1계 미분방정식 (2)

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1계 방정식 (1)에서는 미분방정식의 개념 및 1계 미분방정식의 대표 유형인 변수 분리형, 전(Exact), 1계 선형, 그리고 베르누이 방정식에 대해 알아보았다. 이 칼럼에서는 앞선 칼럼에서 언급하지 않은 동차 계수, Inspection, 적분 인자, 그리고 이변수 선형 미분방정식에 대하여 알아볼 것이다. (완전 미분방정식의 개념이 자주 등장하므로 가급적 앞선 칼럼을 먼저 읽어볼 것을 권장한다.)

Ⅰ. 동차 계수 미분방정식(D.E. with Homogeneous Coefficients)

동차란, 말 그대로 식의 x, y에 관한 차수가 모두 같다는 뜻이다. 예를 들어, x^2은 2차, x^5y^3은 8차, $\dfrac{x^2+y^2}{x^4y}$은 -3차이고, x^2-y^6은 동차가 아니다. 두 변수 x, y를 입력 받아 함숫값을 반환하는 이변수 함수 $z=f(x,y)$에 대하여 함수 f가 동차이기 위한 필요충분조건은 적당한 실수 n이 존재하여 임의의 실수 λ에 대하여

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

가 성립하는 것이며, 이때 실수 n을 f의 차수라 한다. 예를 들어, $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$과 임의의 실수 λ에 대하여

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3+y^3} = \lambda^{\frac{3}{2}} f(x, y)$$

이므로 직관적으로도 알 수 있듯이 f는 $\dfrac{3}{2}$차 동차 함수이다. 두 이변수함수 M, N에 대하여 미분방정식이 다음과 같이 주어져 있다고 하자.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

M, N이 모두 차수 n의 동차 함수일 때, 양변을 x^n 또는 y^n으로 나눈 후 각각 $\dfrac{y}{x}$ 또는 $\dfrac{x}{y}$를 새로운 변수로 치환하면 주어진 미분방정식은 변수 분리형이 되고, 단순 적분을 통해 비교적 간단하게 해결할 수 있다. 예를 들어, $z=\dfrac{y}{x}$로 치환할 경우 $y=zx$이므로 $dy=zdx+xdz$를 대입하여 x와 z에 관한 미분방정식을 풀면 된다.

다음 예시를 살펴보자.

$$(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$$

이는 차수가 2인 동차 미분방정식이므로 양변을 x^2 또는 y^2으로 나누면 된다. x^2으로 나눌 경우,

$$\left(1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{y}{x}dy = 0$$

이므로 $z = \frac{y}{x}$, $dy = zdx + xdz$로 치환하면

$$(1 - z + z^2)dx - z(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 - z)dx = zxdz$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{z}{1-z}dz$$

이다. 따라서 양변을 적분하면

$$\ln|x| + C = -z - \ln|1-z|$$

이고, 최종 답은 다음과 같다.

$$\ln|x| + \frac{y}{x} + \ln\left|1 - \frac{y}{x}\right| = C$$

x^n으로 나누는 경우와 y^n으로 나누는 경우 모두 동일한 답이 나오지만, 계산 과정에 차이가 있는 경우도 있다. 특히 변수 분리형으로 바꾼 후 양변을 적분할 때 적분 자체가 매우 어렵고 복잡하여 문제가 안 풀리는 경우가 있으며, 이럴 때에는 x^n 대신 y^n, 또는 그 반대로 나누어 볼 수 있을 것이다.

다음 예시와 같이 풀이의 방향이 사실상 정해져 있는 문제들도 있다. (x로 나눈 후 y/x 치환)

$$\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + xdy = 0$$

$$\left[x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx + x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Ⅱ. Inspection

Inspection은 검사, 조사라는 뜻이며, 말 그대로 주어진 미분방정식을 직관을 이용하여 해결하는 방법이다. (여기서는 inspection이라는 용어 그대로 부르기로 한다.)

예를 들어, $ydx + xdy = 0$과 같은 미분방정식은 곱의 미분 형태이므로 문제를 보자마자 $xy = C$로 답을 쓸 수 있다. 또한, $ydx - xdy$의 경우 몫의 미분에서 등장하는 항이므로

$$ydx - xdy = y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = -x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

임을 알 수 있고, 분모에 $x^2 + y^2$이 있는 경우 탄젠트 역함수를 생각해볼 수 있다. 즉,

$$ydx - xdy = (x^2 + y^2)\, d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = -(x^2 + y^2)\, d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

이다. Inspection을 이용할 경우 풀이가 보이지 않는다면 때로는 정말 어려워질 수 있으므로, 다른 방법을 모두 시도해본 후 마지막에 시도하는 것이 좋다.

