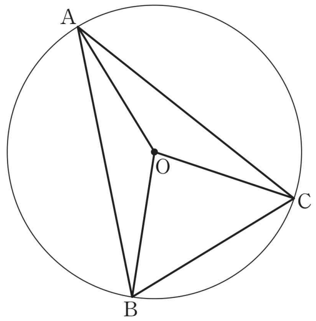
삼각함수 활용~수열 귀납추론

p.13 부터 해설

2020년 3월학평 가형 19번

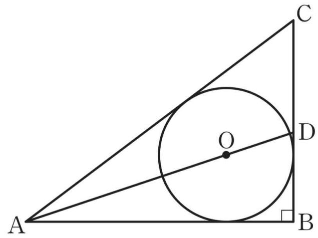
1. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1 = 4S_2$이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는? (4점)



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

2020년 10월학평 가형 17번

3. 그림과 같이 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB} = 4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는? (4점)



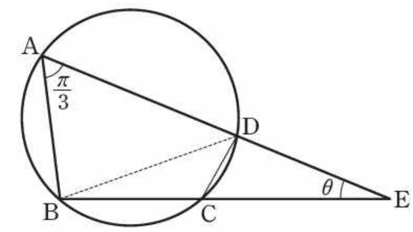
① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$
④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

2022년 3월학평 15번

6. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\ \overline{AD}=3,\ \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

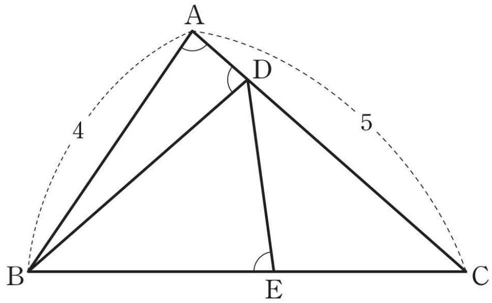
> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{CD}=$ (가) 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면 $\overline{ED}=$ (나) 이다.
> 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? (4점)

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$　⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

2022학년도 6월모평 12번

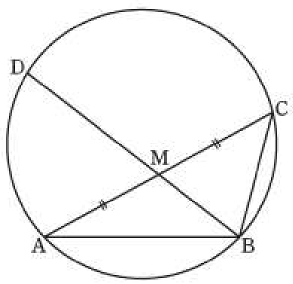
7. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$일 때, 선분 DE의 길이는? (4점)



① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ 3

2023학년도 6월모평 10번

8. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}>3$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? (4점)



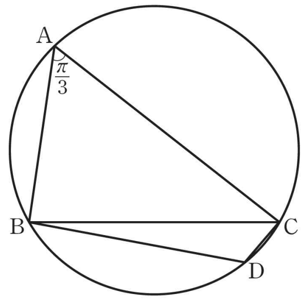
① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

2022학년도 9월모평 12번

10. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle \mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?

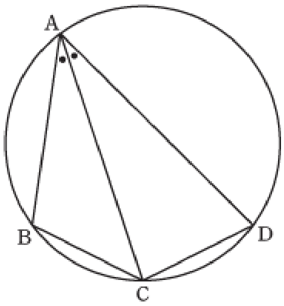
(4점)

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$
④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



2023학년도 수능 11번

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AD}}=7$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$일 때, 이 원의 반지름의 길이는? (4점)



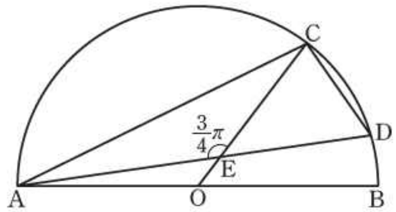
① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

2023학년도 9월모평 13번

12. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\ \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\ \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? (4점)



① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$

2007년 3월학평 나형 22번

15. n개의 항으로 이루어진 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

이때 n의 값을 구하시오. (4점)

2021학년도 9월모평 가형 27번

19. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. (4점)

2022년 3월학평 13번

22. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? (4점)

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7
④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

2023학년도 9월모평 15번

23. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다.
(단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.)
(나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? (4점)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

2020학년도 6월모평 나형 28번

.

27. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. (4점)

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

2019년 10월학평 나형 17번

28. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다.
(나) $S_{10} = S_{50} = 10$
(다) S_n은 $n = 30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은? (4점)

① 39 ② 40 ③ 41
④ 42 ⑤ 43

2020학년도 수능 나형 15번

30. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? (4점)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

2022학년도 6월모평 13번

34. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? (4점)

① 150 ② 160 ③ 170
④ 180 ⑤ 190

2022학년도 수능 21번

36. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2 \lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. (4점)

2023학년도 6월모평 12번

37. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? (4점)

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{k+6} \rvert = 6 + \sum_{k=1}^{6} \lvert a_{2k} \rvert$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2023학년도 수능 13번

40. 자연수 $m\,(m \ge 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? (4점)

