설레임 모의고사
Team SeolName

설 치 킨 사 줘 요
레 임 구 모 지 설
나 랏 말 총 하 레
수 학 가 정 철 임
평 가 원 리 설 팀
내 신 화 분 석 집

Analysis

설레임 기출분석집

SPECIAL EDITION
9모까지의 여정, 우리는 무엇을 얻을 수 있었는가

9S 우리는 무엇을 얻을 수 있었는가?

ADVICE | 킬러 문항만 보면 너무도 쉬운 문항이었지만, 그럼에도 1컷이 88~92에서 머무르고 있는 이유는 단 하나, 준킬러의 위엄. 미적 28번, 공통 13번, 공통 21번 등, 많은 고난과 역경이 있었습니다. 어떻게 대비할 수 있었는지, 또 저희 주간지에는 어떤 내용이 이미 반영되어 있었는지 한번씩 리마인드하고, 수능을 향해 나아가봅시다.

1주차에서 배웠던 것들

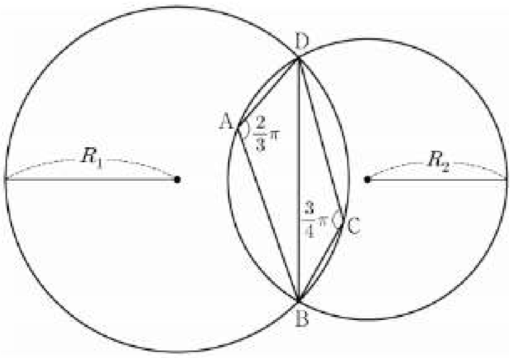
사인법칙과 코사인법칙의 활용 - 원 위의 점들이 나온다면…

[2024학년도 9월 모의평가 20번]

그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=2,\ \overline{\mathrm{AD}}=1,\ \angle\mathrm{DAB}=\frac{2}{3}\pi,\ \angle\mathrm{BCD}=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD 가 있다. 삼각형 BCD 의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD 에서 사인법칙에 의하여 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$ 이고, 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여 $R_2=$ (가) $\times\overline{\mathrm{BD}}$ 이다. 삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BD}}^2=2^2+1^2-($ (나) $)$ 이므로 $R_1\times R_2=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$ 이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 1주차 주간지에서 다음과 같은 내용을 학습한 적이 있어.
조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 보고 올 수 있도록!

STYLE 04

코사인을 쓸까, 사인을 쓸까

도형 문제 풀다가 한 번쯤 했던 고민, 코사인법칙을 써야할지, 사인법칙을 써야할지...
항상 고민되지만 결국에는 자기도 모르게 하나를 골라 쓰고 있는 경우가 많다.
물론, 도형 문제 특성 상 어떠한 "완벽한 기준"이 있는 건 아니지만 적어도 이 파트에서는
코사인법칙과 사인법칙 중 어떤 것을 써야할 지에 대한 판단의 원리를 세워주고자 한다.

STEP 1 **태초마을로**

사인법칙과 코사인법칙을 사용하는 가장 근본적인 상황은 다음과 같아.

1) 삼각형이 있고, 외접원이 있다면 사인법칙을 사용한다!

2) 두 변의 길이와 끼인각의 정보가 있든지, 세 변의 길이가 있다면 코사인법칙을 사용한다!

이 기초적인 내용을 사용하는 아주 기본적인 문항이야. 20번이라고 지레 겁먹을 필요가 전혀 없지?
사실, 문항 난도 배열의 기조가 바뀌기 전에도, 20번 문항은 겁먹지 말고 도전하면 충분히 풀 수 있는 문항이었어.
이제 더 마음을 열고 도전해보자.

STEP 2 **뭐야? 그냥 넣으면 돼?**

기본적인 상황을 알았으면 이제 대입만 하면 돼.

(가) $2R_2 = \dfrac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$임을 알고 있으며, $\sin\frac{2}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이니

$R_2 = \dfrac{\overline{BD}}{2\sin\frac{2}{3}\pi} = \dfrac{\overline{BD}}{\sqrt{3}} = \overline{BD} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$임을 알 수 있어. 그러니 $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(나) 두 변의 길이($\overline{AD}$, $\overline{BA}$)를 알고 있으며, 그 사이 끼인 각$\left(\frac{2}{3}\pi\right)$을 정확히 알고 있으니

코사인법칙을 사용하면 $\overline{BD}^2$을 정확히 구할 수 있겠지.

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{BA} \cdot \cos\frac{2}{3}\pi = 2^2 + 1^2 - 2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{7}$ 이므로

$q = 2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

(다) $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이를 알아냈으니 R_1, R_2를 모두 구할 수 있겠지? 위에 적혀있는 대로 구해보면...

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{7} = \frac{\sqrt{14}}{2}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad R_1 \times R_2 = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = r$$

마지막으로 $p \times q \times r = -\frac{7\sqrt{2}}{3}$임을 계산해낸 뒤,

제곱해서 9를 곱하면 $9 \times (p \times q \times r)^2 = 98$ 임을 알 수 있겠네.

