STORY 2. 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수

어차피 수II에서는 '다항함수'일 테니까 겁먹지 말자!

STYLE 01

어차피 다항함수거든! - 정적분에 대한 허상을 깨자

소위 많은 '허수' 학생들은 휘황찬란한 기호들에 많이 위축되곤 하지.

그중에 제일이 인테그랄, 즉 $\int$ ← 이 녀석이란 말이야.

하지만, 피적분함수가 다항함수라면, 또 적분구간이 x에 대한 함수라면,

정적분한 결과도 x에 대한 다항함수이지 않을까?

[2024학년도 6월 모의평가 20번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$이다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

미적분을 학습한 학생이라면 오히려 피적분함수 $f(x)$에 대한 조건을 보지 못하고 먼 길을 헤맬 수 있어.
하지만 $f(x)$에 대한 식을 아주 직접적으로 제시하였기 때문에 함수 $g(x)$의 그래프 개형을 생각할 수 있지.

잠깐, 그 전에! $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$라는 걸 모르진 않을 거라 믿을게..?

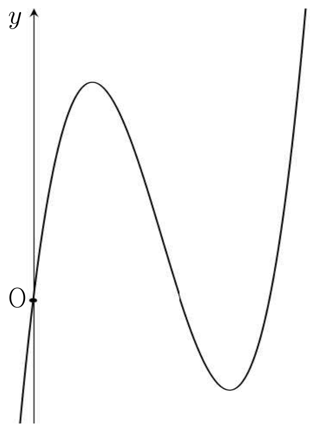
그래서, 사실 **정적분으로 주어져있지만, 적분상수가 정해진 부정적분으로 봐도 전혀 상관이 없어.**
즉, 정리하면 정적분으로 정의되어있는 함수 $g(x)$는 **피적분함수 $f(x)$의 부정적분**과 밀접한 관련이 있음을 머릿속에 탑재할 필요가 있다 이 말이야.

STEP 1 우리는 피적분함수를 알고 있다!

우리는 앞에서 함수 $g(x)$가 $f(x)$의 부정적분과 밀접한 관련이 있음을 깨달았어.

그런데 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이니, 그 부정적분은 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수겠네?

그리고 가장 기본적인 정적분 함수의 덕목, **'윗끝과 아랫끝이 같으면 정적분값이 0이다'** 라는 조건을 잊어서는 안되겠지? 따라서 우리는 **원점을 지나고, 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 그래프**를 떠올려야 해.
이는 **함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나**가 되겠지.



STEP 2 뭐야, 그냥 다항함수 추론이잖아?

우리는 결과적으로 피적분함수 $f(x)$의 식을 구한 다음, $x=9$를 대입하여 $f(9)$라는 값을 구하려 해.
그런데, 함수 $g(x)$의 식을 구해야 할까? 필요 없지. 왜냐?
함수 $g(x)$를 미분하면 함수 $f(x)$가 나온다는 것을 익히 알고 있거든!
또, $f(x)$와 $g(x)$는 모두 다항함수이기 때문에 다음이 성립해.

"$g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다."

아! 그렇다면 $g(x)$가 극값을 갖는 x값 두 개를 찾아서 이를 $f(x)$의 식을 구하는 데 사용하면 되겠네.
우리는 삼차함수를 다룰 때 다음 경우의 수를 살피곤 하지.

1) 함수가 x축에 접하지는 않는가(= 중근 or 삼중근을 갖지는 않는가)?

2) 함수가 x축 위의 점 $(a,\ 0)$에 대해 대칭이지 않은가?

3) 극점이 특수하지 않은가?

이 셋 중에서, 위 두 가지 경우의 수 1)과 2)가 아니면 숫자가 다소 더러워져서
위 두 경우가 아닌 문항은 잘 내지 않아. (230922라는 반례가 존재하나, 이 역시 3)의 경우의 수에 해당)
그런데 이 문항에서 네모 박스의 조건을 봤을 때 다소 당황스러울 수 있어.

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\lvert g(x) \rvert \geq \lvert g(3) \rvert$이다.

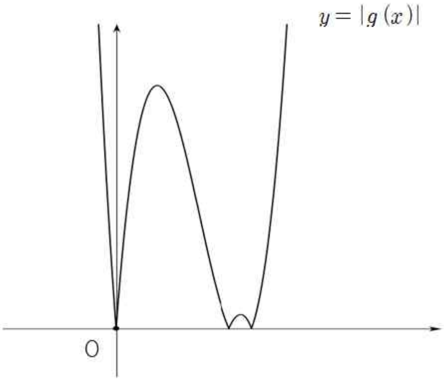
일단 $g(x) \geq g(4)$라고 하니, 함수 $g(x)$가 $x=4$에서 극솟값을 가지겠지?
그런데 '$\lvert g(x) \rvert \geq \lvert g(3) \rvert$'라는 조건을 어찌 해석해야 할까?
빠르게 1)번 2)번을 검토해봤을 때 두 경우 모두 불가능하다는 것이 느껴질거야.
그렇다고 3)을 생각하기에는 절댓값 조건이 더 매력적인 것 같아.

절댓값 함수를 어려워하는 친구들도 꽤 많을거야. 하지만 $\lvert g(x) \rvert$를 그리는건 어렵지 않아.
다음 절차만 밟으면 되거든!

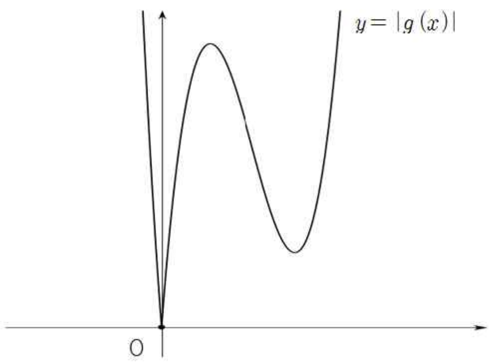
"0보다 작으면 들어올리고, 크면 놔둬라."

또, 우리가 알아냈던 '함수 $g(x)$가 원점을 지난다'는 성질을 이용해 다음과 같이
두 개의 $g(x)$ 그래프를 생각해볼 수 있어.

1) $g(4) < 0$



2) $g(4) \geq 0$



2)의 경우 $\lvert g(3) \rvert > \lvert g(4) \rvert$이므로 탈락,
따라서 1)번이면서 동시에 $\lvert g(3) \rvert = 0$이어야만 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$\lvert g(x) \rvert \geq \lvert g(3) \rvert$임을 확인할 수 있어!

STEP 3 알아둔 모든 단서를 정리하고, 계산하자

우리는 다음 사실을 알아냈어.

$$g(0)=g(3)=0,\quad g'(4)=f(4)=0$$

이때, $x=a$에서 함수 $g(x)$가 극대일 때,

$f(x)=(x-a)(x-4)=x^2-(4+a)x+4a$임을 알 수 있어.

즉, 함수 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4+a}{2}x^2+4ax$이고,

$g(3)=9-\frac{36+9a}{2}+12a=0$이므로 $a=\frac{6}{5}$

따라서 $f(9)=\left(9-\frac{6}{5}\right)\times 5=39$임을 알 수 있어!

다음 내용을 머릿속에 반드시 넣어두고, 앞으로 나오면 **당황하지 말고 차근차근** 해석해보자.

“다항함수 $f(x)$에 대하여 정적분으로 정의된 함수 $\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 부정적분이다.”

★ STYLE01 부록 - 절댓값함수와 차의 함수의 해석

학생들을 어렵게 하려면 별것 없다. '절댓값'을 붙이면 체감 난도 50% 상승!!!
거기에 '차의 함수' 이야기까지 더하면?

EX 1

$y=|f(x)|$의 형태 - 2023학년도 7월 학력평가 20번

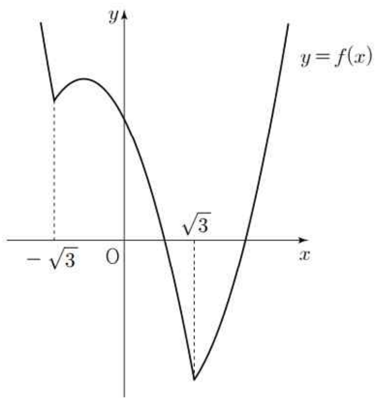
실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\quad g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기 순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

$f(x)$의 그래프를 여기에서 어떻게 해석해야 할까?
그냥 $f(x)=|x^2-3|$이기만 했다면 모르겠는데 거기에 $-2x$까지 붙어버리니 생각하기가 쉽지 않아.
하지만, 이렇게 생각할 수 있어.

