

9 가

고

8 : 2012 7 25

25. $f(x) = 3x^2 + x + \int_0^2 f(t) dt$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

8 : 2020 3 16 (가)

16. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(t)| dt$$

를 만족시킨다. $f(1) > 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

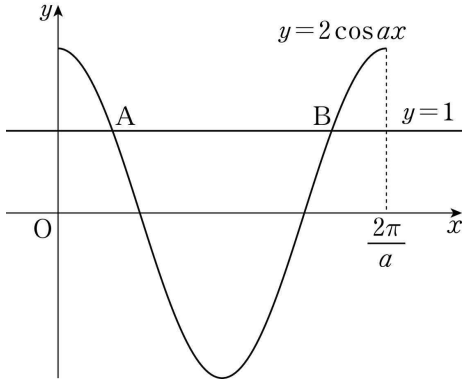
고

9 : 2022 3 8

8. 그림과 같이 양의 상수 a 에 대하여 곡선

$y=2\cos ax$ ($0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$)와 직선 $y=1$ 이 만나는 두 점을 각각

A, B라 하자. $\overline{AB}=\frac{8}{3}$ 일 때, a 의 값은? [3점]

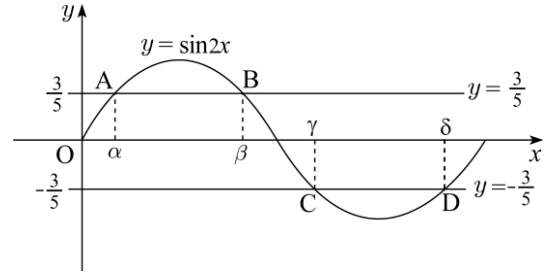


- ① $\frac{\pi}{3}$
- ② $\frac{5\pi}{12}$
- ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ $\frac{7\pi}{12}$
- ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

9 : 2009 3 13 (2)

13. 그림과 같이 함수 $y=\sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 그래프가 직선

$y=\frac{3}{5}$ 과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=-\frac{3}{5}$ 과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{4}\pi$
- ② $\frac{5}{2}\pi$
- ③ 3π
- ④ $\frac{7}{2}\pi$
- ⑤ 4π

9 : 2022 9 9

9. 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}, \quad g(x) = -3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1$$

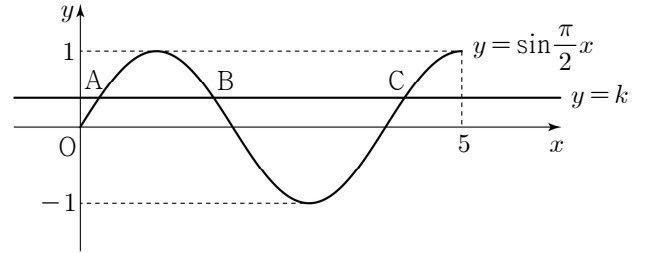
이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 α_1, α_2 라 할 때, $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이다. 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 β_1, β_2 라 할 때, $|\beta_1 - \beta_2|$ 의 값은? (단, k 는 $-1 < k < 1$ 인 상수이다.) [4점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

9 : 2022 7 10

10. 곡선 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 5$)가 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)과 만나는 서로 다른 세 점을 y 축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



10 : 2009 9 가 가 24

14 : 2022 6 13

24. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 항상 지나는 점들의 y 좌표의 합을 구하시오. [4점]

- (가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.
- (나) 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, f(2))$ 에서 직선 $y=2$ 에 접한다.
- (다) $f'(0)=0$

13. 두 곡선 $y=16^x, y=2^x$ 과 한 점 $A(64, 2^{64})$ 이 있다.

점 A 를 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$ 과 만나는 점을 P_1 이라 하고, 점 P_1 을 지나며 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 Q_1 이라 하자.

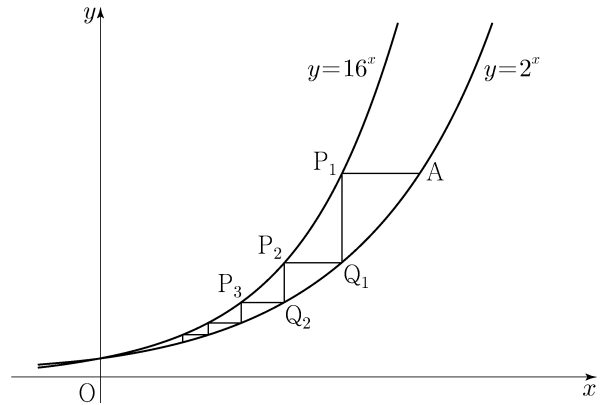
점 Q_1 을 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$ 과 만나는 점을 P_2 라 하고, 점 P_2 를 지나며 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 Q_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하고 점 Q_n 의 x 좌표를 x_n 이라 할 때,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이 되도록 하는