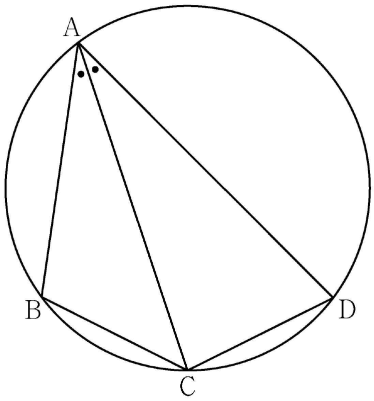
사실, **2023 수능 11번**을 보더라도 **'삼각함수의 도형 활용이 그다지 어렵게 나오지 않을 수도 있다'**는 걸 암시하였음을 알 수 있어. 그러나 삼각함수의 활용 문항을 봤을 때, 그다지 복잡하지 않은 것 같으면 과감히 도전해보자.

참고 - 2023학년도 수능 11번

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}} = 5,\ \overline{\mathrm{AC}} = 3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}} = 7,\ \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD}$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



[정답] $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

2/4/6주차에서 배웠던 것들

정적분으로 정의된 함수 - 어차피 다항함수니까 ...

[2024학년도 9월 모의평가 22번]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^2 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 2/6주차 주간지에서 다음과 같은 내용을 학습한 적이 있어.

조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 보고 올 수 있도록!

우리만의 실전 풀이

THINKING!

미적분을 학습한 학생이라면 오히려 피적분함수 $f(x)$에 대한 조건을 보지 못하고 먼 길을 헤맬 수 있어.
하지만 $f(x)$에 대한 식을 아주 직접적으로 제시하였기 때문에 함수 $g(x)$의 그래프 개형을 생각할 수 있지.

잠깐, 그 전에! $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$라는 걸 모르진 않을 거라 믿을게..?

그래서, 사실 정적분으로 주어져있지만, 적분상수가 정해진 부정적분으로 봐도 전혀 상관이 없어.
즉, 정리하면 정적분으로 정의되어있는 함수 $g(x)$는 피적분함수 $f(x)$의 부정적분과 밀접한 관련이 있음을 머릿속에 탑재할 필요가 있다 이 말이야.

STYLE 02

정적분으로 정의된 함수와 x축 - 윗끝, 아랫끝이 같으면 0

STYLE01과 이어지는 면이 없지 않아 있으나, 정적분으로 정의된 함수의 개형을 살펴볼 때 중요한 덕목!
[수학Ⅱ]에서는 일반적인 함수를 다루려야 다룰 수가 없어!
아무리 복잡해야 구간별로 정의된 다항함수에 불과하지…
다항함수는 직접 그려서 볼 수 있으니까, 직접 그리다 보면 x축을 어디에 두어야 할 지 길을 잃기도 해.
가장 기본적인 덕목을 잊은 채…

STEP 1 주어진 등식을 해석하는 방법에 대하여

우선 (가) 조건을 해석해볼거야. 그런데 주어진 식을 변형하지 않고 해석이 되니?
(음.. 이게 된다면 그대는 굳이 이 칼럼을 볼 필요는 없을 듯 하오.)
일반적으로는 바로 이해가 가진 않지. 그렇기 때문에 우리가 이 식을 적당히 변형해야 함은 필연적이야.
평가원은 절대 발상적 사고를 요구하지 않아.
따라서 가급적 식을 적게 변형하고 해석을 어렵게 하는 것이 평가원 문제의 특성이지. 이 문제도 마찬가지야.
결국 변형이라고 하는 것은 어지간하면 다음 세 가지 중에 하나로 결정이 돼.

① 각 항을 적당히 이항하기

② 각 항을 적당히 곱하고 나누기

③ 양변에 적당히 더하고 빼기

굳이 평가원이 선호할만한 순서를 나누자면 ① ⇒ ② ⇒ ③ 순이긴 해.
다시 말하지만 평가원은 '없던 걸 만드는 것'보다는 '있던 걸 새롭게 해석하는 것'을 좋아하는 집단이기 때문!

STEP 1 **또다시, 태초마을로**

피적분함수 $f(x)$가 다항함수라면

정적분으로 정의되어있는 함수 $\int_a^x f(t)dt$ 역시 다항함수 $F(x)-F(a)$로 해석할 수 있다

는 것, 기억하니? 그래서 정적분으로 정의되어있는 함수를 다룰 때 취할 수 있는 가장 기본적인 액션으로 다음을 이야기했었어.

1) 윗끝, 아랫끝이 같다면 함숫값은 0이다
2) 항등식이 주어져있다면 양변을 미분해본다.

사실, 이 문항은 위 두개만 쓰면 바로바로 풀리는 문항이야 (...)

STEP 2 **뭐야? 또 그냥 넣으면 돼?**

기본적인 상황을 알았으면 이제 대입만 하면 돼.

(가) 양변에 $x=1$를 대입하면 $0=f(1)-3$, $f(1)=3$임을 알 수 있다.
또한, 양변을 미분하면 $f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$이므로 모든 실수 x에 대하여
$xf'(x)=4x$임을 알 수 있고, $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)$역시 다항함수이다.
$\therefore\ f'(x)=4$, $f(x)=4x-1$.
(* 이때, $f'(x)=4$에 $x\neq0$이라는 조건이 붙지 않아도 되는 이유는 **f가 애초에 다항함수이므로 도함수가 연속**이기 때문!)