"$f(x)+l(x)$ 꼴의 함수는 $l(x)$를 축으로 하는 또다른 함수 $g(x)$로 생각할 수 있다"



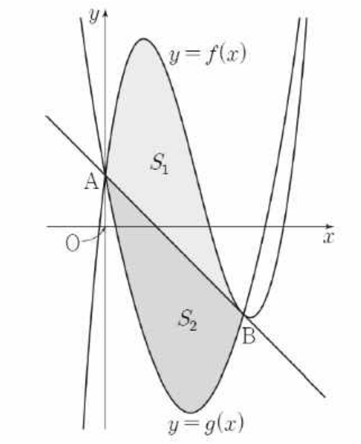
원래 $y=|x^2-3|$은 'x축과' $x=\pm\sqrt{3}$에서 만나는 곡선이지만,
거기에 $-2x$라는 또다른 식이 붙으면
이는 '$y=-2x$'와 $x=\pm\sqrt{3}$에서 만나는 곡선이 되겠지?
그렇기 때문에 그래프가 x축이 아닌,
$y=-2x$를 기준으로 이보다 밑에 있으면 위로 들어 올리는 꼴의 형태로 그려져 있어.

EX 2

차의 함수 해석하기 - 2023학년도 4월(5월 시행) 학력평가 12번

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$S_1=S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, $k>0$)



특히나, 어떤 곡선이 있고 이에 접하거나 만나는 직선이 있으면

그 직선을 축으로 하는 새로운 곡선의 방정식을 떠올리는 것이 매우 좋아.

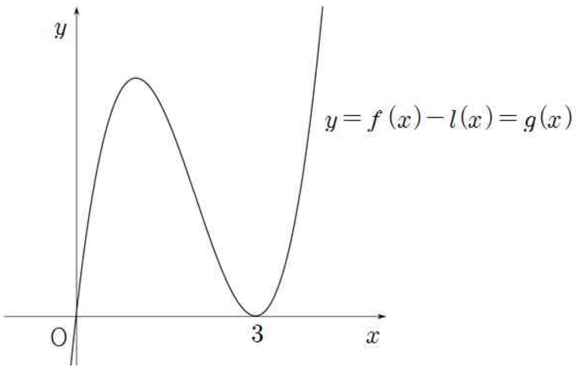
직선 AB의 방정식을 $y=l(x)$라 하면,

$f(x)-l(x)=x^3-6x^2+ax+b$이므로 세 근의 합이 6이고,

점 B의 x좌표인 k가 중근이므로 $k=3$이야.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프를 **직선 $l(x)$가 x축이 되는 평면에 그리면** 다음과 같이 달라지지.

이 그래프를 함수 $g(x)$라고 해보자.



직선 $l(x)$를 축으로 하기로 했으니 **새로운 함수 $g(x)$의 실근은 $f(x)$와 $l(x)$의 교점의 x좌표와 같아.**

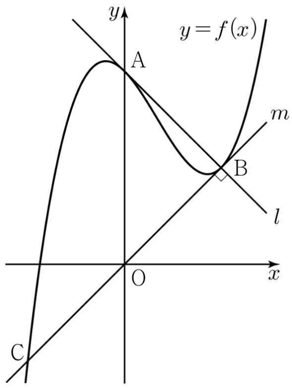
즉, 방정식 $f(x)=l(x)$의 실근과 같으므로 $g(x)=f(x)-l(x)$로 나타낼 수 있으며,

이를 흔히 **차의 함수**라고 부르기도 하지.

이렇게 차의 함수를 이용해 그래프를 생각해본다면, S_1과 S_2를 훨씬 수월하게 구할 수 있겠지?

- 2016학년도 사관학교 A형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.)



"$g(x)+l(x)$ 꼴의 함수는 $l(x)$를 축으로 하는 또다른 함수로 생각할 수 있다"

이 말은 기억나지? 위 그래프에서 $f(x)$와 직선 m(즉, $y=x$)이 만나는 교점의 x좌표를 x좌표가 작은 것부터 α, β라 할 때 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2+x$라고 나타낼 수 있는 이유를 이제 알겠니?
$l(x)=x$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$라 할 때, $g(x)+l(x)$는 x축이 아닌,
'$l(x)$'와의 교점이 α와 β인 삼차함수라는 것을 이용하여 위 그림과 같이 나타낼 수 있어.

- 2015학년도 수능 A형 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x\geq-1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이다.

(나)와 (다)에서 모두 $f(x)$와 $f'(x)$사이의 식을 다루고 있어서,
함수 $f(x)-f'(x)$를 한꺼번에 다룰 수 있을 것 같아.
그런데 $f(0)-f'(0)=0$이고, $x\geq-1$일 때 $f(x)-f'(x)\geq0$이므로
함수 $f(x)-f'(x)$는 $x=0$에서 접함을 알 수 있어.

이와 같이, '차(−)'의 형태로 나타내어진 함수를 봤을 때,
당황하지 말고 '이 역시 (다항)함수이니'라는 생각을 가지며 차근차근 해나가야할 것을 하자!

특히, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 x절편과 같으며,
방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 갖거나, 삼중근을 가지면
함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프 역시 x축에 접하는 양상이 같다는 것을 반드시 알아두어야 해!

STYLE 02

정적분으로 정의된 함수와 x축 - 윗끝, 아랫끝이 같으면 0

STYLE01과 이어지는 면이 없지 않아 있으나, 정적분으로 정의된 함수의 개형을 살펴볼 때 중요한 덕목!

[수학Ⅱ]에서는 일반적인 함수를 다루려야 다룰 수가 없어!

아무리 복잡해야 구간별로 정의된 다항함수에 불과하지…

다항함수는 직접 그려서 볼 수 있으니까, 직접 그리다 보면 x축을 어디에 두어야 할 지 길을 잃기도 해.

가장 기본적인 덕목을 잊은 채…

[2022학년도 10월 학력평가 14번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)\,ds = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

우리만의 실전 풀이

THINKING!

주어진 식에 문자가 너무 많아서 1차 당황. x, t, $s\cdots$ 얘네들을 도대체 어떻게 써야 할까?

가장 중요한 것은 $\int_t^x f(s)\,ds$가 **'x에 대한 함수'**라는 것을 잊어선 안 돼.

t는 어떤 상수를 의미한다고 발문에 나와 있거든!

그리고 STYLE 01에서 봤듯이, 피적분함수 $f(x)$가 다항함수이면 $\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 부정적분,

즉, **사차함수**다 이 말이야. 이때부터 이 문제는 **사차함수의 그래프 개형을 추론**하는 문제로 바뀌어버리지!

STEP 1 거저주는 ㄱ에서 함수의 조건을 생각해보자.

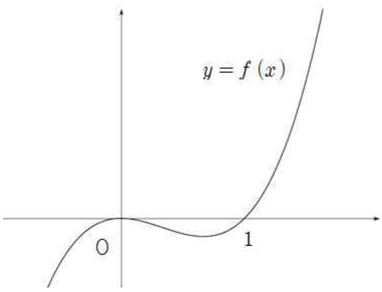
14번 문항을 풀 때는 항상 ㄱ을 보면서 조건으로 주어진 함수를 해석하는 연습을 해야 해.

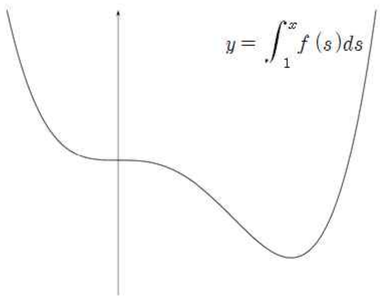
방정식 $\int_t^x f(s)\,ds = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 해보자.

그런데, 우리는 $\int_t^x f(s)\,ds$가 x에 대한 사차함수임을 알아냈으므로, 다음과 같이 바꿔 해석할 수 있지.

