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}=\vec{e_2}$라 하면 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 평면벡터의 성분과 연산

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① 크기: $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

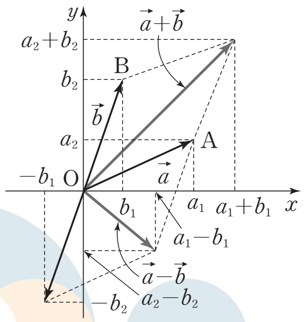
② 두 벡터가 서로 같을 조건: $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$이고 $a_2=b_2$

③ 덧셈: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ 뺄셈: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ 실수배: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

설명 좌표평면에서 원점을 O, 두 점을 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 하자.



① 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이이므로

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

② $\vec{a}=\vec{b}$이면 종점이 같으므로 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$이다.
역도 성립한다.

③ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}=(ka_1,\ ka_2)$

05 벡터의 내적, 직선과 원의 방정식

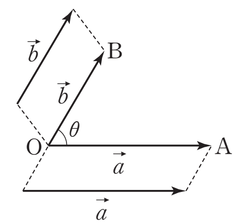
1. 벡터의 내적

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 임의의 한 점 O를 시점으로 하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 되도록 두 점 A, B를 정할 때,

$$\angle AOB=\theta\ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.

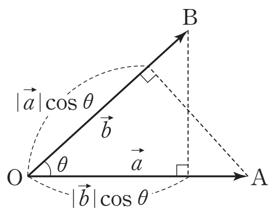


(2) 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases} |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ \le \theta \le 90^\circ) \\ -|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ < \theta \le 180^\circ) \end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.



참고 ① 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 위의 내적을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

이때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $|\vec{a}|$와 $|\vec{b}|\cos\theta$ 또는 $|\vec{a}|\cos\theta$와 $|\vec{b}|$의 곱이다.

② $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

(3) 벡터의 성분과 내적

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

설명 좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하고 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$라 하자.

점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 BHA에서

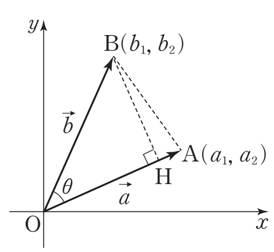
$$\overline{AB}^2=(\overline{OB}\sin\theta)^2+|\overline{OA}-\overline{OB}\cos\theta|^2$$

이를 정리하면 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$

그러므로 $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

이를 정리하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

이 식은 $\theta=0^\circ$, $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$일 때에도 성립하고 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 성립한다.



참고 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$는 다음과 같이 설명할 수 있다.

좌표평면에서 세 점 $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여 $\angle AOB=\theta$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

그러므로 $\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$

즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

2. 벡터의 내적의 성질

(1) 벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

설명 ① 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}$가 이루는 각의 크기는 $0°$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

3. 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta\le180°)$일 때

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta\le180°)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

4. 두 평면벡터의 평행, 수직

(1) 두 평면벡터의 평행, 수직

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

② $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터의 평행, 수직

좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$

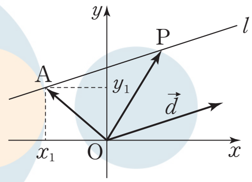
② $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

참고 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $90°$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고 기호로 $\vec{a}\perp\vec{b}$와 같이 나타낸다.

5. 직선의 방정식

(1) 방향벡터가 주어진 직선의 방정식

점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}$인 직선 l 위의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ (t는 실수)

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고 $\vec{d}=(a, b)$라 하면

$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$ (단, $ab\neq0$)

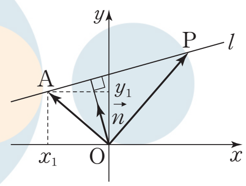
참고 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$)

예 직선 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}$의 방향벡터 중 하나는 $\vec{d}=(2, 3)$이다.

(2) 법선벡터가 주어진 직선의 방정식

점 A를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선 l 위의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고, $\vec{n}=(a, b)$라 하면

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

예 직선 $2x+3y=4$의 법선벡터 중 하나는 $\vec{n}=(2, 3)$이다.

(3) 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1}=(a_1, b_1)$, $\vec{d_2}=(a_2, b_2)$라 할 때

① 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

② 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 0이 아닌 어떤 실수 k에 대하여

$\vec{d_1}=k\vec{d_2}$, 즉 $(a_1, b_1)=k(a_2, b_2)$

참고 $\vec{d_1}=k\vec{d_2}$이면 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다.