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)$라는 형태를 잘 보면, $F(x)G(x)$를 미분한 형태라는 것을 알 수 있어.
혹시, 그것을 눈치채지 못하더라도 $f(x)G(x)+F(x)g(x)$가 3차식이라는 것을 통해 $g(x)$ 역시 일차함수임을 눈치챌 수 있어. 두 가지 방식으로 모두 풀어보자.

(i) 곱의 미분 형태를 알아봤을 경우

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_1=\left(2x^2-x+C_2\right)\times G(x)$

이때, 위 등식은 x에 대한 항등식이므로 계수비교법에 의해 $G(x)=\left(x^2+x+C_3\right)$임을 알 수 있어.

즉, $g(x)=2x+1$, $\int_1^3 g(x)dx=\left[x^2+x\right]_1^3=12-2=10$

(ii) 곱의 미분 형태를 못알아봤을 경우

$g(x)=2mx+n$이라 하면 $(4x-1)\left(mx^2+nx+C_1\right)+\left(2x^2-x+C_2\right)(2mx+n)=8x^3+3x^2+1$

이고, 위 등식이 x에 대한 항등식이므로 계수비교법에 의해 $4m+4m=8$임을,

또 $-m+4n-2m+2n=-3m+6n=3$임을 알 수 있어. 따라서 $m=1$, $n=1$이야.

그렇다면 $g(x)=2x+1$이겠지? 이하 계산과정은 생략~

감히 예측하는 말이지만, 앞으로 번호대가 난도를 결정한다는 원칙이 점점 흐려질 가능성이 커보여.
앞에서 매우 어려운 문항을 출제하더라도, 뒤에서 이 문항과 같이 완전히 힘을 뺀 문항이 나올 수도 있을 것 같고..
그러니 22번이라고 **지레 겁먹지 말고, 앞에서 문항이 풀리지 않는다면 22번도 과감하게 도전**해보는 걸로 하자.
물론, 지금처럼 좀 풀이 각이 쉽게 보일때만 ^^;; 안그러면 차라리 앞 번호를 먼저 보는게 나을거야.
(수능에서 22번이 어렵게 나왔다고 **우리보고 뭐라 하기 없기** ㅠㅠ 우리는 가능성을 제시했을 뿐..)

비슷한 유형의 문항을 하나 소개할게.

참고 - 2022학년도 9월 모의평가 11번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

[정답] 8

※ Special Features - 미적이들과 상위권 확통/기하러들을 위하여

(확통기하러들 미안.. 아직 확통/기하를 주제로 주간지를 안써서...) : 2024학년도 9월 모의평가 28번

실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

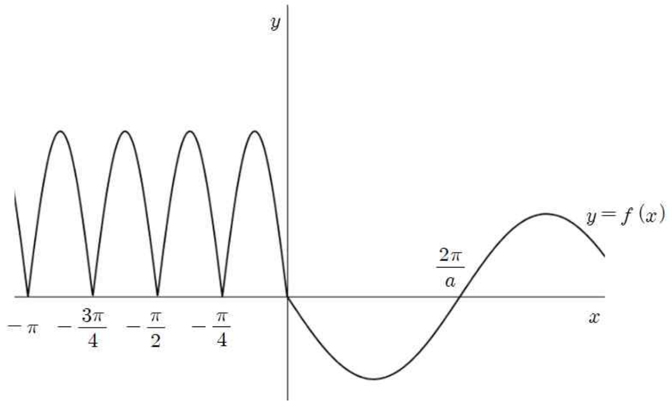
$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

위 문항 역시 2주차 주간지와 4주차 주간지에서 학습한 내용을 충분히 숙지했다면 완벽하게 풀 수 있었는데,
조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 '2주차 STYLE 01, STYLE 03', '4주차 STYLE 02'를 보고 올 수 있도록!

STEP 1 $f(x)$를 먼저 알아볼까나

정적분으로 정의된 함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$는 피적분함수 $f(x)$와 x축이 이루는 넓이와 밀접한 연관성이 있어. 근데, $f(x)$를 그리기가 너무 쉽지? $f(x)$를 제발 그려달라는 평가원의 간청이란다.



STEP 2 절댓값함수의 미분가능은 함숫값이 0일 때를 보아야한다

$x=-a\pi$인 상황을 한번 주목해보자. 왜냐하면, 절댓값이 포함된 함수인 경우
$x=0$에서의 교점이 첨점이냐(즉, 미분계수가 정의되지 않느냐),
아니냐(즉, 미분계수가 정의되느냐, 다른 말로 'x축에 접하느냐')에 따라 미분가능할수도, 가능하지 않을수도 있거든.

$f(x)\geq 0$이라서 함수 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$는 $x=-a\pi$에서 계속해서 증가하는 상황이고,

$g(-a\pi)=0$이니 $x<-a\pi$에서 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt<0$일 거야.

그러니 $x<-a\pi$에서 $g(x)=-\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$이어야겠지?

마찬가지로, $x>-a\pi$에서 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt>0$이니 $x>-a\pi$에서 $g(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$이어야 해.