"사차함수가 x축과 만나는 교점의 개수를 $g(t)$라 하자."

"$f(x) = x^2(x-1)$일 때, $g(1) = 1$이다."라는 발문을 보고 $t = 1$이라는 것은 눈치챌 수 있어.
일단 $f(x)$의 부정적분 그래프를 먼저 그려보자.



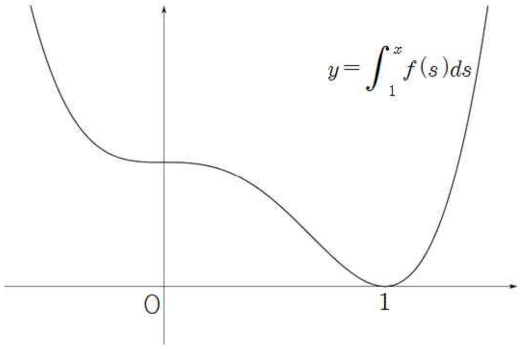


$f(x)$의 부정적분은 상수항이 결정되지 않으므로 오른쪽 그림에는 x축을 그리지 않았어.
그런데, STYLE 01에서 했던 이야기, 기억하고 있니?

$\int_1^x f(s)\,ds$는 **정적분으로 주어져있지만, 적분상수가 정해진 부정적분으로 봐도 전혀 상관이 없어.**

왜냐하면 $x = 1$에서 함숫값이 0이거든!

따라서 $\int_{1}^{x} f(s)\,ds$ 의 그래프는 다음과 같이 그려지겠지?



요약하자면, 앞으로 $y=\int_{t}^{x} f(s)ds$ 꼴의 함수를 그릴때에는 다음과 같이 그리기!

1) $f(x)$의 부정적분 $F(x)$의 그래프를 그린다.

2) 직선 $y=F(t)$를 그린다.

3) 직선 $y=F(t)$를 x축으로 잡는다. 그럼 끝!

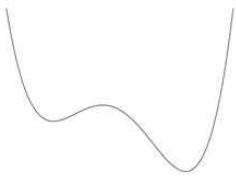
STEP 2 ㄴ은 ㄷ으로 가는 표지판 - 여전히 정적분으로 정의된 함수를 해석하며...

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이도록 하는 $f(x)$의 그래프 개형은 다음 3가지 경우가 있어.

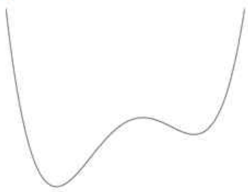
i) |극댓값| > |극솟값|　　ii) |극댓값| < |극솟값|　　iii) |극댓값| = |극솟값|

i), ii), iii) 각각에 대하여 다음과 같은 부정적분 $F(x)$의 그래프가 그려져.

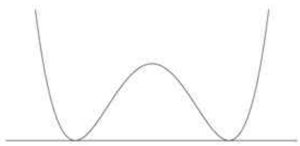
i)



ii)

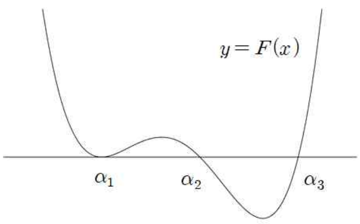


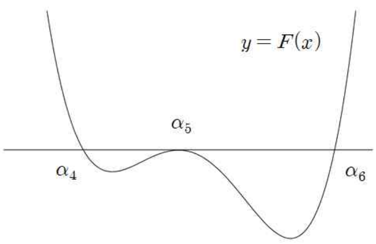
iii)



이 그래프들이 x축과 3개의 점에서 만나도록 하는 t의 값이 존재하는지를 알아보면 돼.
그런데, **직선 $y=F(t)$를 x축으로 잡으면 만사 OK!**
각 케이스 별로 $g(t)=3$이도록 하는 경우가 존재하는지 알아보면 다음과 같아.

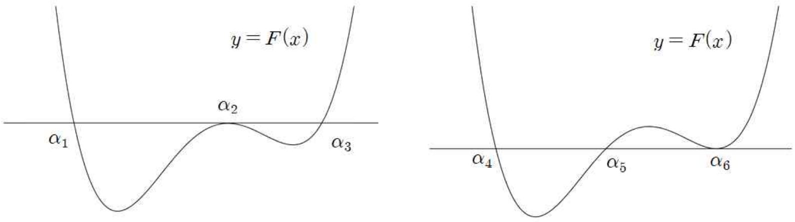
i)





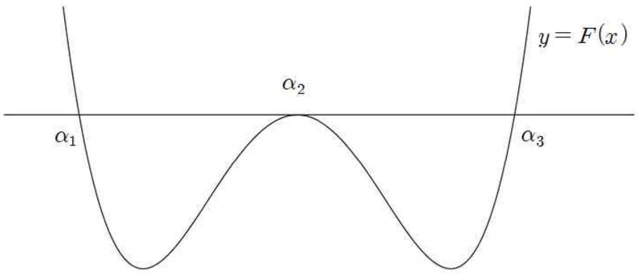
t의 값은 α_1이든, α_2이든, $\cdots$, α_6이든 전혀 상관없어.
$F(\alpha_1)=F(\alpha_2)=F(\alpha_3)$이고, $F(\alpha_4)=F(\alpha_5)=F(\alpha_6)$이니까.

ii)



t의 값은 α_1이든, α_2이든, $\cdots$, α_6이든 전혀 상관없어.
$F(\alpha_1)=F(\alpha_2)=F(\alpha_3)$이고, $F(\alpha_4)=F(\alpha_5)=F(\alpha_6)$이니까.

iii)



역시 마찬가지로 t의 값은 α_1이든, α_2이든, α_3이든 상관 없어.
$F(\alpha_1)=F(\alpha_2)=F(\alpha_3)$이니까! 따라서 ㄴ은 참이라고 할 수 있겠지?
a가 각 케이스 별로 3개(i, ii의 경우 6개) 씩이나 있으니까 말이야.

STEP 3 하이라이트 ㄷ은 ㄴ의 도움을 받아서!

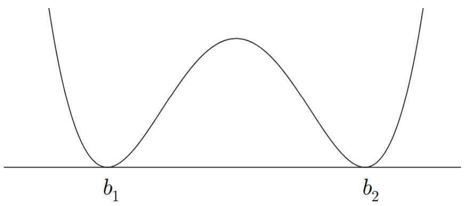
$\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$이기 위해서는 $g(b)$와 $\lim_{t\to b} g(t)$ 중 하나가 4이거나 둘 모두가 3이어야 해.

그런데 $g(x)$는 사차함수이므로 ㄴ에서 본 3가지 케이스 이외에는 두 값 중 하나가 3 이상일 수 없어.

따라서 b의 값을 움직이면서 그래프와 축의 교점의 개수를 살펴보자.

STEP 1의 마지막 내용을 제대로 이해했다면 어렵지 않게 생각해볼 수 있어.

아래의 경우 이외에는 $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$인 경우가 존재하지 않아.



t가 b_1 혹은 b_2보다 조금 작거나 클 때에는 $y=F(t)$가 $y=F(x)$와 서로 다른 네 개의 점에서 만나.
즉, $g(t)=4$이란 소리지.
하지만 $g(b_1)=g(b_2)=2$이므로 $\lim_{t\to b_1}g(t)+g(b_1)=\lim_{t\to b_2}g(t)+g(b_2)=6$이야.
이때 $b_1=0$, $b_2=3$이라 하면 **$g(x)$가 $x=\frac{3}{2}$에 대해 대칭이므로** $f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)$이고,
따라서 $f(4)=4\times\frac{5}{2}\times 1=10$임을 알 수 있어!

다음 내용을 머릿속에 반드시 넣어두고, 앞으로 나오면 **당황하지 말고 차근차근** 해석해보자.

"다항함수 $f(x)$에 대하여 정적분으로 정의된 함수 $\int_a^x f(t)dt$는 $x=a$일 때 x축과 만난다."

★ STYLE02 부록 - 도함수의 대칭성과 원시함수의 대칭성

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.
① $f(a+x)=f(a-x)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에 대하여 대칭이다.
② $f(a+x)+f(a-x)=2b$이면 함수 $f(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다,

①, ②번의 경우, 도함수 $f'(x)$은 어떤 성질을 가질까?

1. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 $f'(a)=0$이다.
   또, $x=a+h$일 때와 $x=a-h$일 때 증가/감소하는 경향성이 정확히 정반대여야 한다.
   이는 '도함수의 부호가 반대'라는 이야기와 같으므로, $f'(a+x)=-f'(a-x)$이다.
   즉, **함수 $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 도함수 $f'(x)$은 점 $(a,\ 0)$에 대하여 대칭이다.**

2. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이려면
   $x=a+h$일 때와 $x=a-h$일 때의 증가/감소하는 경향성이 정확히 일치한다.
   이를 식으로 나타내면 $f'(a+x)=f'(a-x)$이다.
   즉, **함수 $f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 도함수 $f'(x)$은 $x=a$에 대하여 대칭이다.**

STYLE 03

아래에 변수가 있다고..?

낯설게 아랫끝에 변수가 있는 경우 특히 당황을 많이 하는 학생들이 있지.

하지만, 낯설면 낯설수록 알고보면 **'기본적인 개념'**을 질문하고 있는 경우가 많아.

잊지 말자! **'미적분의 기본 정리'**

[2023학년도 대학수학능력시험 12번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

절댓값도 너무 어렵고, x는 왜 아랫끝에 있는지...

기초적인 개념이 흔들리는 친구들은 23 수능 문항을 풀 때 정확히 12번부터 막히기 시작할거야.

하지만, '미적분의 기본정리', 기억하지?

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

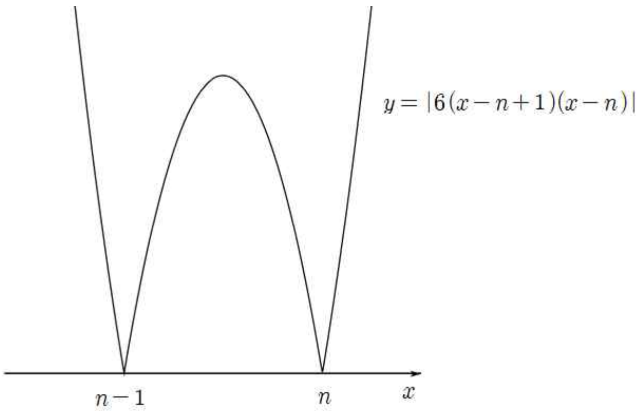
윗끝에 x가 있든, 아랫끝에 x가 있든, 똑같이 처리해주면 돼.

근본적인 개념을 정확히 알고 있다면 결코 헤맬 일이 없지.

STEP 1 $f(x)$가 휘황찬란해 살려줘

절댓값이 많아서 굉장히 복잡해보이지만, 사실 간단해!

절댓값이 있다면, 우선 절댓값 안의 그래프를 파악하는 것이 우선!



보다시피, $n-1 \le x < n$에서 함수 $f(x)$가 **연속**이기 때문에

함수 $|f(x)|$는 $\cap$자 모양 하나라는 것을 알 수 있어.

그렇다면 $f(x)$는 $|f(x)|$와 똑같거나, $|f(x)|$를 x축 대칭한 꼴과 똑같을 거야.

절댓값 안의 값이 음수면 $(-)$가 붙어 나오니까! (STYLE 01 참고)

STEP 2 $g(x)$의 최솟값? 최솟값을 어떻게 구할까...

$f(x)$가 어떻게 생겨먹었는지 알았어.

근데.. $g(x)$가 이상하게 생겨서 접근하기가 힘들지.. 게다가 최솟값을 찾으라니..ㅠㅠ

하지만, STYLE 01에서 강조한 것!

$f(x)$는 이차함수의 구간별 정의될 꼴이기 때문에

피적분함수를 $f(x)$로 하는 정적분함수 $g(x)$ 역시 그 부정적분인 삼차함수와 밀접한 관련이 있다는 것!

그렇다면, 뭔가 **$g(x)$를 미분해서 최솟값을 구하는 편**이 더 낫겠다는 생각이 들지?

피적분함수 $f(x)$가 연속이니 미분도 가능할테고ㅎㅎ

$$g(x)=F(x)-F(0)-\{F(4)-F(x)\}=2F(x)-F(0)-F(4) \quad (F(x)\text{는 } f(x)\text{의 부정적분})$$

$f(x)$가 연속이기 때문에 이를 도함수로 갖는 $F(x)$는 미분가능한 함수야.

이로써 $g(x)$를 '미분'할 수 있는 마인드를 챙길 수 있어.

$$g'(x)=2f(x)$$

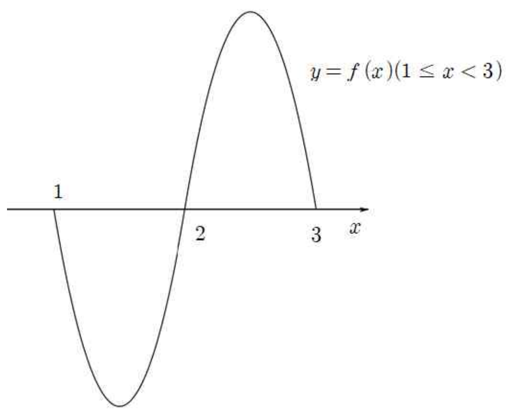
이를 통해 알 수 있는 사실: "$f(x)$가 될 수 있는 그래프 개형을 생각하면 $g(x)$의 개형도 파악할 수 있다!"

이때 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지니 $g'(2)=2f(2)=0$이고, **$f(x)$가 $x=2$에서 증가**해야 하지.

정적분의 개념 문제가 단순 함수 추론으로 바뀌는 순간!

STEP 3 함수 알아낸 후, 계산계산계산

일단, $1 \le x < 3$에서 함수 $f(x)$의 개형은 $x=2$에서 증가해야하기 때문에 다음과 같을 수밖에 없어.



그런데, 왜 굳이 $g(2)=0$이라는 값을 줬을까?

이건 $x=2$를 제발 좀 대입해달라는 평가원의 애원이야. 애원하니 그대로 해줘야겠지?

$$g(2)=\int_0^2 f(t)\,dt-\int_2^4 f(t)\,dt=0,\quad \int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt.$$

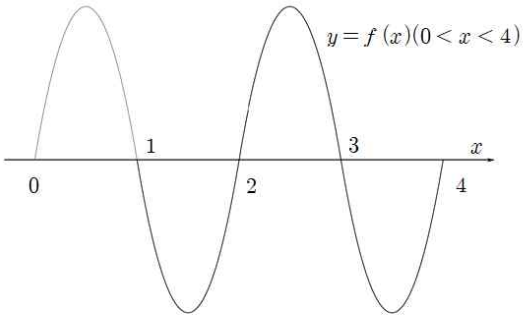
혹시, 변수를 t라고 설정했다고 헷갈려하는 친구들을 위해 잠시 코멘트!

헷갈릴 필요 전혀 없어!

윗끝, 아랫끝에 x라는 문자를 썼기 때문에 어쩔 수 없이 t라는 변수를 잠시 사용했을 뿐이야.

헷갈리지 말고 살펴보면, 그렇지?

$0 \le x \le 2$에서 $f(x)$와 x축이 이루는 넓이가 $2 \le x \le 4$에서 $f(x)$와 x축이 이루는 넓이와 같다는 이야기야. 그렇다면 자동으로 $f(x)$가 정해지지?



이제 계산만하면 끝!

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx = \int_{\frac{7}{2}}^{4} f(x)dx = -\frac{1}{2} \times \frac{|6| \times 1^3}{6} = -\frac{1}{2}$$

[참조] 최고차항의 계수가 n인 이차함수 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$에 대하여

x축과 $y=f(x)$가 이루는 넓이 ➜ $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| = \frac{|n|(\beta-\alpha)^3}{6}$

STYLE 04

이번엔 위/아래 모두 변수가 있다고?

이제 하다하다 위, 아래에 변수를 다 넣어두시겠다?
위/아래에 모두 변수가 있는 경우 다음 세 가지 정도를 염두에 두는 것이 좋아.

