

제 2 교시

2016학년도 NS 모의평가 0회 문제지

수학 영역
[B형]

짝수형

성명	
----	--

수험 번호						3			
-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('A'형/'B'형)의 문제지 인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.
블랙넛이 선명하게 송민호를 알고있었다
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 표시되면 그 '0'도 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 이용하십시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

5. 두 사건 A, B 는 서로 독립이고,

$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ 일 때, $P(A^c \cup B)$ 의 값은?

(단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

7. 이차방정식 $x^2 + 6x - 8 = 0$ 의 두 근이 $\tan\alpha, \tan\beta$ 일 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근은 $\sec^2\alpha, \sec^2\beta$ 이다. 이때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 33 ② 43 ③ 53
④ 63 ⑤ 73

6. 연립부등식 $\begin{cases} (x+4)(x+7)(x-2) \geq 0 \\ \frac{(x-3)(x-5)}{x-2} \leq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 최댓값

을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?[3점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

8. 일차변환 $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에 의하여 점 (2,5)은 점 (1,3)로, 점 (1,3)은 점 (-1,4)로 옮겨진다. 이때, 일차변환 f 에 의하여 (-1,1)이 옮겨지는 점의 좌표는? [3점]

① (11,-16) ② (-10,14) ③ (11,16) ④ (10,-14) ⑤ (-11,16)

9. 공학 동아리 NIST가 비오는 날 동아리 경진대회에서 우승할 확률은 $\frac{7}{10}$ 이고, 비가 오지 않는 날 우승할 확률은 $\frac{2}{5}$ 라고 한다. 동아리 경진대회가 열리는 금요일에 비가 올 확률을 $\frac{2}{5}$ 라고 할 때, NIST가 금요일에 열리는 동아리 경진대회에서 우승할 확률은? [3점]

- ① $\frac{11}{25}$ ② $\frac{12}{25}$ ③ $\frac{13}{25}$ ④ $\frac{17}{25}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

10. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x - [x]\}^n$ 이고 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. $f(x) = g(x)$ 의 근이 $x = -3, x = 1$ 일 때, $g'(5)$ 의 값은?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대정수이다.) [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

11. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2} g(x) dx = \alpha$, $\int_1^2 \frac{g'(x)}{x} dx = \beta$ 이고

$g(1) = \alpha$, $g(2) = 4\beta$ 일 때, $\int_1^2 \frac{g(x)}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\alpha + \beta$ ② $\frac{\alpha + \beta}{2}$ ③ $\alpha - \beta$ ④ $\frac{2\alpha - \beta}{2}$ ⑤ $2\alpha - \beta$

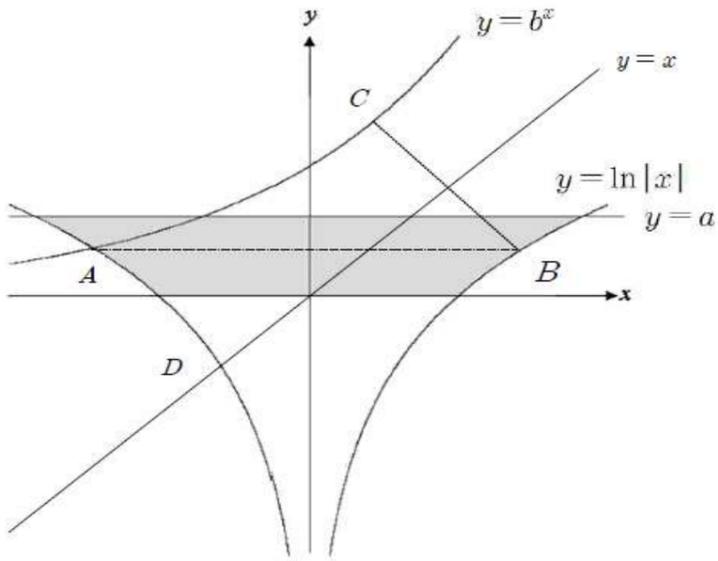
12. 어느 교과서공장에서 생산되는 교과서의 무게는 평균이 270g, 표준편차가 10g 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 무게 290g 이상인 교과서를 불량품으로 판정한다. 이 교과서 중에서 2500개를 임의로 추출할 때, 불량품의 개수가 43개 이상일 확률을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구하여라. [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

- ① 0.16 ② 0.23 ③ 0.61 ④ 0.84 ⑤ 0.94

‘B’형

[13~14] 다음 그림과 같이 $y=a$ 와 $y=\ln|x|$ 와 $y=b^x$ 의 그래프가 있다. 13번과 14번의 두 물음에 답하여라.