그런데, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이기 때문에, 다음 등식이 성립해.

$$\lim_{x\to -a\pi-} g'(x)=\lim_{x\to -a\pi+} g'(x)$$

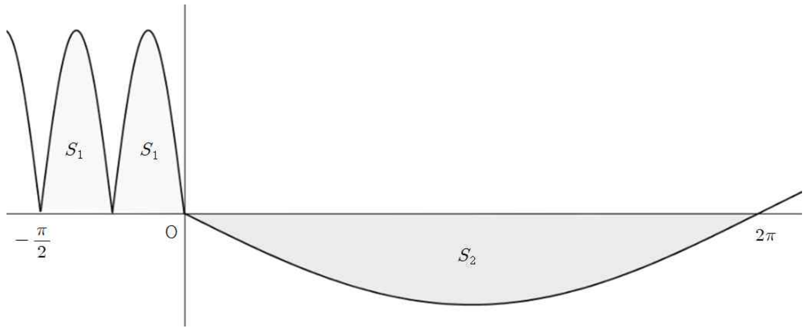
좌변은 $-f(-a\pi)$와 같고, 우변은 $f(-a\pi)$와 같아.
즉, $-f(-a\pi)=f(-a\pi)$라는 의미이니 $f(-a\pi)=0$이어야 한다는 결론을 도출할 수 있어.
어때? 2주차에서 배웠던 '피적분함수가 다항함수라면 정적분도 다항함수처럼 다룰 수 있다'는 마인드와,
4주차에서 배웠던 '절댓값함수를 다룬다면 함숫값이 0이 되는 지점을 면밀히 살펴야한다'는 마인드가
역시나 실전에서도 적용되지? 즉, $a=\frac{n}{4}$여야 하겠구나! (단, n은 자연수)

↓

STEP 3 다시, 함숫값이 0일 때를 보아야한다

$g(x)=0$이 될 수 있는 또다른 경우가 있어. 언제일까?
아마 다음과 같은 그래프를 생각했다고 믿어..^^

$a=\frac{1}{2}$일 때 …



위와 같을 때, 즉 $y=2\sin 4x$와 x축, y축, $x=\frac{\pi}{4}$가 이루는 도형의 넓이를 S_1,

$y=\sin ax$와 x축, y축, $x=\frac{\pi}{a}$가 이루는 도형의 넓이를 S_2라 할 때,

$\int_{-a\pi}^{\frac{2\pi}{a}} f(t)dt = 4aS_1 - S_2 < 0$이면 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right| = 0$이도록 하는 x가 $0<x<\frac{\pi}{a}$에서 존재해.

그러한 실수 x를 u라고 한다면, $g(u)=\int_{-a\pi}^{u} f(t)dt=0$이겠지? 역시 위에서 했던 논리와 마찬가지.

$$\lim_{x\to u-} g'(x) = \lim_{x\to u+} g'(x)$$

이어야 하며, $-a\pi<x<u$일 때엔 $g(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$이고,

$u<x<\frac{\pi}{a}$일 때엔 $g(x)=-\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 이니, 또 역시 $f(u)=0$이어야 하는디, $u<\frac{\pi}{a}$잖아?

근데, $0<x<\frac{\pi}{a}$에서 $f(x)=0$의 실근이 존재할 수 있나? 없지? 그러니 위와 같은 경우는 안되는거야. 즉,

$4aS_1 \geq S_2$여야만 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해!

이제 계산만 해주면 끝이지.

$S_1=1$, $S_2=\frac{2}{a}$이니 $4a\geq\frac{2}{a}$, 즉 $a\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 돼.

따라서 가능한 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$임을 알 수 있어.

사실, 이 문항을 풀면서 작년 수능 12번이 많이 떠올랐어. 아래 문항도 꼭 풀어보길 바라.

참고 - 2023학년도 수능 12번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \leq x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

[정답] $-\frac{1}{2}$

3주차에서 배웠던 것들

수열의 귀납적 정의 - 기여, 안기여?

[2024학년도 9월 모의고사 12번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

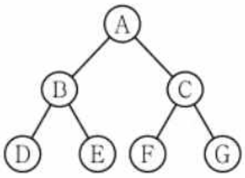
를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 3주차 주간지에서 다음과 같은 내용을 학습한 적이 있어.
조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 보고 올 수 있도록!

그러한 트리 중에서도 이진트리라는 애가 있다!
모든 점들의 자식이 항상 둘 이하이면 이진트리가 되는데,
다음은 자식이 있는 점이 모두 두 개의 자식을 갖는 완전이진트리의 예이다.

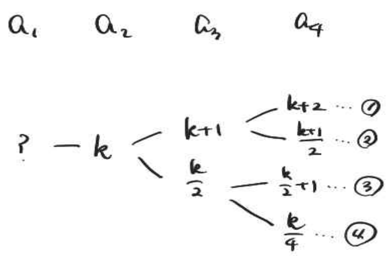


뭔가 어렵게 주절주절 써놓은 것 같지만, 우리 수형도 그릴 줄 알지? 그 느낌으로 그리면 된다.
다만 완전이진트리라는 것은 **경우의 수가 항상 둘로 분기되는 수형도**인 것 뿐이다!