[윗끝/아랫끝에 변수가 존재하는 정적분함수를 발견했을 때의 행동강령]

1) **윗끝 ~ 아랫끝까지의 구간에서 피적분함수와 x축이 이루는 도형(의 넓이)**
2) **윗끝과 아랫끝이 같아지는 순간**
3) **직접 식을 써서 구하기 (양변 미분, 부정적분 $F(x)$의 식 등)**

[2023학년도 6월 모의평가 20번]

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

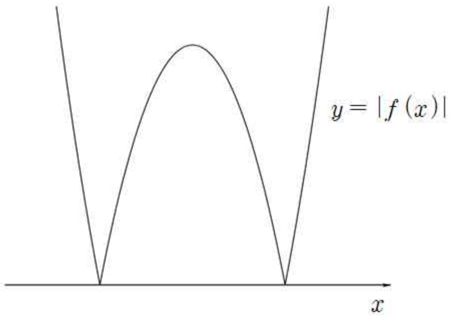
우리만의 실전 풀이

THINKING!

미적분 선택자에게의 유불리를 쟁점으로 구설수에 올랐던 문항이야.
하지만 **위에 적어둔 행동강령**을 잘 따르면 미적분을 선택하지 않은 친구들도
충분히 문제풀이를 수월하게 할 수 있는 문항이었지.
먼저, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 2인 이차함수라는 아주 중요한 정보를 제공하였기 때문에
함수 $f(x)$의 그래프를 그려볼만 하지?
게다가, **이차함수의 '대칭성'**을 이용하여 $f(x)$가 $x=3$를 중심으로 대칭이라는 것도 알 수 있겠네!

STEP 1 넓이의 순간적인 변화 - 기하적 해석

만약 모든 실수 x에 대해 $f(x) \geq 0$이라면 $\int_{x}^{x+1} f(t)dt$가 최소인 지점이 하나밖에 생기지 않으리라는 것을 직접 함수 $f(x)$를 그려보면 알 수 있어. 따라서 함수 $|f(x)|$는 다음과 같이 그려져야 해.



이때, $g(x)=\int_{x}^{x+1} |f(t)|dt$가 최소라는 것은 닫힌구간 $[x,\ x+1]$에서
함수 $y=|f(x)|$와 x축이 이루는 넓이가 최소라는 이야기야.
이는 두 가지 방법으로 구할 수 있어.

(i) 피적분함수가 연속이니, $g(x)$를 미분하자!

$|f(x)|$의 부정적분을 $F(x)$라 하면 $g(x)=F(x+1)-F(x)$이므로 $g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$이야.

ADVICE 절댓값이 있다고 주지하지 말자. 어떤 함수의 부정적분이란, 미분하면 원시함수가 되는 함수이므로
$F(x)$를 미분하면 $|f(x)|$가 되는 것은 당연지사!)

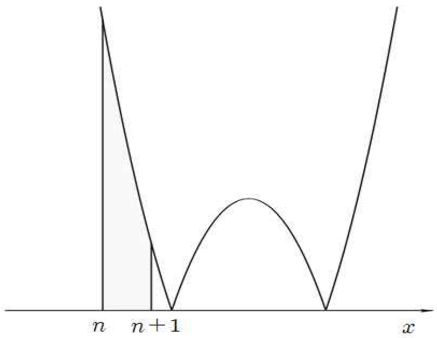
잠깐, $F'(x+1)$이 왜 $f(x+1)$일까? 이는 다음과 같이 생각할 수 있어.

> 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(x+k)$는 $F(x)$를 x축 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로 그 도함수 역시 $f(x)$를 x축 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 $f(x+k)$와 같음.

사실, 미적분 선택자의 경우 합성함수의 미분법을 활용하여 바로 사용할 수 있으나,
미적분 미선택자이더라도 위 사실 정도는 알아두는 것이 좋아!

즉, $g(x)$가 미분가능하므로 그 도함수인 $|f(x+1)|-|f(x)|=0$일 때 $g(x)$가 최솟값(극솟값)을 갖지.
따라서 $|f(1)|=|f(2)|$이고, $|f(4)|=|f(5)|$여야 해.

(ii) 넓이의 순간적인 변화를 살펴보자



위 그림에서 회색으로 색칠된 영역은 $\int_{n}^{n+1}|f(t)|dt$, 즉 $g(n)$이야.
이때, $y=g(x)$는 $x=n$에서 증가할까, 감소할까?
이는 피적분함수의 함숫값을 보면 알 수 있어.
$|f(n)|>|f(n+1)|$이기 때문에 $g(x)$는 $x=n$에서 감소하지. 왜?

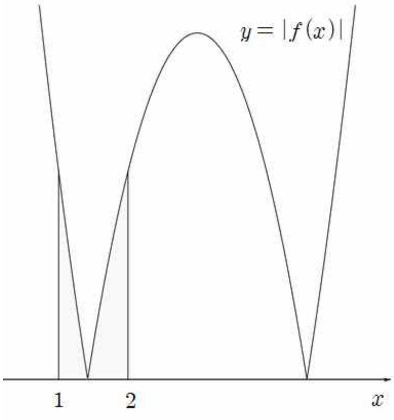
“피적분 함숫값을 직사각형의 높이로 생각하니, x가 커질수록 큰놈이 빠지고 작은놈이 붙더라.”

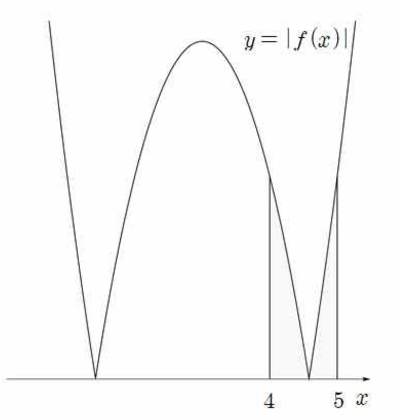
$|f(n)|$은 아랫끝에서의 피적분함숫값, $|f(n+1)|$은 윗끝에서의 피적분함숫값이야.
함수 $g(x)$에 대하여 x가 증가한다는 것은, 곧
아랫끝에서의 피적분함숫값이 사라지고, 윗끝에서의 피적분함숫값이 추가된다는 의미와 같아.

이는 **$|f(n)|$을 높이로 하고 밑변이 한없이 작은 직사각형이 사라지고,**
$|f(n+1)|$을 높이로 하고 밑변이 한없이 작은 직사각형이 생긴다는 것과 같이 해석할 수 있어.

따라서 $|f(n)|$이 $|f(n+1)|$보다 크면 클수록 정적분값은 빠르게 감소한다는 것을 알 수 있지.

그렇다면, $g(x)$가 $x=1$, $x=4$에서 최솟값을 가지려면 어떻게 해야할까?





먼저 왼쪽 그림부터 보면, $g(x)$가 $x=1$일 때 극값을 가져야 하므로 $|f(1)|=|f(2)|$여야 해.
$x<1$일 때에는 계속 $|f(x)|>|f(x+1)|$이기 때문에 $g(x)$가 감소하지.
하지만 $x=1$에서 $|f(1)|=|f(2)|$이고,
x가 1보다 커지면 $|f(x)|<|f(x+1)|$이 되므로 $g(x)$가 증가할 거야.
마찬가지로, $x=4$일 때 $|f(4)|=|f(5)|$이면
$x=4$ 근방에서 $x<4$일 때 $|f(x)|>|f(x+1)|$이므로
$g(x)$가 감소하지만, $x>4$이면 $|f(x)|<|f(x+1)|$이므로 $g(x)$가 증가해.
따라서 $g(x)$가 $x=1$, $x=4$에서 최솟값을 갖기 위해선 $|f(1)|=|f(2)|$, $|f(4)|=|f(5)|$여야 한다!

STEP 2 역시, 계산계산계산

이차함수의 대칭성에 의해 $f(1)=f(5)$임을 알 수 있으므로 $f(x)=2(x-3)^2+k$임을 알 수 있고,
$f(1)=-f(2)$임을 알 수 있으므로 $8+k=-(2+k)$, $k=-5$이지.
따라서 $f(0)=18-5=13$

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 **다항함수의 정적분은 다항함수**

$f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $g(x)=\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$

따라서 정적분으로 정의되어있는 함수 $g(x)$는 **피적분함수 $f(x)$의 부정적분**과 밀접한 관련이 있다.