③ 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면

$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}=0$, 즉 $a_1a_2+b_1b_2=0$

참고 $\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}=0$이면 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

6. 원의 방정식

평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

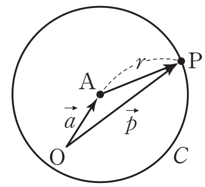
(1) 두 점 A, P의 점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$라 하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r, \text{ 즉 } (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하면

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

설명 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P라 하면



$$|\overrightarrow{AP}|=r \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로 ㉠은

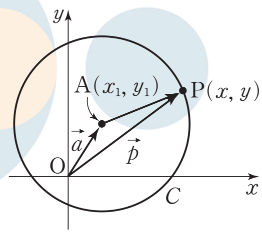
$$|\vec{p}-\vec{a}|=r$$

이때 양변을 제곱하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=r^2$$

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

또 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하면



$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1, y-y_1)$$

이므로 ㉡은

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

즉, $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$

예 점 A(1, 2)와 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하자.

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=1$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(1, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

(2) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=4$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(1, 2)이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

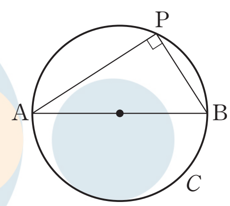
참고 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

(2) 세 점 A, B, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)라 하면

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_2, y-y_2)=0$$



06 공간도형

1. 공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점　② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선　④ 평행한 두 직선

(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다.　② 평행하다.　③ 꼬인 위치에 있다.

(3) 직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다.　② 한 점에서 만난다.　③ 평행하다.

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

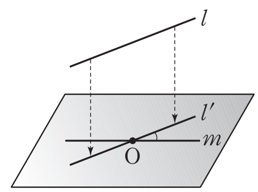
① 만난다.　② 평행하다.

참고 ① 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 도형은 직선이고 이 직선을 두 평면의 교선이라 한다.

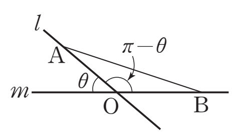
② 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 서로 평행하다고 하고 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

2. 공간에서 두 직선이 이루는 각

두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라 한다.



참고 ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각은 크기가 크지 않은 것을 택한다. 그림과 같이 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기는 θ $(0^\circ < \theta \le 90^\circ)$와 $\pi - \theta$ 중에서 θ를 택한다. 그런데 두 직선 l, m의 교점 O, 직선 l 위의 점 A, 직선 m 위의 점 B에 대하여 둔각삼각형 AOB에 코사인법칙을 적용해서 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기 θ를 구할 경우 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$를 이용한다.



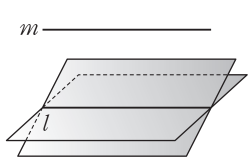
② 두 직선이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l, m은 서로 수직이라 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

3. 공간에서 직선과 평면의 평행

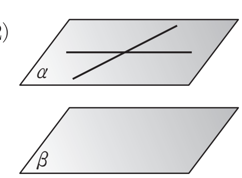
(1) 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 모든 평면은 직선 m과 평행하다.

(2) 두 평면 α, β가 서로 평행할 때, 평면 α 위에 있는 모든 직선은 평면 β와 평행하다.

(1)

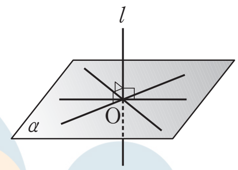


(2)



06 공간도형

4. 공간에서 직선과 평면의 수직 관계



공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 수직이라 하고, 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라 한다.

참고 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l\perp\alpha$이다.

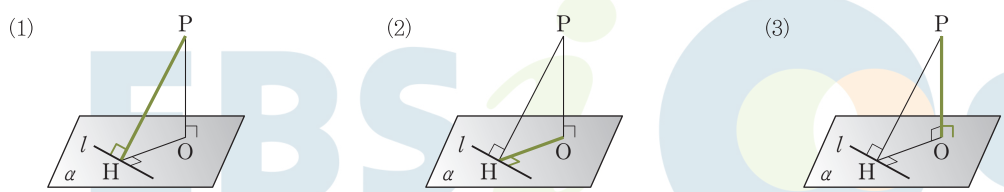
5. 삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 한 점 O, 평면 α에 포함되고 점 O를 지나지 않는 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여 다음과 같은 세 가지 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라 한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

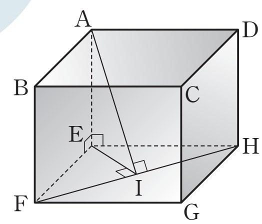


설명 (1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 PH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 OH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PH와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PO는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 PO는 직선 OH와 직선 l을 포함하는 평면 α와 수직이다.
즉, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이다.

예 그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH의 한 꼭짓점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하자.
$\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{\mathrm{EI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이다.



6. 이면각

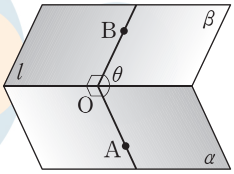
(1) 반평면

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라 한다.

(2) 이면각

직선 l을 공유하는 두 개의 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 한다.

이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라 한다.