여하튼 문제로 다시 돌아와서, 맨 위의 점, 즉, 꼭대기 역할을 할 친구를 먼저 설정해야 한다!
a_5의 값이 나와 있으니 모든 자연수 n에 대하여 a_{n+4}의 값은 정해져있다!
그럼 우리는 a_1부터 a_4까지의 값만 구해보면 될 것이다.

STEP 1 **조건이 너무 단순해!**

a_n이 홀수이거나, 짝수이거나. 사실 이런 경우는 너무 단순하기 때문에 아주 쉽게 수형도를 그려볼 수 있어. 다음과 같이 수형도를 그리면 바로 완성!



먼저 ①부터 차근차근 보자.

조건 ① : a_2와 a_3이 모두 홀수이다 + $k+(k+2)=40$이다.

⇒ $k=19$이므로 a_2는 홀수이나, $a_3=20$이므로 홀수가 아니다. (모순)

조건 ② : a_2는 홀수, a_3은 짝수이다 + $\dfrac{3k}{2}+\dfrac{1}{2}=40$이다.

⇒ $3k=79$이므로 a_2가 자연수가 아니다. (모순)

(사실, '모든 항이 자연수'라고 주지 않고 '첫째항이 자연수'라고만 줬는데 a_n이 홀수/짝수인 경우로 조건을 나눠놓은 것은, a_{n+1}이 될 수 있는 것들을 보면 결코 a_n이 자연수가 아닌 수가 될 수 없기 때문이야.)

조건 ③ : a_2는 짝수, a_3은 홀수이다 + $\frac{3k}{2}+1=40$ 이다.

⇒ $3k=78$ 이므로 $a_2=k=26$, $a_3=13$ 이다. 따라서 조건을 모두 만족한다.

이때, a_1이 홀수이면 $a_1+1=26$ 이므로 $a_1=25$, a_1이 짝수이면 $a_1=2a_2=52$

조건 ④ : a_2와 a_3이 모두 짝수이다 + $\frac{5k}{4}=40$ 이다.

⇒ $k=32$ 이므로 $a_2=k=32$, $a_3=16$ 이다. 따라서 조건을 모두 만족한다.

이때, a_1이 홀수이면 $a_1+1=32$ 이므로 $a_1=31$, a_1이 짝수이면 $a_1=2a_2=64$

따라서 가능한 모든 a_1의 값의 합은 $25+52+31+64=172$

위처럼 수열의 귀납적 정의는 진짜 차근차근 말만 잘 따라가면서 케이스 구분만 잘 하면 충분히 맞출 수 있는 문항이니 4점, 놓치지 말자.

아래 문항도 한번 풀어보자.

참고 - 2021학년도 4월 학력평가 21번

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n\geq 0) \\ a_n+5 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

[정답] 5

3주차에서 배웠던 것들

등차수열도 사실은 함수다 - 항은 일차식, 합은 이차식

[2024학년도 9월 모의평가 21번]

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 3주차 주간지에서 다음과 같은 내용을 학습한 적이 있어. 조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 보고 올 수 있도록!

STEP 2 등차는 일차, 등차합은 이차!
사실 등차수열을 일차함수로 생각할 수 있다는 것보다도,
등차수열의 합을 이차함수로 생각할 수 있는 것이 더 중요한 포인트이다.

STEP 1 **계산이 좀 복잡할것 같지만서도**

등차수열의 합 공식은 알아도, 등차수열의 합의 합공식은... 아무래도 알기 쉽지 않지?

근데 시그마의 성질을 학습하면서 n, n^2, n^3의 합은 배웠으니, 등차수열의 합의 합(ㅋㅋ)은 구할 수 있을 것 같아. 근데.. 그 계산이 진짜 맞냐고? 응 맞아.

$a_n = dn + l$라 하면, $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + kn$이라 할 수 있지?

그렇다면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{d}{2}n^2 + kn\right) = \frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6} + k\times\frac{7\times8}{2} = 70d + 28k = 644$

임을 알 수 있어. 수가 좀 많이 크지..? 양변을 14로 나눠도 $5d + 2k = 46$이라.. 쉽지 않은 수야.

근데, $S_1 = a_1$일테니, $a_1 = k + \dfrac{d}{2}$임을 알 수 있네? $k + \dfrac{5}{2}d = k + \dfrac{1}{2}d + 2d = 23$이니 $a_3 = 23$이겠구나!

이때 $a_7 = 23 + 4d = 26$ or 39 or 52 or 65 or $\cdots$이니 $d = 4$일 수밖에 없어.

왜냐하면 우선 자연수 d에 대하여 $d > 11$이면 $a_1 < 0$이기 때문에 전제에 모순이고,

따라서 a_7이 될 수 있는 마지노선은 65야.

하지만 $23 + 4d = 26$, 52, 65일 때에는 d가 자연수가 아니기 때문에 등차수열의 모든 항이 자연수라는 전제에 모순이야.

이러므로 $23 + 4d = 39$일테고, 따라서 $d = 4$이겠지.

생각보다 너무도 기초적인 것이 집중하면 문항을 쉽게 풀 수 있는 것 같아.