자연수 k 의 개수는? [4점]

- ① 48
- ② 51
- ③ 54
- ④ 57
- ⑤ 60



14 : 2022 21

고

11 : 2022 11

21. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} |3^{x+2} - n| & (x < 0) \\ |\log_2(x+4) - n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

11. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

11 : 2018 9 28 ()

28. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + t, \quad v_2(t) = 2t^2 + 3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a 라 할 때, $9a$ 의 값을 구하시오. [4점]

고

21번 문제: 2019년 7월 학평 29번 (나형)

29. 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $S_9 = S_{18}$ 이다. 집합 T_n 을

$$T_n = \{S_k \mid k = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

이라 하자. 집합 T_n 의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

21 : 2022 6 12

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은? [4점]

$$(가) a_5 \times a_7 < 0$$

$$(나) \sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

- ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

21 : 2022 9 13

13. 첫째항이 -45 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d 의 값의 합은? [4점]

$$(가) |a_m| = |a_{m+3}| \text{인 자연수 } m \text{이 존재한다.}$$

$$(나) \text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } \sum_{k=1}^n a_k > -100 \text{이다.}$$

- ① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

25. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_0^2 f(t)dt = a \text{라 하면,}$$

$$f(x) = 3x^2 + x + a \text{이다.}$$

$$\int_0^2 (3t^2 + t + a)dt = a \quad \therefore a = -10$$

$$f(x) = 3x^2 + x - 10$$

$$\therefore f(2) = 4$$

16. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수의 미정 계수를 구한다.

$$a = \int_0^1 |f(t)|dt \text{라 하면 } a > 0 \text{ 이고}$$

$$f(x) = x^3 - 4ax$$

$$f(1) = 1 - 4a > 0 \text{에서 } a < \frac{1}{4}$$

따라서 $0 < a < \frac{1}{4}$ 이다.

$$f(x) = x(x^2 - 4a) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \pm 2\sqrt{a}$$

$$0 < x < 2\sqrt{a} \text{ 일 때 } f(x) < 0 \text{ 이고 } x \geq 2\sqrt{a} \text{ 일 때}$$

$$f(x) \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$0 < a < \frac{1}{4} \text{에서 } 2\sqrt{a} < 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{2\sqrt{a}} \{-f(t)\}dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{a}} (-t^3 + 4at)dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 (t^3 - 4at)dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1 \\ &= 8a^2 - 2a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 0 \text{에서}$$

$$32a^2 - 12a + 1 = 0, (4a-1)(8a-1) = 0$$

$$0 < a < \frac{1}{4} \text{이므로 } a = \frac{1}{8} \text{ 이고}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{이때 } f(2) = 2^3 - \frac{1}{2} \times 2 = 7$$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a} \text{에서 } 0 \leq ax \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2\cos ax = 1, \text{ 즉 } \cos ax = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$ax = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } ax = \frac{5\pi}{3}, \text{ 즉 } x = \frac{\pi}{3a} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3a}$$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\frac{\pi}{3a}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{3a}, 1\right)$ 이고

$$\overline{AB} = \frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{5\pi}{3a} - \frac{\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3a} = \frac{8}{3}$$

$$a = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2}$$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 교점의 x 좌표의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 점 A, B는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{A}$$

두 점 C, D는 직선 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \gamma + \delta = \frac{3}{2}\pi \quad \dots \textcircled{B}$$

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \beta + \gamma = \pi \quad \dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \delta)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$= 3\pi$$

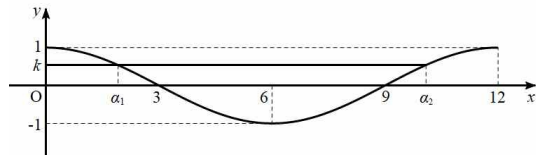
9. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위 그림과 같이 일반성을 잃지 않고

$$\alpha_1 < \alpha_2$$

라 하면

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 12$$

주어진 조건에 의하여

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 8$$

이므로

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 10$$

그러므로

$$k = \cos\left(\frac{\pi \times 2}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

한편,

$$-3\cos\frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$$

에서

$$\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq 12$ 에서 $0 \leq \frac{\pi x}{6} \leq 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{\pi x}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

즉, $x=4$ 또는 $x=8$

따라서

$$|\beta_1 - \beta_2| = |4 - 8| = 4$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각

$x_1 (0 < x_1 < 1)$, x_2 , x_3 이라 하면

삼각함수 $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로

$$x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$$

$$= x_1 + 6 = \frac{25}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$$

24.