(3) 이면각의 크기

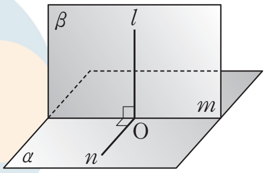
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 각각 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 θ를 이면각의 크기라 한다.

(4) 두 평면이 이루는 각

서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라 한다.

참고 ① 두 평면 α, β에서 이면각의 크기가 $90°$일 때, 두 평면 α, β는 서로 수직이라 하고, 기호로 $\alpha\perp\beta$와 같이 나타낸다.

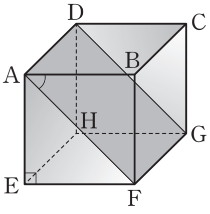
② 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 보이자.
그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m과 수직인 직선 n을 그으면 $l\perp\alpha$이므로 $l\perp n$이다.
이때 $l\perp m$, $n\perp m$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기이다.
따라서 $\alpha\perp\beta$이다.



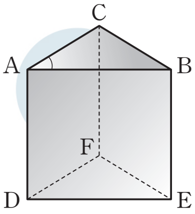
예1 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에서

① $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AF}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고 $\angle$FAB$=45°$이므로 두 평면 ABCD, AFGD가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.

② $\overline{\mathrm{EA}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$, $\overline{\mathrm{EF}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$이고 $\angle$FEA$=90°$이므로 두 평면 AEHD, EFGH가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
즉, (평면 AEHD)$\perp$(평면 EFGH)이다.



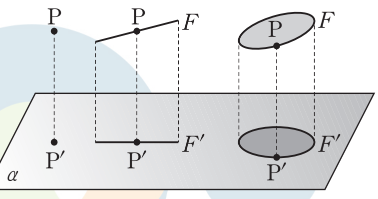
예2 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정삼각기둥 ABC$-$DEF에서
$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고 $\angle$BAC$=60°$이므로 두 평면 ADEB, ADFC가 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.



7. 정사영

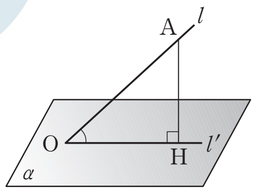
(1) 정사영

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 또한 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.



(2) 직선과 평면이 이루는 각

직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영 l'과 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라 한다. 즉, 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때 직선 l 위의 O가 아닌 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서 ∠AOH의 크기가 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기이다.



참고 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $0°$이다.

(3) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0° \le \theta \le 90°)$라 하면

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

설명 $0° < \theta < 90°$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면

$\overline{\mathrm{AA'}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이다.

점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}} /\!/ \overline{\mathrm{AC}}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$이고 직각삼각형 BAC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$이므로

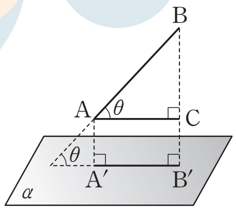
$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

가 성립한다.

한편, $\theta = 0°$ 또는 $\theta = 90°$일 때에도

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

가 성립한다.

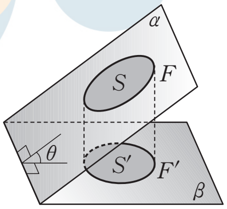


(4) 정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, 두 도형 F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ $(0° \le \theta \le 90°)$이면

$$S' = S \cos\theta$$

참고 등식 $S' = S\cos\theta$ $(0° \le \theta < 90°)$는 $S = \dfrac{S'}{\cos\theta}$ 또는 $\cos\theta = \dfrac{S'}{S}$으로 변형하여 사용할 수 있다.

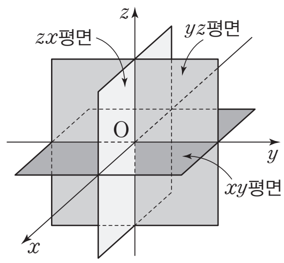


07 공간좌표

1. 공간좌표

(1) 좌표공간

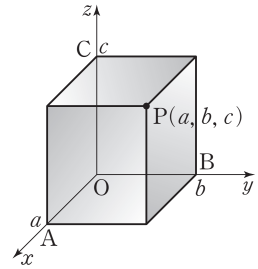
그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 x축, y축, z축이라 하고, 점 O를 원점이라 한다. 이때 x축, y축, z축을 통틀어 좌표축이라 하고, 좌표축으로 정해진 공간을 좌표공간이라 한다. 또 x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 하고, 이 세 평면을 통틀어 좌표평면이라 한다.



(2) 공간좌표

그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 x축, y축, z축과 수직인 평면이 각각 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라 하면 점 P와 세 실수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일로 대응된다.

이와 같이 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 공간좌표라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(a, b, c)$와 같이 나타낸다. 이때 a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라 한다.