$a_1 = S_1$인 것, S_n이 이차식인 것.. 이런 것들은 진짜 수1 처음 배울 때에도 이해하기 쉬운 개념들이잖아.

단지 계산량이 많아서 어렵다는 것 뿐이니 전혀 두려워할 필요가 없을 것 같아.

아래 문항도 하나 풀어보면서 '등차수열'과 '이차함수'의 관계를 되새기자.

참고 - 2022학년도 3월 학력평가 13번

첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

[정답] $\frac{31}{5}$

6주차에서 배웠던 것들

구간별로 정의된 함수 - 연속? 미분가능? 그래프개형?

[2024학년도 9월 모의평가 13번]

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우리는 6주차 주간지에서 다음과 같은 내용을 학습한 적이 있어.
조금이라도 생소하다면 바로 다시 가서 보고 올 수 있도록!

새로 정의된 함수가 나왔을 때, 우리는 하나의 자세를 취해야 해.

이 함수가 어떤 녀석인지 분석하는 것

그것이 바로 그 문제의 핵심이 될 가능성이 매우 높아.
이때, 견지해야 할 우리의 태도가 무엇이다? 다른 조건들을 통해 이 함수를 더욱 정확하게 이해하는 것이다!
이 자세를 이 문제에서 적용시켜볼까?
$g(x)$라는 함수가 우선 튀어나왔네.

① 그러면 일단 가능한 $g(x)$가 어떠한 성질을 가지는지, 또는 어떠한 역할을 하는 함수인지를 분석해보는 거지.
② 아무리 분석해도 더 이상 얻을 건덕지가 없으면 이제 다른 조건들을 이용해서 분석을 하는거야.

STEP 1 **감소와 증가, 극소와 극대, 다항함수에서는 ..**

의외로 '감소'와 '증가'의 정의를 잘 모르고 있는 친구가 있어서 한번 짚고 넘어가볼게.

$x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 증가한다.

$x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 감소한다.

증가와 감소를 정의할 때에는 단 한번도 **'미분가능성'**을 이야기한 적이 없어. 명심해야해.
물론 다음과 같은 정**'리'**를 자주 사용하기 때문에 우리가 본질을 잊는 경우가 생기지.

함수 $f(x)$가 **미분가능**할 때, **$f'(x) > 0$이면 $f(x)$가 증가하고, $f'(x) < 0$이면 $f(x)$가 감소**한다.

보통 아래만 기억하고 위를 기억하는 친구들이 많지 않은 것 같아. '극소'와 '극대'의 정의도 마찬가지인데,

$x = a$ 근방의 구간에서 $f(x) \le f(a)$이면 $x = a$에서 극대이다.

$x = a$ 근방의 구간에서 $f(x) \ge f(a)$이면 $x = a$에서 극소이다.

위 문장이 극소와 극대의 정의야. 극값을 정의할 때 역시 단 한번도 **'미분가능성'**을 이야기한 적이 없어. 역시 여기에서도 다음과 같은 정**'리'**를 자주 사용하게 때문에 본질을 잊은 경우가 많을 거야.

함수 $f(x)$가 **미분가능**할 때, **$x = a$에서 함수 $f(x)$가 극값**을 가지면 **$f'(a) = 0$이다.**

그렇기 때문에 이 문제에서 미분계수의 조건을 사용할 수 있는 것이지,
함수 f가 미분가능하다는 보장이 없으면 결코 미분계수를 가지고 무언가를 도입할 수 없음을 명심해야해.

그러니, 이 문제에서 $f(x)$를 볼 때, $f(x)$가 $x = -1$ 근방에서는 $-\frac{1}{3}x^3 - ax^2 - bx$라는 다항함수이니까

$x < -1$에서 감소하다가 $x > -1$에서 증가하려면 $x = -1$에서만 극(솟)값을 가지고,
방정식 $f'(x) = 0$을 만족하는 실수 x가 -1뿐임을 확신할 수 있어.

STEP 2 **어라? 도함수가 연속이야? + 이차함수의 그래프 해석**

일단 도함수 $f'(x)$를 먼저 구해보자.

$$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x\geq 0) \end{cases}$$

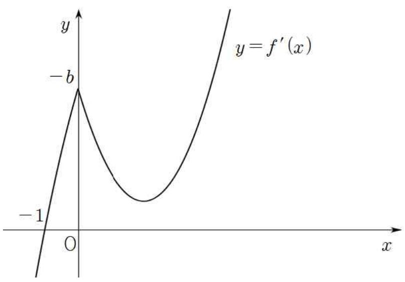
이니, 구간별로 정의된 함수 각각이 모두 다항함수야. 그러니까 $x=0$일 때만 주의하면 $f'(x)$의 연속성을 파악할 수 있겠지? 어, 그런데...

$$\lim_{x\to 0-} f'(x)=\lim_{x\to 0+} f'(x)=-b$$

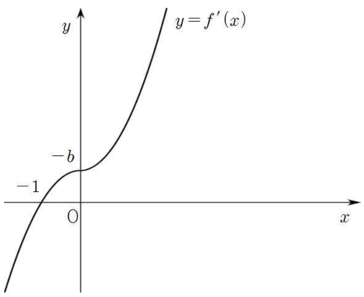
임을 알 수 있네? 그렇다는건 $f'(x)$이 모든 실수 x에 대하여 연속,
즉, $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능함을 알 수 있어.