CHECK 02 **절댓값 함수와 차의 함수의 해석**

"$f(x)+l(x)$ 꼴의 함수는 $l(x)$를 축으로 하는 또다른 함수 $g(x)$로 생각할 수 있다"

➜ $|f(x)|+l(x)$꼴의 함수는 $f(x)<0$인 지점에서 $f(x)+l(x)$를 $l(x)$위로 들어올린다.

"함수 $f(x)$와 직선 $l(x)$가 만나면 방정식 $f(x)=l(x)$의 실근은
함수 $y=f(x)-l(x)$가 x축과 만나는 실근의 양상과 완전히 똑같다"

➜ **직선 $l(x)$가 마치 x축으로 변화**하는 것과 같으므로
새로운 함수 $f(x)-l(x)$에 대하여 $f(x)-l(x)=0$의 실근은 $f(x)$와 $l(x)$의 교점의 x좌표와 같다.
이 함수 $f(x)-l(x)$를 흔히 **차의 함수**라고 부르기도 한다.

CHECK 03 **정적분함수의 x축**

앞으로 $y=\int_t^x f(s)ds$꼴의 함수를 그릴때에는 다음과 같이 그리면 된다.

1) $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 그린다.
2) 직선 $y=F(t)$를 그린다.
3) 직선 $y=F(t)$를 x축으로 잡는다. 끝!

CHECK 04 정적분함수의 대칭성

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

1. $f(a+x)=f(a-x)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에 대하여 대칭이다.

➜ $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 $f'(a+x)=-f'(a-x)$이므로
도함수 $f'(x)$은 점 $(a,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

2. $f(a+x)+f(a-x)=2b$이면 함수 $f(x)$는 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다

➜ $f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이면 $f'(a+x)=f'(a-x)$이므로
도함수 $f'(x)$은 $x=a$에 대하여 대칭이다.

즉, $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 $\displaystyle\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx=2\int_{a}^{a+h} f(x)dx$ 이고,

점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 $\displaystyle\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx=2bh$ 이다.

CHECK 05 윗끝/아랫끝에 변수가 있는 정적분함수

[윗끝/아랫끝에 변수가 존재하는 정적분함수를 발견했을 때의 행동강령]

1) 윗끝 ~ 아랫끝까지의 구간에서 피적분함수와 x축이 이루는 도형(의 넓이)
2) 윗끝과 아랫끝이 같아지는 순간
3) 직접 식을 써서 구하기 (양변 미분, 부정적분 $F(x)$의 식 등)

CHECK 06 이차/삼차함수와 축이 이루는 도형의 넓이

최고차항의 계수가 n인 이차함수 $f(x)$의 실근을 $\alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$라 할 때

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|=\frac{|n|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

최고차항의 계수가 n인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=n(x-\alpha)(x-\beta)^2\,(\alpha<\beta)$일 때

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|=\frac{|n|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

CHECK 07 간단한 합성함수의 미분법 : $\{f(x+k)\}'=f'(x+k)$

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(x+k)$는 $F(x)$를 x축 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로
그 도함수 역시 $f(x)$를 x축 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 $f(x+k)$와 같음.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2013학년도 수능 나형 21번] - Check 01

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

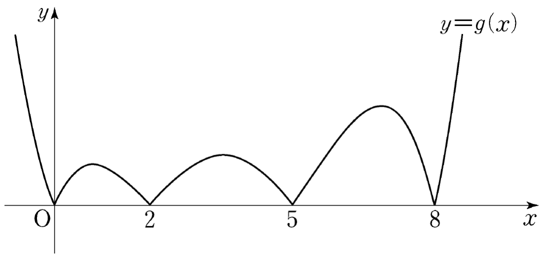
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

002 [2013학년도 수능 가형 19번] - Check 01, Check 02, Check 07

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

003 [2016학년도 수능 A형 20번] - Check 04

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

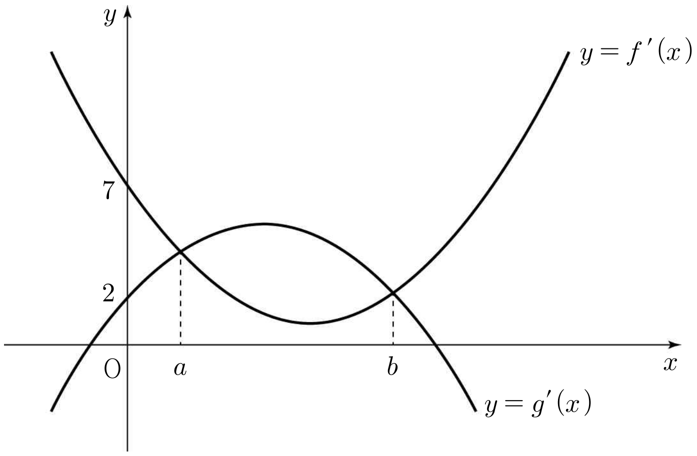
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

004 [2016학년도 7월 나형 18번] - Check 02

그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의a x좌표는 a, $b(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

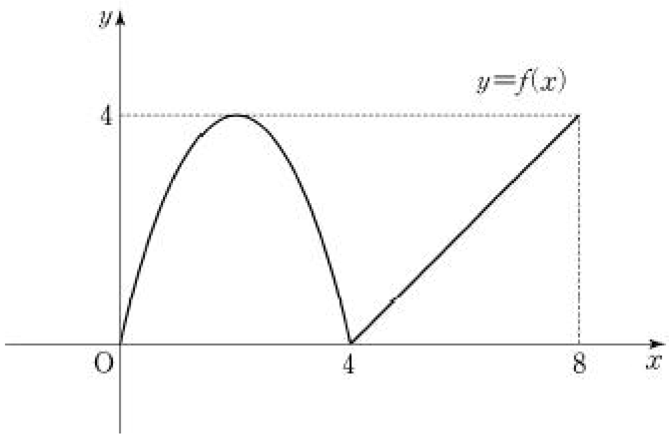
005 [2017학년도 9월 나형 29번] - Check 01, Check 05, Check 06, Check 07

닫힌구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\ (0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



006 [2018학년도 7월 나형 20번] - Check 01, Check 05, Check 06

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x)=-f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

007 [2020학년도 3월 가형 30번] - Check 02, Check 03, Check 04

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

008 [2020학년도 10월 나형 20번] - Check 01, Check 03

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$의 값은?

[4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

009 [2020학년도 10월 나형 30번] - Check 01, Check 04

함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
$\left|\lim_{t\to a+} h(t) - \lim_{t\to a-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

010 [2022학년도 사관학교 22번] - Check 01, Check 03

일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x (x-2)f(s)\,ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때,
다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

011 [2023학년도 6월 14번] - Check 01, Check 05

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	②	2	⑤	3	①	4	⑤	5	43
6	⑤	7	432	8	②	9	80	10	56
11	④								

해 설

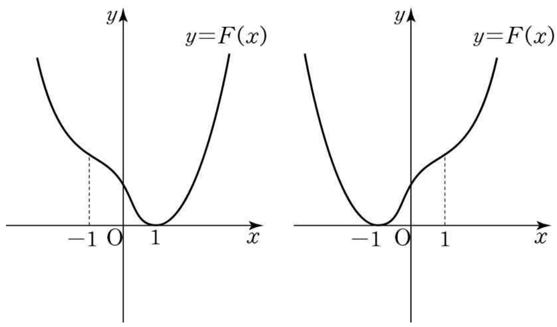
001

[정답] ②

$f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

이때, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서 $F'(x)=f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극값을 가진다.

한편, 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $y=F(x)$의 그래프의 개형이 다음 두 그래프 중 하나와 같아야 한다.



따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $f(-1)\leq 0$ 또는 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$f(-1)\leq 0$에서 $a\leq -2$, $f(1)\geq 0$에서 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$, 즉, $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.