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 곡선 $y=f(x)$ 가

점 $(2, f(2))$ 에서 접하므로

$$f(x) = (x-2)^2(x^2+ax+b)+2$$

로 놓을 수 있다.

$$f'(x) = 2(x-2)(x^2+ax+b) + (x-2)^2(2x+a)$$

이 때, $f'(0) = 0$ 이므로 대입하면

$$-4b + 4a = 0$$

$$\therefore a = b$$

이 식을 대입하고 $f(x)$ 를 y 로 놓으면

$$y = (x-2)^2(x^2+ax+a)+2$$

이 식을 a 에 관하여 정리하면

$$a(x+1)(x-2)^2 + (x-2)^2x^2 + 2 - y = 0$$

이 식은 a 에 관한 항등식이므로

$$(x+1)(x^2-2)^2 = 0 \text{ --- } \textcircled{1}$$

이고

$$(x-2)^2x^2 + 2 - y = 0 \text{ --- } \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에

대입하면

$$y = 11 \text{ 또는 } y = 2$$

따라서 모든 y 좌표의 합은 13이다.

답 13

13. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x 좌표는 64이고 점 Q_1 의 x 좌표는 x_1 이다.

이때 두 점 A와 P_1 의 y 좌표가 같으므로

$$2^{64} = 16^{x_1}$$

$$2^{64} = 2^{4x_1}$$

$$4x_1 = 64$$

$$x_1 = 16$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표는 x_n 으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 y 좌표는 같으므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$$

즉,

$$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$$

이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편,

$$x_n < \frac{1}{k}$$

을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이므로

따라서

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } x_6 < \frac{1}{k}$$

이어야 한다.

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-4} \geq \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \text{에서 } k \geq 16 \dots \textcircled{7}$$

$$x_6 < \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-6} < \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \text{에서 } k < 64 \dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 자연수 k 의 개수는 $64 - 16 = 48$ 이다.

정답 ①

21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

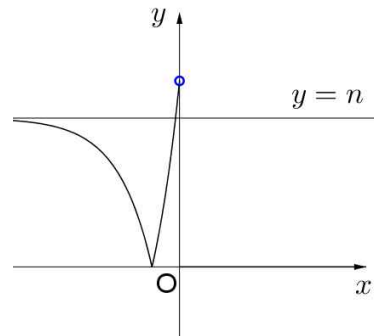
정답풀이 :

함수 $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

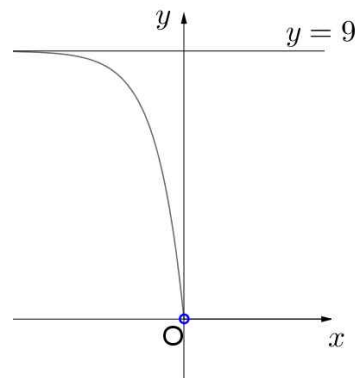
함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y = n$ 이다.

$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

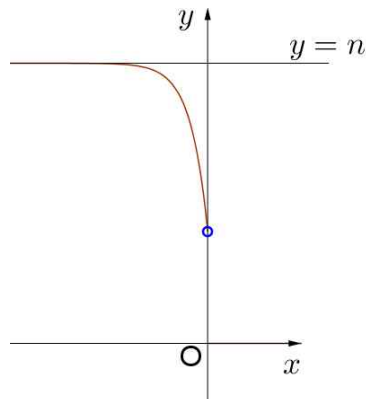
$1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

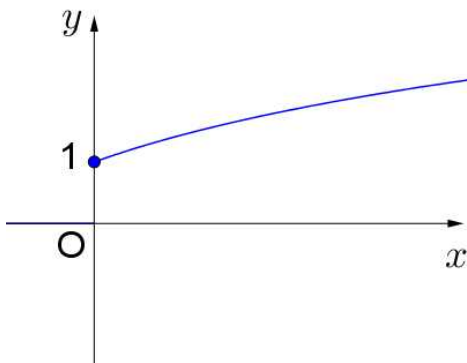


또, 함수 $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

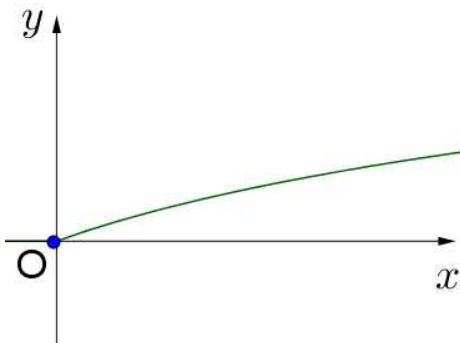
함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