13. 위 그래프에서 $a=3$ 일 때, $y=a$ 와 $y=\ln|x|$ 가 만나고 있다. 이때, x 축과 $y=a$, $y=\ln|x|$ 로 둘러싸인 부분을 x 축을 기준으로 회전시킬 때 생기는 도형의 부피는? [3점]

- ① $(8e^2+2)\pi$
- ② $(8e^3+4)\pi$
- ③ $(8e^2+4)\pi$
- ④ $(4e^3+2)\pi$
- ⑤ $(6e^3+4)\pi$

14. 위 그래프에서 $b=e$ 일 때, 네 개의 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ 에 대하여 점 B 는 점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점이고 점 C 는 점 B 를 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다. 이때, 다음 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $\frac{x_2}{x_3} = \frac{y_2}{y_3}$

ㄴ. $-2 < x_1 < -1$

ㄷ. $\frac{y_1}{y_4} < \frac{1}{y_1}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 다음은 2이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

이 성립함을 보이는 과정이다.

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$ (가)

인 사실로부터

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$
 (가) < 1

을 보이자. 그러기 위해서는 먼저

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$
 (가) $= \frac{n-1}{n} \dots \textcircled{1}$

을 수학적 귀납법으로 증명하자.

(i) $n=2$ 일 때, 좌변과 우변이 모두 $\frac{1}{2}$ 이 되어 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하자. 즉,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$
 (나) $= \frac{k-1}{k}$

이다. 이제 $n=k+1$ 일 때를 살펴보자.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

$$= \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{\text{(다)}}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

이다. 따라서, $n=k+1$ 일 때 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여, $n \geq 2$ 인 자연수에 대하여

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$
 (가) $= \frac{n-1}{n} < 1$

이 성립한다. 즉, $n \geq 2$ 인 자연수에 대하여

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

이 성립한다.

위의 (가),(나),(다)에 알맞은 식들을 각각 $f(n), g(k), h(k)$ 라고

할 때, $4f(11) \cdot g(2) \cdot \sum_{k=1}^{10} kh(k)$ 의 값은? [4점]

- ① 53 ② 55 ③ 57
- ④ 61 ⑤ 63

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A+B=3E, B^2=2B$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

————— <보 기> —————

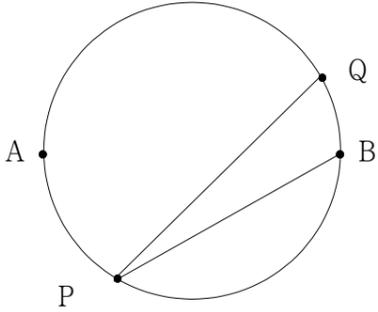
ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB^2=B^2A$

ㄷ. $3A+4B+AB=9E$

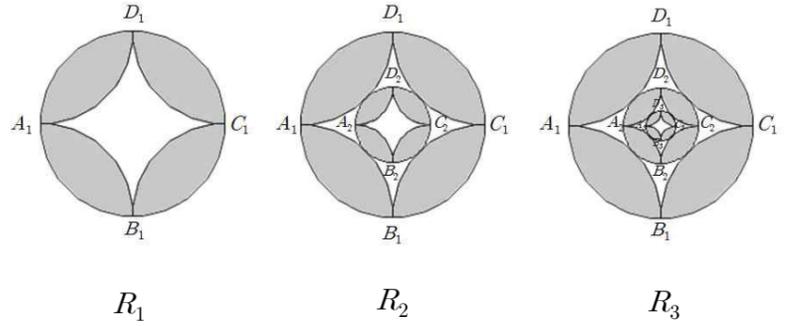
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 점 A, B 를 지름의 양 끝점으로 하고 반지름이 10인 원이 있다. 점 P 는 점 A 를 출발하여 시계 반대 방향으로 원 위를 매초 2π 만큼 움직이고, 점 Q 는 점 B 를 출발하여 시계 반대 방향으로 원 위를 매초 π 만큼 움직인다. $\angle BPQ = \theta$ 라고 할 때, P, Q 가 동시에 출발하여 움직일 때 3초 뒤 θ 의 크기는? [4점]