따라서 삼차함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나 x축과 접해야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로

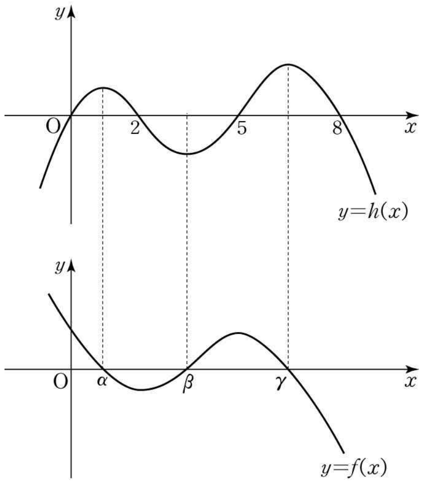
부등식 $f(1)\times f(-1)\geq 0$이 성립해야 한다.

$(-2+a)(2+a)\geq 0 \quad \therefore\ a\leq -2$ 또는 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

002

[정답] ⑤



$F'(x) = f(x)$라 하면 $\int_0^x f(x)dx = F(x) - F(0)$

$F(x) - F(0) = h(x)$라 하자.

$f(0) > 0$이므로 $x = 0$의 가까운 오른쪽에서 $\int_0^x f(x)dx > 0$

따라서 $y = h(x)$와 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

ㄱ. 방정식 $f(x) = 0$은 구간 $(0,\ 2)$, $(2,\ 5)$, $(5,\ 8)$에서 각각 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $x = 0$에서 감소 상태에 있으므로 $f'(0) < 0$ (참)

ㄷ. $h(x) = kx(x-2)(x-5)(x-8)$ $(k < 0)$이라 할 때

$\int_m^{m+2} f(x)dx = h(m+2) - h(m)$이므로

$m = 1$일 때, $h(3) - h(1) = 58k < 0$

$m = 2$일 때, $h(4) - h(2) = 32k < 0$

$m = 3$일 때, $h(5) - h(3) = -30k > 0$

$m = 4$일 때, $h(6) - h(4) = -80k > 0$

$m = 5$일 때, $h(7) - h(5) = -70k > 0$

$m = 6$일 때, $h(8) - h(6) = 48k < 0$

$m = 7$일 때, $h(9) - h(7) = 322k < 0$

$m \geq 8$일 때, $h(m+2) - h(m) < 0$

따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx > 0$을 만족시키는 자연수 m은 $3,\ 4,\ 5$로써 3개다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

003

[정답] ①

$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$이므로

다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0) = 0$이다.

$h(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x$로 놓으면

$h'(x) = (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \cdots + a_1$

이므로 $h'(-x) = h'(x)$를 만족시킨다.

$$\int_{-3}^{3} (xh'(x) + 5h'(x))dx = 2\int_0^3 5h'(x)dx$$

$$= 10\Big[h(x)\Big]_0^3$$

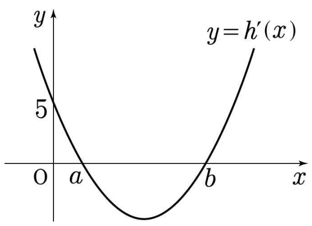
$$= 10(h(3) - h(0))$$

$10(h(3) - h(0)) = 10$에서 $h(3) = h(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

004

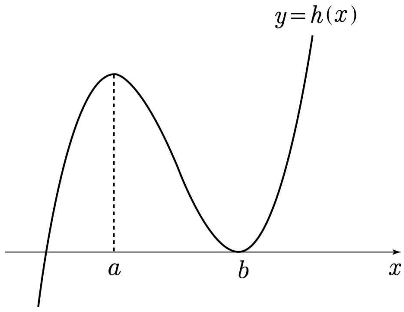
[정답] ⑤

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$ ➜ $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

005

[정답] 43

$0\le a\le 4$에서 $g(a)=\displaystyle\int_a^{a+4}f(x)dx$라 하자.

(ⅰ) $a=0$일 때,

$$g(0)=\int_0^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^4\{-x(x-4)\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

(ⅱ) $0 < a < 4$일 때,

$$g(a) = \int_a^4 f(x)dx + \int_4^{a+4} f(x)dx$$

$$= \int_a^4 \{-x(x-4)\}dx + \int_4^{a+4}(x-4)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_a^4 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_4^{a+4}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3}$$

(ⅲ) $a = 4$일 때,

$$g(a) = \int_4^8 f(x)dx = \int_4^8 (x-4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_4^8 = 8$$

$g'(a) = a^2 - 3a = a(a-3)$이므로

$g'(a) = 0$에서 $0 < a < 4$이므로 $a = 3$

함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	↘	극소	↗	8

따라서 $g(a)$는 $a = 3$에서 최솟값을 가진다.

$$g(3) = \frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{3}{2} \times 3^2 + \frac{32}{3} = 9 - \frac{27}{2} + \frac{32}{3} = \frac{37}{6}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(a)$의 최솟값은 $\frac{37}{6}$이므로 $p = 6$, $q = 37$ $\therefore$ $p + q = 43$

006

[정답] ⑤

ㄱ. $f'(-x) = -f'(x)$이고 $f'(1) = 0$ ➜ $f'(-1) = -f'(1) = 0$ (참)

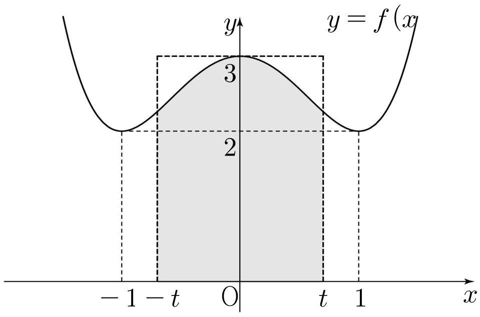
ㄴ. $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(0) = 0$이므로

$f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$ ➜ $f(x) = x^4 - 2x^2 + C$

이때 $f(1) = 2$이므로, $C = 3$이고, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$이 된다.

$f(-x) = f(x)$이므로 $\int_{-k}^0 f(x)dx = \int_0^k f(x)dx$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 의 그래프는 그림과 같다.



$x=-t$, $x=t$, x축, $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이 $\int_{-t}^{t} f(x)dx$ 는

$x=-t$, $x=t$, x축, $y=3$으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 $6t$보다 작다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

007

[정답] 432

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 $g(x)=\int_{t}^{x} f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$는 미분가능하다.

$g(x) \geq g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x) < g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$은 $g(x)-g(a) \neq 0$인 모든 x에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$를 만족시키는 x의 값을 k라 하면,

$g(k)=g(a)$이므로

$$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

(i) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 같을 때

$$\lim_{x \to k-} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x \to k+} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고 $f(k)=0$일 때

$$\lim_{x \to k-} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x \to k+} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k) \neq 0$ 일 때,

$$\lim_{x \to k-} \frac{|g(x)-g(a)|}{x-k} \neq \lim_{x \to k+} \frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1 이므로

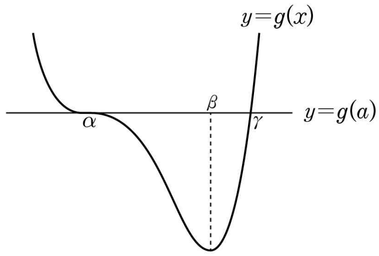
$$g(x)-g(a)=0, \ g'(x)=f(x) \neq 0$$

인 x 가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

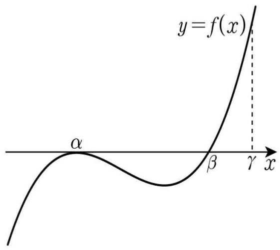
그러므로 사차함수 $y=g(x)$ 는 단 하나의 극솟값을 갖고,
함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$ 인 방정식 $g(x)-g(a)=0$ 의 실근을 α, 함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가질 때의 x 의 값을 β 라 하면
α, β 의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\alpha<\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$
(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.
따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서 $h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$
따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 : $h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0 \neq 27$ 이므로 $a \neq 2$

$\beta=2$ 이면 : $h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$ 이고, $h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로 $h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$

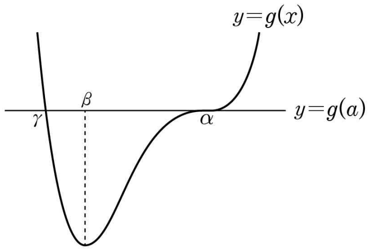
$$\int_2^3 f(s)ds=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$
$$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$$
$$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$$

이므로 방정식을 풀면 $a=-1$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

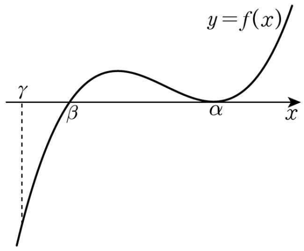
이때, $a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다. 따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다. ➜ $f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ ➜ $f(5)=4\times36\times3=432$

008

[정답] ②

$g'(x) = f(x) - \{f(x) + xf'(x)\} = -xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x) = -xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$이다.