Inspection의 첫 시작은 미분방정식의 모든 항을 전개하는 것이다. 예를 들어,

$$y(2xy + 1)dx - xdy = 0$$

이라는 미분방정식이 주어져 있을 때, 모든 항을 전개하면

$$2xy^2 dx + ydx - xdy = 0$$

이고, $ydx - xdy$가 있으므로 식의 양변을 x^2 또는 y^2으로 나누는 발상을 가지고 있어야 한다. 이때 y^2으로 나누면 첫 항은 $2xdx$가 되므로 바로 적분이 가능해지고, 따라서 답은

$$x^2 + \frac{x}{y} = C$$

이다. $ydx - xdy$의 형태가 조금 변형되어 $3x^2ydx - x^3dy$와 같이 주어진 경우 역시 몫의 미분을 떠올려 $d\left(\frac{x^3}{y}\right)$에 y^2을 곱한 것임을 알아챌 수 있어야 하며, 이렇듯 감각과 직관에 크게 의존하는 (다소 위험한) 방식이다.

미분방정식

$$y(x^3 - y)dx - x(x^3 + y)dy = 0$$

의 경우 모든 항을 전개하면

$$x^3ydx - y^2dx - x^4dy - xydy = 0$$

이고, $ydx - xdy$와 $ydx + xdy$가 포함되도록 식을 정리하면

$$x^3(ydx - xdy) - y(ydx + xdy) = 0$$

이다. 앞서 설명한 방법을 이용하여 식을 다시 쓰면

$$x^3y^2d\left(\frac{x}{y}\right) - yd(xy) = 0$$

이다. 각각의 항이 적분가능하기 위해서는 $d\left(\frac{x}{y}\right)$ 앞에는 $\frac{x}{y}$에 관한 식이, $d(xy)$ 앞에는 xy에 관한 식이 곱해져 있어야 하므로 양변에 적절한 항을 곱해서 이를 만들어야 한다.

우선 $d(xy)$ 앞에 xy를 만들기 위해 x를 곱하면

$$x^4y^2d\left(\frac{x}{y}\right) - xyd(xy) = 0$$

이고, $d(xy)$ 앞의 식을 xy에 관한 식으로 유지하면서 $d\left(\frac{x}{y}\right)$ 앞의 식을 오직 $\frac{x}{y}$에 관한 식으로 만들기 위해 양변을 x^3y^3으로 나누어주면

$$\frac{x}{y}d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{x^2y^2}d(xy) = 0$$

이다. 따라서 양변을 적분하면 다음 답을 얻는다.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{1}{xy} = C$$

Inspection으로 접근해도 방법이 보이지 않을 경우 양변에 무엇을 곱해야 주어진 미분방정식이 완전 미분방정식이 되는지 직접 계산을 할 수도 있다. 예를 들어,

$$y(2-3xy)dx - xdy = 0$$

이 주어져 있을 때, 적절한 실수 a, b에 대하여 양변에 x^ay^b을 곱하여 주어진 미분방정식을 완전 미분방정식으로 만들어보자.

$$x^a y^{b+1}(2-3xy)dx - x^{a+1}y^b dy = 0$$

이 완전 미분방정식이기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^a y^{b+1}(2-3xy)] = \frac{\partial}{\partial x}(-x^{a+1}y^b)$$

$$(b+1)x^a y^b(2-3xy) - 3x^{a+1}y^{b+1} = -(a+1)x^a y^b$$

이때 $b=-2,\ a=1$이면 식이 성립하므로 양변에 $\frac{x}{y^2}$를 곱하면 완전 미분방정식이 됨을 알아내었다. 즉,

$$\left(\frac{2x}{y} - 3x^2\right)dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$$

이므로 최종 답은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{y} - x^3 = C$$

앞서 언급한 것과 같이 미분방정식을 풀 때에는 항상 유형과 솔루션이 정형화되어 있는 다른 방법들을 먼저 시도해보아야 하며, 다른 방법이 모두 적용되지 않는 경우 Inspection으로 접근해야 한다.

Ⅲ. 적분 인자(Integrating Factors)

두 이변수함수 M, N에 대하여 미분방정식이 다음과 같이 주어져 있다고 하자.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

이때 만약 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$이 오직 x에 관한 함수 $f(x)$일 경우 양변에 $v(x) = e^{\int f(x)dx}$를 곱하면 주어진 미분방정식은 완전 미분방정식이 되며, $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$이 오직 y에 관한 함수 $g(y)$일 경우 양변에 $v(y) = e^{-\int g(y)dy}$를 곱하면 주어진 미분방정식은 완전 미분방정식이 된다.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$$

일 경우 주어진 미분방정식은 완전 미분방정식이 되므로, 완전 미분방정식인지 확인하기 위해 각각을 편미분할 때 차이를 계산한 후 앞서 언급한 조건들이 만족되는지 동시에 확인해볼 수 있다.