- ① $\frac{7}{20}\pi$ ② $\frac{9}{20}\pi$ ③ $\frac{11}{20}\pi$ ④ $\frac{1}{20}\pi$ ⑤ $\frac{3}{20}\pi$

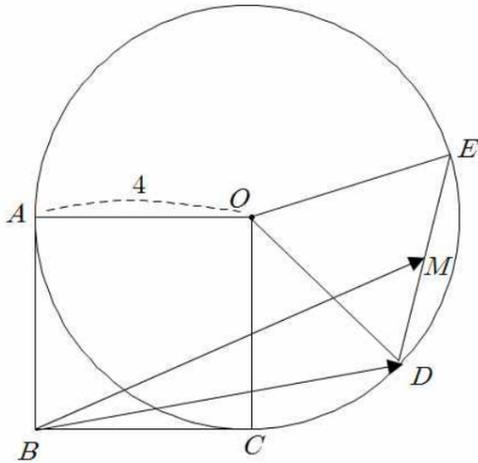
18. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원과 각각 점 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1$ 을 지나며 반지름이 동일한 원과 그에 둘러싸인 부분을 색칠하고 그 영역을 R_1 이라 하자. 같은 방법으로 R_1 에서 얻은 도형을 색칠하지 않은 부분에 내접하도록 그려 얻은 도형을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n 번째 얻은 도형 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{36}{\sqrt{2}-1}(\pi-2)$ ② $\frac{36}{\sqrt{3}-1}(\pi-1)$ ③ $\frac{72}{\sqrt{2}-1}(\pi-2)$
 ④ $\frac{72}{\sqrt{2}-1}(\pi-1)$ ⑤ $\frac{72}{\sqrt{3}-1}(\pi-2)$

19. 다음 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 4인 원과, 한변의 길이가 4이고 원의 중심 O 와 원위의 점 A, C 와 원 밖의 점 B 를 꼭지점으로 하는 정사각형 $OABC$ 와, 원의 중심 O 와 원 위의 움직이는 점 D, E 를 꼭지점으로 하는 한변의 길이가 4인 정삼각형 ODE 가 존재한다. 이때, 변 DE 의 중점을 M 이라고 하면, $|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}|$ 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

[4점]



- ① $4\sqrt{2}$
- ② $8\sqrt{2}$
- ③ $8\sqrt{3}$
- ④ $16\sqrt{2}$
- ⑤ $16\sqrt{3}$

20. $(-1, 1)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음을 만족한다.

(가) $f(x) = f(x+2)$

(나) $\{f(x)\}^2 = \frac{2}{\pi}f'(x) - 1$

(다) $f(\frac{1}{2}) = 1, f(0) = 0$

$a_k = \int_{2k}^{2(k+\frac{1}{4})} f(x)dx$ 라고 정의 할 때, $e^{\sum_{k=1}^5 \pi a_k}$ 의 값은? [4점]

- ① 32
- ② 34
- ③ 36
- ④ 38
- ⑤ 40

21. 원점 O 를 중심으로 하는 구 $C: x^2+y^2+z^2=4$ 가 있다. 구 C 가 두 평면 $\alpha: x+y+z-3=0, \beta: 3x+4y+5=0$ 에 의해 세 부분으로 나뉜다. 이 세 부분의 부피 비를 큰 것부터 $a:5:b$ 라고 할 때, 점 $P(a+b, 18, 9\sqrt{3})$ 과 점 O 를 이은 선분 \overline{OP} 가 구 C 와 만나는 점은 $M(p, q, r)$ 이다. 이때, $\overline{MP} + (2p)^2 + (\sqrt{3}q)^2 + (2r)^2$ 의 값은? [4점]