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x) = -12x(x-3)(x-a)$

사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다.

즉, $a=0$이다.

$g'(x) = -12x^2(x-3) = -12x^3 + 36x^2$

따라서 $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,dx = \Big[-3x^4 + 12x^3\Big]_0^1 = 9$

009

[정답] 80

$g(x) = \displaystyle\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (x-1)f(x) = \begin{cases} -3x^3 + 3x^2 & (x<1) \\ 2x^2 - 8x + 6 & (x \ge 1) \end{cases}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4 + x^3 + C_1 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + C_2 & (x \ge 1) \end{cases} \quad (C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$

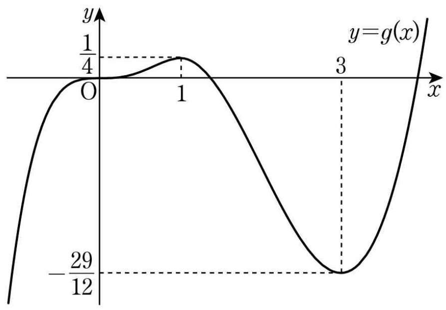
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고

$-\dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{2}{3} - 4 + 6 + C_2$에서 $C_2 = -\dfrac{29}{12}$

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4 + x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \dfrac{29}{12} & (x \ge 1) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t>\dfrac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t=\dfrac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\frac{1}{4}$과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$ ➜ $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

010

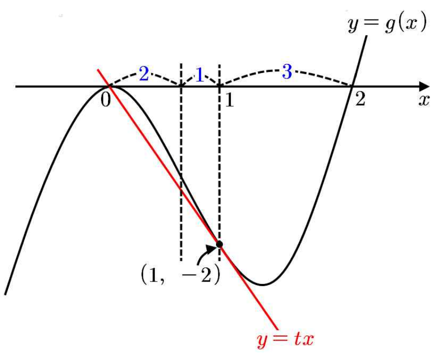
[정답] 56

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 함수 $g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$는 삼차함수이다.

$g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)ds=0$에서 $g(2)=g(0)=0$이므로 방정식 $g(x)=0$의 세 근을 $x=0,\ 2,\ \alpha$라 하자.

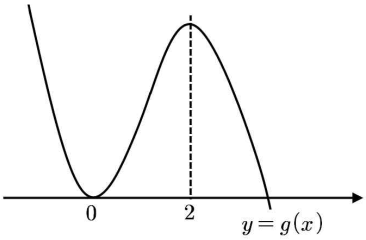
이때, $y=tx$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이므로 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속이려면 $y=g(x)$는 x축에 접해야 한다.
따라서 $\alpha=0$ 또는 2

(i) $g(x)=mx^2(x-2)$일 때
m이 양수일 때와 음수일 때를 나누어 $y=g(x)$와 $y=tx$를 그려보면 다음과 같다.
$m>0$일 때 :



이때의 t의 값은 -2가 되어야 하고 $y=g(x)$와 $y=tx$의 교점은 $(1,\ -2)$이다.
$\therefore\ g(x)=2x^2(x-2),\ g(4)=64$

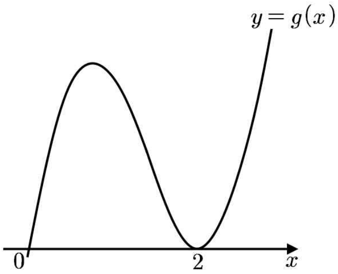
$m<0$일 때 :



$g(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

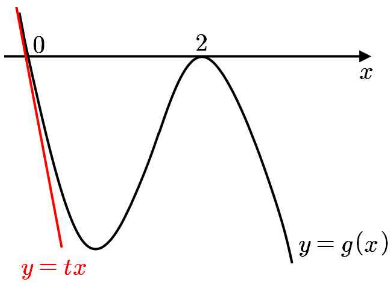
(ⅱ) $y=mx(x-2)^2$일 때

$m>0$일 때 :



$g(x)$가 $x=2$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

$m<0$일 때 :



마찬가지로 이때의 t의 값은 -2이므로

$g'(x)=m(x-2)^2+2mx(x-2)$ ➜ $g'(0)=4m=-2$, $m=-\dfrac{1}{2}$이므로 $g(4)=-8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $g(4)$의 값의 합은 $64-8=56$

011

[정답] ④

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$, $x\geq 0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)$ ➜ $-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$ ➜ 따라서 $f(0)=0$이다. (참)

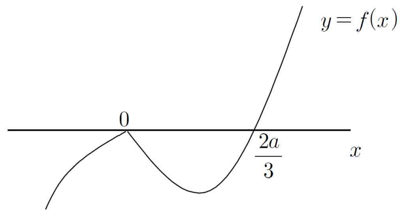
ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 $g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수) 로 놓으면

$g'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$

(ⅰ) $a>0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0) \end{cases}$$

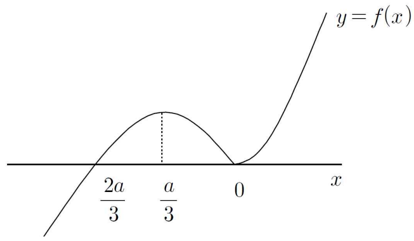
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ⅱ) $a<0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x\geq 0) \end{cases}$$

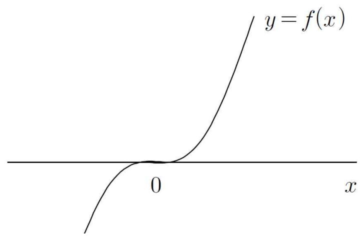
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(ⅲ) $a=0$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다. (거짓)



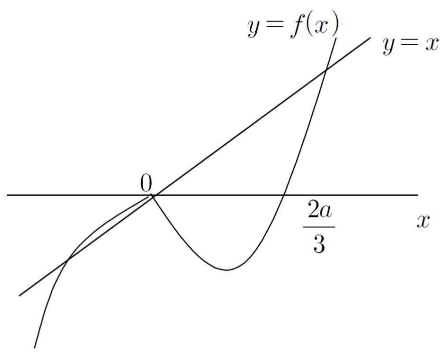
ㄷ. ㄴ 해설에서 (ⅰ)인 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서 $0<a<\frac{1}{2}$

또한, $x<0$일 때 $f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$이므로

$\lim_{x\to 0-} f'(x)=2a$

이때, $0<2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ⅱ) ㄴ 해설에서 (ⅱ)인 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서 $-\frac{1}{2}<a<0$

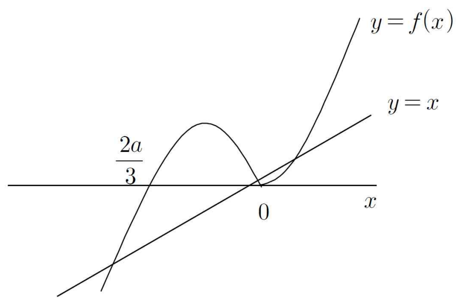
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$ 이므로

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=-2a$

이때 $0<-2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

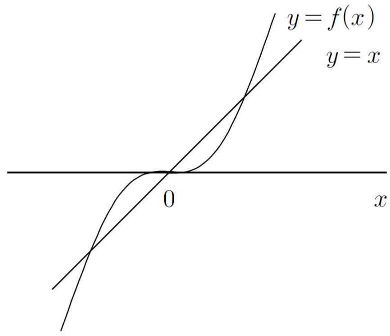


따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ⅲ) ㄴ 해설에서 (ⅲ)인 경우

$f(1)=3$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이

세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.