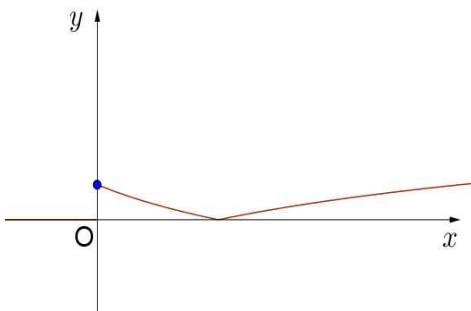
$n = 1$ 일 때,



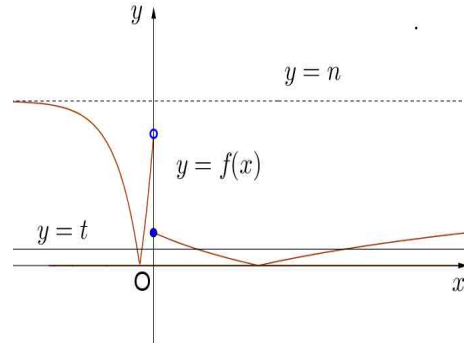
$n = 2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로 $9-n > 0$ 이고 $2-n < 0$ 이어야 한다. 즉, $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수 n 의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8 이고, 그 합은 $3+4+5+6+7+8 = 33$ 이다.

정답 33

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t (2-t) dt \\ &= \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t \\ &= 2t - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0, \quad t^2 - 4t = 0$$

$$t(t-4) = 0$$

$$t = 4$$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |3t| dt &= \int_0^4 3t dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

28. 출제의도 : 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간

$$v_1(t) = v_2(t)$$

이므로

$$3t^2 + t = 2t^2 + 3t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = 2$

$t = 2$ 일 때 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 v_1(t) dt = \int_0^2 (3t^2 + t) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2$$

$$= 10$$

$t = 2$ 일 때 점 Q의 위치는

$$0 + \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (2t^2 + 3t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3} + 6 = \frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a 는

$$a = \left| \frac{34}{3} - 10 \right| = \frac{4}{3}$$

이므로

$$9a = 9 \times \frac{4}{3} = 12$$

정답 12

29. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a \neq 0$),

공차를 d 라 하면

$$S_9 = S_{18} \text{ 이므로}$$

$$\frac{9(2a + 8d)}{2} = \frac{18(2a + 17d)}{2}$$

$$a = -13d$$

$$S_n = \frac{n\{-26d + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n(n-27)$$

$$S_1 = S_{26} = -13d,$$

$$S_2 = S_{25} = -25d,$$

$$S_3 = S_{24} = -36d,$$

⋮

$$S_{13} = S_{14} = -91d,$$

$$S_{27} = 0, S_{28} = 14d, S_{29} = 29d, \dots$$

집합 T_n 의 원소의 개수가 13이 되도록 하는

자연수 n 의 값은 13, 14, \dots , 26

따라서 모두 자연수 n 의 값의 합은

$$13 + 14 + 15 + \dots + 26 = 273$$

12. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$$a_5 \times a_7 < 0$$

이므로

$$a_5 < 0, a_7 > 0$$

즉, $n \leq 5$ 일 때 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 7$ 일 때

$a_n > 0$ 이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$$

$$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$$

$$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$$

$$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$$

$$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78 \quad \dots \textcircled{7}$$

⊙에서 $a_1 + 15 \geq 0$ 이면

$$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$$

$$4a_1 = -63$$

$$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$ 이므로 ⊙에서

$$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$$

$$6a_1 = -93$$

$$a_1 = -\frac{31}{2}$$

따라서

$$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$$

$$= -\frac{31}{2} + 27$$

$$= \frac{23}{2}$$

13. 출제의도 : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1 = -45 < 0$ 이고 $d > 0$ 이므로

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$$a_m < 0, a_{m+3} > 0$$

$$\text{즉, } -a_m = a_{m+3} \text{ 에서 } a_m + a_{m+3} = 0$$

따라서,

$$\{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\} = 0$$

$$-90 + (2m+1)d = 0$$

$$(2m+1)d = 90 \cdots \textcircled{7}$$

이고 $2m+1$ 은 1보다 큰 홀수이므로 d 는 짝수이다.

그런데, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $\textcircled{7}$ 을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1)d\}}{2} > -100$$

$$n\{-90 + (n-1)d\} > -200 \cdots \textcircled{8}$$

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{8}$ 을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d 의 값의 합은

$$18 + 30 = 48$$

:

4

2

3

3

3

3

3

13

1

33

5

12

273

3

2