(3) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$의 수선의 발의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

② 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a, b, 0)$, $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$

예 점 $\mathrm{P}(3, 2, 1)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(3, 0, 0)$, yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, 2, 1)$이다.

(4) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 대칭이동시킨 점의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 x축, y축, z축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$

② 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$

③ 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는

$(-a, -b, -c)$

예 점 $\mathrm{P}(3, 2, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(3, -2, -1)$, yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-3, 2, 1)$, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-3, -2, -1)$이다.

2. 좌표공간의 두 점 사이의 거리

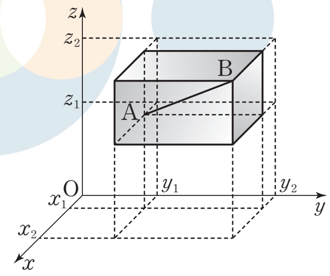
(1) 좌표공간의 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(2) 좌표공간의 원점 O와 점 A(x_1, y_1, z_1) 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

설명 좌표공간의 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)에 대하여 직선 AB가 세 좌표평면에 평행하지 않는 경우, 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 세 좌표평면에 평행한 6개의 평면으로 이루어진 직육면체를 생각하면 선분 AB는 직육면체의 대각선이다.



이때 직육면체의 세 모서리의 길이가

$|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

또한 직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면에 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

참고 ① 두 점 A, B가 xy평면 위에 있을 때에는 두 점 A, B의 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

즉, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

② 두 점 A, B가 x축 위에 있을 때에는 두 점 A, B의 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

즉, 수직선 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

예 ① 두 점 A$(3, 2, 1)$, B$(1, 1, -1)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2+(-1-1)^2}=3$$

② 원점 O와 점 A$(3, 2, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$$

3. 선분의 내분점과 외분점

(1) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

③ 선분 AB의 중점의 좌표는

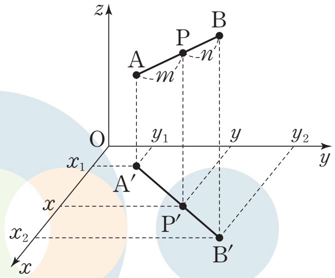
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

설명 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 $P(x, y, z)$라 하자.

세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라 하면

$A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, y_2, 0)$, $P'(x, y, 0)$이고

$\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$이다.



따라서 선분 A′B′의 내분점의 좌표를 xy평면 위에서 생각하면

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면(또는 zx평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.

또 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

(2) 좌표공간에서 삼각형의 무게중심

좌표공간의 삼각형 ABC에 대하여 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

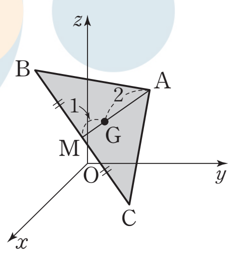
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

설명 변 BC의 중점을 $M(x_4, y_4, z_4)$라 하면 $x_4=\dfrac{x_2+x_3}{2}$, $y_4=\dfrac{y_2+y_3}{2}$, $z_4=\dfrac{z_2+z_3}{2}$

무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라 하면 점 G는 선분 AM을 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$



즉, $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

07 공간좌표

4. 구의 방정식

(1) 구

공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라 한다.

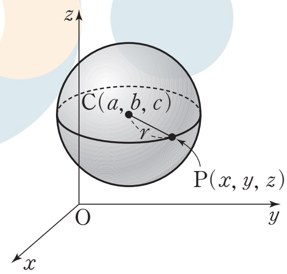
(2) 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



예 ① 중심이 점 $(3,\ 2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5^2$$

즉, $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=16$

(3) 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형

방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 이 방정식은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

예 방정식 $x^2+y^2+z^2-6x+4y-4z+13=0$은

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=2^2$$

이므로 이 방정식은 중심이 점 $(3,\ -2,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 구를 나타낸다.

또한 중심의 y좌표가 -2, z좌표가 2이므로 이 구는 zx평면과 xy평면에 동시에 접한다.

참고 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이 좌표평면 또는 좌표축에 접할 조건은 다음과 같다.

① xy평면에 접하는 경우: $r=|c|$

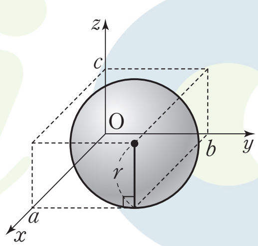
② yz평면에 접하는 경우: $r=|a|$

③ zx평면에 접하는 경우: $r=|b|$

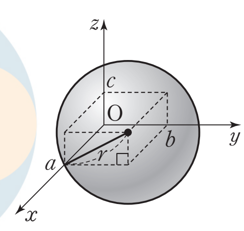
④ x축에 접하는 경우: $r=\sqrt{b^2+c^2}$

⑤ y축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+c^2}$

⑥ z축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+b^2}$



(xy평면에 접하는 경우)



(x축에 접하는 경우)