- ① 39 ② 45 ③ 47
 ④ 49 ⑤ 51

단답형

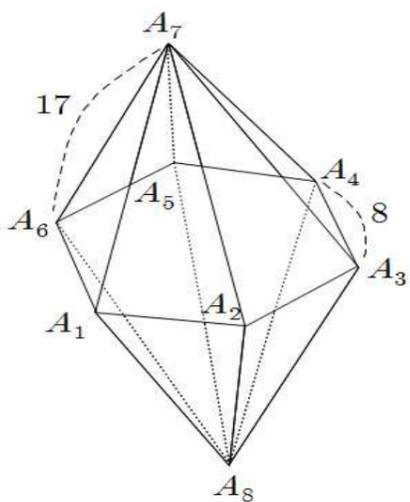
22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=3$ 이고 $a_4+a_5=55$ 일 때, a_4+a_6 의 값은? [3점]

23. $(x+3)^{x^2} = (x+3)^{-x+6}$ 의 모든 근의 합을 a 라고 하자. 이때, $-a$ 의 값은? [3점]

24. 어떤 용액 1L에 존재하는 수소 이온 농도를 $[H^+]$ 라고 할 때, 이 용액의 산성도를 나타내는 PH 는 $PH = -\log[H^+]$ 로 정의할 수 있다. 한 과학자가 A용액의 산성도를 측정했을 때, $PH=3.5$ 였고, 또 다른 용액 B의 산성도를 측정했을 때, $PH=6.5$ 이었다. 두 용액 A, B 1L안에 존재하는 수소 이온 농도를 각각 a, b 라고 할 때, $(\frac{3}{5} \log ab)^2$ 의 값은? [3점]

26. 평면 $3x+7y-5z=10$ 과 직선 $x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{5}$ 의 교점 (a,b,c) 를 지나고 점 $(8,-2,0)$ 을 중심으로 하는 원의 넓이를 $d\pi$ 라고 할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? [4점]

25. 다음 그림과 같이 모든 변의 길이가 8인 정육각형과 길이가 17인 선분들로 이루어진 정육각쌍뿔이 있다. 이때, 벡터 $\sum_{n=2}^8 \overrightarrow{A_1A_n}$ 의 크기는? [3점]



27. 함수 $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x+4}$ 가 존재한다. 함수 $f(x)$ 값의 범위는

$a \leq f(x) < b$ 이고 $a+b = \frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값은?

(단, $\frac{q}{p}$ 는 기약분수이다.) [4점]

28. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ 이

초점 $F'(-\sqrt{5}, 0), F(\sqrt{5}, 0)$ 을 공유하고 있다. 타원과 쌍곡선이 제 1사분면에서 만나는 점을 P 라고 할 때, $\overline{F'P} = p, \overline{FP} = q$ 라고 하자. $q^2 = p^2 - 12\sqrt{3}$ 이고, $pq = ab$ 일 때, $a+b-c^2-d^2+1$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 모두 양수이고 a^2 은 정수이다.) [4점]

29. 자연수 n 에 대하여 $\log_2 n$ 의 정수부분을 $f(n)$, 소수 부분을 $g(n)$ 이라고 하고, $|x^2 + 2f(n)x - g(n)| = \{f(n)\}^2$ 의 서로 다른 실근의 개수를 a_n 이라고 한다. 이때, $\sum_{n=1}^{50} a_n$ 의 값은? [4점]

30. 삼차함수 $f(x)$ 와 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에 대하여 다음을 만족하는 d 의 범위가 $p < d \leq q$ 일 때 $3p + q$ 의 값을 구하시오.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수, $0 < a < \frac{4}{3}$) [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x)$ 가 존재한다.

(다) $0 < x < 1$ 에서 $[g(x)] = 0$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.