예를 들어, 미분방정식

$$2(2y^2+5xy-2y+4)dx + x(2x+2y-1)dy = 0$$

의 경우

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8y+10x-4, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x+2y-1$$

이므로 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$이고 주어진 미분방정식은 완전 미분방정식이 아니다. 하지만

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 6x+6y-3$$

이므로

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{6x+6y-3}{x(2x+2y-1)} = \frac{3}{x} = f(x)$$

는 오직 x에 관한 함수이고, 따라서

$$v(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{3\ln x} = x^3$$

이다. 처음 미분방정식의 양변에 $v(x) = x^3$을 곱하면

$$2x^3(2y^2+5xy-2y+4)dx + x^4(2x+2y-1)dy = 0$$

이고, 위 식의 M과 N에 대하여 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$이 성립한다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 완전 미분방정식의 해법에 따라 M과 N을 각각 x, y에 대하여 편적분한 후 결과를 합치면 다음과 같다.

$$2x^5y + x^4y^2 - x^4y + 2x^4 = C$$

물론 Inspection을 이용하여 풀 수도 있지만, 이 문제의 경우 항이 7개나 있으므로 가능한 조합의 개수가 너무 많고, 양변에 $x^a y^b$을 곱하여 a, b의 값을 알아내는 방법 역시 계산이 너무 복잡해진다.

이제 이 방법이 성립하는 이유를 증명해보자. 우리의 목적은 주어진 미분방정식

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

의 양변에 적절한 함수 v를 곱하여 전체를 완전 미분방정식으로 만드는 것이다. 즉,

$$vMdx + vNdy = 0$$

은 완전 미분방정식이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x}$$

$$v \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + M \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots \quad [1]$$

이를 만족시키는 함수 v를 단 하나만 찾으면 문제가 바로 풀리지만, 이는 그 자체로 훨씬 복잡한 편미분방정식이므로 이를 있는 그대로 푸는 것은 매우 어렵다. 따라서 v를 더 쉽게 구할 수 있도록 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 또는 $\frac{\partial v}{\partial y}$가 0이 되는 경우를 살펴볼 것이다.

먼저, v가 오직 x에 관한 식인 경우, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$이고 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx}$이므로 식 [1]은 다음과 같이 바뀐다.

$$v \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + N \cdot \frac{dv}{dx}$$

식을 정리하면

$$v \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx = \frac{1}{v}dv$$

이고, 좌변이 오직 x에 관한 식 $f(x)$인 경우 양변을 x에 관하여 적분할 수 있으므로

$$\ln|v(x)| = \int f(x)dx, \quad v(x) = e^{\int f(x)dx}$$

이다. v가 오직 y에 관한 식인 경우, 마찬가지로 식 [1]은 다음과 같이 바뀐다.

$$v \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + M \cdot \frac{dv}{dy} = v \cdot \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy = -\frac{1}{v}\,dv$$

좌변의 $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$이 오직 y에 관한 식 $g(y)$인 경우 양변을 y로 적분하면

$$-\ln|v(y)| = \int g(y)dy, \quad v(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

가 되어 증명이 완료된다.

Ⅳ. 이변수 선형 미분방정식(Coefficients Linear in Two Variables)

이변수 선형 미분방정식이란, 실수 $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$에 대하여 다음의 형태로 표현되는 미분방정식이다.

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

먼저, $c_1 = c_2 = 0$이라면 주어진 미분방정식은 동차 계수가 되므로 양변을 x 또는 y로 나눈 후 각각 $\frac{y}{x}$ 또는 $\frac{x}{y}$를 치환하여 해결할 수 있다.

c_1과 c_2 중 적어도 하나가 0이 아닌 경우, dx와 dy에 곱해진 식을 다음과 같이 직선의 방정식 두 개로 해석할 수 있다.

$$\begin{cases} l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

두 직선이 평행한 경우, 적절한 실수 k가 존재하여

$$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$$

가 성립하므로 $z = a_1x + b_1y + c_1,\ dz = a_1dx + b_1dy$로 치환하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$$zdx + (k(z - c_1) + c_2)dy = 0$$

이때 $dz = a_1dx + b_1dy$를 이용하여 dx 또는 dy를 없애면 이는 z와 x 또는 y에 관한 변수 분리형이 되어, 간단하게 해결할 수 있다.

두 직선이 한 점 (α, β)에서 만나는 경우,

$$\begin{cases} x = X+\alpha,\ dx = dX \\ y = Y+\beta,\ dy = dY \end{cases}$$

와 같이 치환한 후 대입하면 $a_1\alpha+b_1\beta+c_1 = 0$, $a_2\alpha+b_2\beta+c_2 = 0$이므로

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)dy = 0$$

$$(a_1X+b_1Y)dX + (a_2X+b_2Y)dY = 0$$

이고, 이는 X와 Y에 관한 동차 계수 미분방정식이므로 양변을 X 또는 Y로 나누어 해결할 수 있다.