따라서, $f'(x)$가 $x=-1$에서만 x축과 만나도록하는 그래프 개형은 다음 세가지 방법으로 그릴 수 있어.

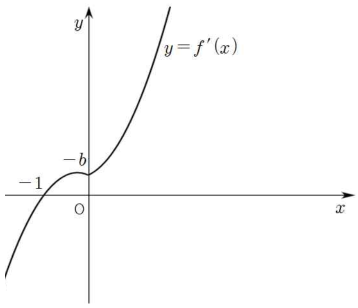
(i) $a<0$



(ii) $a=0$



(iii) $a>0$



왜 a에 따라 그래프 개형을 구분했을까? 지금 a나 b에 따라 그래프의 개형이 달라지는 상황이지만,
a는 **'이차함수의 축'과 관련되어있는, 아주 중요한 그래프적 특징**을 가지고 있어
(이차함수의 그래프적 특징을 묻는건 사실 수능에서 아~~주 이례적인 상황은 아니야. 오히려 삼/사차함수 그래프의 특징을 안다면 이차함수의 그래프 특징은 반드시 알아야 하고, 이번에도 이차함수의 그래프적 특징을 묻는 것이 나왔으니 수능에 나올 수 있다는 각오를 하고 더 철저히 준비해야겠지?)
반면 b는..? 그저 y절편일 뿐이잖아.
그러니 좀 더 특수한 조건을 알려줄 수 있는 a를 기준으로 그래프의 경우의 수를 나누었어.
고1때 **'근의 분리'**라고 기억나는지 모르겠다.
일차항의 계수가 양수면 축이 y축보다 왼쪽에 있고 어쩌고~~
근의 분리에 대한 자세한 내용은 밑에 부록으로 달아둘테니 꼭 보도록 !!

일단, (ⅰ)~(ⅲ)을 만족하려면 최소한 $f'(-1)=0$을 만족해야하니 $b=2a-1$임을 알 수 있어.

(ⅰ)을 만족하려면 $x>0$에서 방정식 $f'(x)=0$가 서로 다른 두 실근을 가지면 안되니,

이차방정식 $x^2+2ax-b=0$의 판별식이 0보다 작거나 같아야해. 즉, $a^2+b=a^2+2a-1\le 0$이어야 해.
따라서 $-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$ 여야 하고, 전제 조건이 $a<0$이니 $-1-\sqrt{2}\le a<0$이어야겠네.

(ⅱ)는 $a=0$인 경우이니, $f'(-1)=0$이려면 $b=-1$이면 되겠지?

(ⅲ)을 만족하려면 $x<0$에서의 $f'(x)$인 $-x^2-2ax-b$의 근이 하나는 -1, 하나는 $\alpha(\alpha>0)$이어야 하겠지? $\alpha<0$이라면 극값이 하나보다 많을테니까.
따라서 두 근의 곱을 의미하는 b가 0 이하여야해. $b=0$일때는 상관없어.
왜? **미분계수($f'(x)$)가 0이라고 극값을 갖는게 아니잖아.**
$f(x)$가 미분가능할 때, $f'(x)=0$이면 극값을 갖는게 아니야.
'극값을 가지면 $f'(x)=0$이라는거지.' 명제의 역은 항상 성립하지 않는다는걸 염두에 뒀으면 좋겠어.

이때, $b=2a-1$이니 $2a-1\le 0$, 즉 $a\le\frac{1}{2}$겠네?

근데 $a>0$이랬으니 최종적으로 a의 범위는 $0<a\le\frac{1}{2}$이다!

(i)~(iii)을 종합해보면 '$-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2}$'임을 알 수 있으니, $a+b=3a-1$의 범위는
'$-4-3\sqrt{2}\le a+b\le\frac{1}{2}$'임을 알 수 있겠네.

따라서 $M=\frac{1}{2}$, $m=-4-3\sqrt{2}$, 곧, $M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

부록 - 이차함수의 근의 분리와 판별식

(i) 축과 관련된 이야기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $y=ax\left(x+\dfrac{b}{a}\right)+c$와 같으므로

대칭축은 $x=0$과 $x=-\dfrac{b}{a}$의 정중앙인 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 임을 알 수 있다.

EX) 이차함수 $y=2x^2-6x+1$은 $x=\dfrac{3}{2}$에 대해 대칭이다.

왜? $y=2x(x-3)+1$이니까, 대칭축은 $x=0$과 $x=3$의 정중앙이겠지.