두 직선이 평행한 경우의 예시는 다음과 같다.

$$(2x+3y-1)dx+(2x+3y+2)dy = 0$$

이는 이변수 선형의 내용을 모르더라도 직관적으로 $z = 2x+3y-1$로 치환하여 풀 수 있는 간단한 문제이다. $dz = 2dx+3dy$이므로 양변에 2를 곱한 후 이를 대입하면

$$z(dz-3dy) + 2(z+3)dy = 0, \quad dy = \frac{z}{z-6}\,dz = \left(1+\frac{6}{z-6}\right)dz$$

이고, 양변을 적분하면 다음을 얻는다.

$$y = z + 6\ln|z-6| + C = 2x + 3y + 6\ln|2x+3y-7| + C$$

$$\therefore x + y + 3\ln|2x+3y-7| = C$$

두 직선이 한 점에서 만나는 예시는 다음과 같다.

$$(x-3y+2)dx + 3(x+3y-4)dy = 0$$

두 직선 $x-3y+2 = 0$, $x+3y-4 = 0$의 교점은 $(1, 1)$이므로

$$\begin{cases} x = X+1,\ dx = dX \\ y = Y+1,\ dy = dY \end{cases}$$

로 치환하면 다음과 같다.

$$(X-3Y)dX+3(X+3Y)dY=0$$

양변을 X로 나눈 후 $z=\dfrac{Y}{X}$, $dY=zdX+Xdz$로 치환하면

$$(1-3z)dX+3(1+3z)(zdX+Xdz)=0$$

$$-\frac{1}{3X}dX=\frac{3z+1}{9z^2+1}dz=\left(\frac{3z}{9z^2+1}+\frac{1}{9z^2+1}\right)dz$$

이므로 양변을 적분하면 다음을 얻는다.

$$-\frac{1}{3}\ln|X|=\frac{1}{6}\ln(9z^2+1)+\frac{1}{3}\tan^{-1}(3z)+C$$

따라서 $X=x-1$, $z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y-1}{x-1}$을 대입하면 최종 답은 다음과 같다.

$$\ln[(x-1)^2+9(y-1)^2]+2\tan^{-1}\left(\frac{3(y-1)}{x-1}\right)=C$$

Ⅴ. 번외 : 치환(Substitution)

치환은 그 자체로 확고한 테크닉은 아니다. 앞서 설명한 동차 계수 미분방정식에서 $y=zx$, $dy=zdx+xdz$로 치환한 것과 같이 여러 가지 기법과 유형에 폭넓게 사용된다.

다음과 같이 명백히 치환을 할 수 있는 상황의 경우 가급적 치환을 하여 식을 간단하게 바꾸는 것이 도움이 된다.

◎ $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)$: $z=x+y$, $dz=dx+dy$로 치환한다. 치환하지 않을 경우 삼각함수 안에 $x+y$가 있어 상당히 난감해진다.

◎ $\dfrac{dy}{dx}=(9x+4y+1)^2$: 계산량을 줄이기 위해 $z=9x+4y+1$, $dz=9dx+4dy$로 치환한다. 제곱식을 다 전개해서 계산하는 것은 너무 복잡하다.

◎ $y(x\tan x+\ln y)dx+\tan x dy=0$: 양변을 y로 나누면 $\ln y$와 $\dfrac{1}{y}dy$가 모두 있으므로 $z=\ln y$, $dz=\dfrac{1}{y}dy$로 치환한다.

◎ $\cos y \sin 2x dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)dy = 0$: $z = -\cos^2 x$, $dz = \sin 2x dx$로 치환하여 1계 선형 미분방정식으로 바꾼다.

Ⅵ. 연습문제

[1 ~ 10] 다음 미분방정식의 해를 구하여라. (단, 초기조건이 주어진 경우 적분상수를 결정하시오.)

1. $ydx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})dy$

2. $(x^2 y + y^3)dx + (3x^3 - 5xy^2)dy = 0$ $(x = 2 : y = 1)$

3. $3x^2 y dx + (y^4 - x^3)dy = 0$

4. $y(x^4 - y^2)dx + x(x^4 + y^2)dy = 0$

5. $(x^2 y + y^3 - y)dx + (x^3 + xy^2 + x)dy = 0$

6. $y(3x^3 - x + y)dx + x^2(1 - x^2)dy = 0$

7. $y(2x^2 - xy + 1)dx + (x - y)dy = 0$

8. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$

9. $(x - 2)dx + 4(x + y - 1)dy = 0$

10. $x^4 y' = -x^3 y - \csc(xy)$