(ii) 근과 관련된 이야기 (**최고차항의 계수 a가 양수**인 이차함수 $f(x)$)

① 두 수 m, n(이하 모두 $m<n$이라 하자) 사이에 서로 다른 두 근이 있다

- 두 근이 있는가?: (판별식)>0
- 두 근이 정말 '두 수 사이에' 있는가?: $f(m)>0$, $f(n)>0$, $m<(\text{대칭축})<n$

② 서로 다른 두 근 α, β(이하 모두 $\alpha<\beta$라 하자)사이에 두 수 m, n가 있다

- 두 근이 있는가?: (판별식)>0
- 두 수가 정말 '두 근 사이에' 있는가?: $f(m)<0$, $f(n)<0$

③ 서로 다른 두 근 α, β모두 어떤 수 m보다 크다

- 두 근이 있는가?: (판별식)>0
- 두 근이 정말 'm보다 큰가'?: $f(\alpha)>0$, $(\text{대칭축})>m$

④ 서로 다른 두 근 α, β모두 어떤 수 m보다 작다

- 두 근이 있는가?: (판별식)>0
- 두 근이 정말 'm보다 작은가'?: $f(\alpha)>0$, $(\text{대칭축})<m$

⑤ 어떤 수 m보다 큰 근 α를 갖는다

- 두 근을 가져도 되나, 한 근을 가져도 무방하다!: (판별식)≥ 0
- α가 정말 m보다 큰가?: $(\text{대칭축})>m$ (단, 만약 판별식이 0보다 크다면 대칭축의 x좌표는 m보다 크거나 같아도 된다.)

위와 같은 원리들은 꼭 직접 그래프를 그려가며 납득해보고, 이는 **삼/사차함수에서도 예외없이** 사용되니, 오히려 이차함수가 문항에 나온다면 '감사합니다' 하고 풀어내자. 삼/사차함수는 근이 세개, 네개라 더 힘들다..

아래 문항도 몇개 풀어보면서 이차함수의 그래프의 특징을 잘 사용해보자.

참고 - 2022학년도 고2 3월 학력평가 30번

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다. 방정식 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$의 모든 실근의 집합을 A라 하고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 집합을 B라 하면 두 실수 α, $\beta(\alpha<\beta)$에 대하여 $A=\{\alpha,\ \beta\}$, $B=\{\alpha,\ \beta+3\}$이다. 상수 k에 대하여 방정식

$$\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 이 세 실근의 합이 12일 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오. [4점]

[정답] 50

참고 - 2019학년도 고2 3월 학력평가 나형 30번

두 함수

$$f(x)=x^2-2x+6,\ \ g(x)=-|x-t|+11\ \ (t\text{는 실수})$$

가 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<g(x)) \\ g(x) & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 명제 '어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다'가 참이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

[정답] 26

참고 - 2022학년도 고1 9월 학력평가 30번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖고, 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta) \\ g(x) & (\alpha \le x \le \beta) \end{cases}$$

일 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=h(\beta)$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근의 합은 -4이다.
(나) 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 중에서 y좌표가 음의 정수인 점의 개수는 15이다.

$h(2)+h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[정답] 35

D-70, 앞으로 우리는?

앞으로 우리의 계획을 이야기 하기 전에, 우선 우리 자신에게 큰 일을 치르느라 고생했다고 칭찬해주세요.
시험 보느라 정말 고생 많았어요.

앞으로 수능이 70일 남짓이 남아서, 너무 초조해하는 학생들을 위해 감히 위로의 한말씀을 드리면,
사실 어떤 수업을 듣든, 어떤 자료로 공부를 하든, 성적이 오를 사람들은 오르는 것 같아요.
지금까지 성적이 잘 나오지 않았다고 해서 수능에서 성적이 안 오를 사람은 아니며,
반대로 지금까지 성적이 잘 나온 사람이 수능에서 좋은 성적을 받는 건 아니더랍니다.

필자의 경우 6월, 9월 모의평가 모두 2등급을 받았었습니다.
하지만 10월 모의고사를 보던 쯤을 전후로 갑자기 킬러를 건드릴 시간이 남더니,
수능날 찍어서 푼 문항 하나 없이 수학 커리어 하이를 찍었었습니다(그래봤자 미적 백분위 99따리 ㅋㅋ)
그러고 나서, 제가 왜 갑자기 수학 문제를 푸는 효율이 좋아졌는지 곰곰이 생각해봤습니다.

결론은 '진인사대천명인 것 같습니다.
수험생으로서 해야할 실전개념정리, 기출분석, 더 좁게 이야기 하면 흔히들 이야기하는 '인강쌤 커리 완강'.
이런 것들을 저는 매우 늦게 해치웠던 편이더라구요(뭐.. 미적 뉴런을 9월까지 듣고 앉았으니 말 다했지…)
그래서 10월 중으로 모두 마무리하고, 그 다음부터는 실전 모의고사 여러개를 풀며 지금까지 배웠던 개념의 적용
형태 및 기출과의 유사성을 면밀히 살펴봤습니다.
그러고, 하늘에 맡겼죠(종교적 발언 아님!!!) 될대로 돼라… 안되면 반수하지 뭐…

각설하고, 꼭 여러분께 드리고 싶은 말씀은, 지금 당장 성적이 좋지 않아도, 혹은 너무 좋아도, 절대 이 성적이
수능까지 간다는 보장을 할 수는 없다는 걸 당부드리고 싶습니다. 이 명제의 충분조건은 절대 성립하지 않습니다.
저를 포함해 반례가 너무 많아요. 그 일말의 가능성을 보며 오늘 하루도 후회없이 해보는거예요.
실패를 하더라도, 후회는 하지 말아요. 화이팅..!!

- SEOL:NAME 팀 9모 분석집 및 주간지 제작자 **김상우 드림**