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

2021년 3월학평 19번

47. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.
$a_1 = 2$, $a_2 = 4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_n S_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. (3점)

2022년 4월학평 12번

49. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \le n \le 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+4} = 15$이다.
(나) $n \ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은? (4점)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

2022학년도 9월모평 15번

50. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? (4점)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

2023학년도 6월모평 15번

51. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? (4점)

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해
설
지

2020년 3월학평 가형 19번

1. $\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC는

직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2는 각각

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$ 이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$ 이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

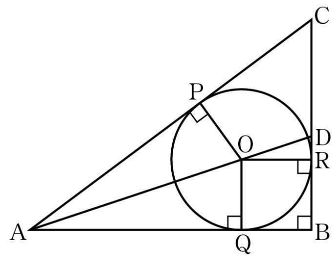
따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}\\&=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

2020년 10월학평 가형 17번

3.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$ 이므로 $\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=1$

$\overline{DO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$\sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 $1:3$ 이므로

$\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$, $12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$

$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$ 이므로 $\overline{CR}=6$, 즉 $\overline{CD}=5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$\angle DAB=\angle DOR$, 즉 $\angle CAD=\angle DOR$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$

$R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$\frac{125}{2}\pi$이다.

2022년 3월학평 15번

6. 삼각형 ABD 와 삼각형 BCD 에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD 의 길이를 구하자.

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times \cos\frac{\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$ 이다.

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$ 이므로 삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 + \overline{CD}^2 - 2\times 2\times \overline{CD}\times \cos\frac{2\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{CD} = \boxed{1}$ 이다.

삼각형 EAB 와 삼각형 ECD 에서 $\angle AEB$ 는 공통이고 $\angle EAB = \angle ECD$ 이므로 삼각형 EAB 와 삼각형 ECD 는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 이다. 즉,

$\frac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$

에서 $\overline{ED} = \boxed{\frac{7}{3}}$ 이다.

$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD 에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin\theta}$

에서 $\sin\theta = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$ 이다.

$p=1,\ q=\frac{7}{3},\ r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이므로

$(p+q)\times r = \left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$

2022학년도 6월모평 12번

7.

삼각형 ABD에서

$\angle BAC = \angle BDA$이고 $\overline{AB} = 4$이므로

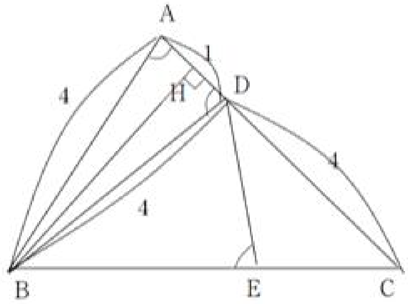
$\overline{BD} = 4$ ……㉠

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AB}\cos(\angle BAC) = 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

그러므로

$\overline{AD} = 1$



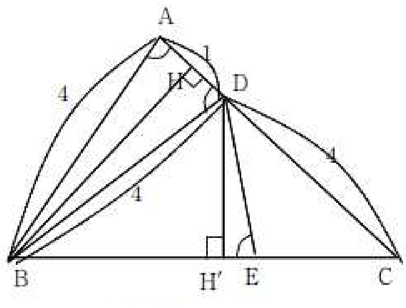
삼각형 BCD는 $\overline{DB} = \overline{DC} = 4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{DE} = x$라 하면

$\overline{DH'} = x\sin(\angle H'ED)$

$= x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{63}}{8}x$ …… ㉡



한편, 삼각형 ABC에서

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

$-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$= 4^2 + 5^2 - 2\times 4\times 5\times\frac{1}{8}$

$= 36$

이 므 로

$\overline{BC} = 6$ 이때 $\overline{BH'} = \frac{1}{2},\ \overline{BC} = 3$ …… ㉢

직각삼각형 BDH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2\ \frac{63}{64}x^2 = 7 \quad \therefore x^2 = \frac{64}{9}$

$\overline{DE} = x$이므로 $x > 0$, 따라서 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$ 정답 ③

2023학년도 6월모평 10번

8.

$\angle BAC=\theta$, $\overline{AC}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$

즉,

$$2^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\frac{7}{8}$$

$$a^2-\frac{21}{4}a+5=0,$$

$$4a^2-21a+20=0$$

$$(4a-5)(a-4)=0$$

따라서 조건에서 $a>3$ 이므로 $a=4$

$$\overline{AM}=\overline{CM}=\frac{a}{2}=2$$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$$

$$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{7}{8}$$

$$=\frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{MB}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$$

에서

$$2\times2=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{MD}$$

따라서

$$\overline{MD}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

정답 ③

2022학년도 9월모평 12번

10.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}$$

$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$x^2+8x-20=0$$

$$(x-2)(x+10)=0$$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}$$

$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$x^2+8x-20=0$$

$$(x-2)(x+10)=0$$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

2023학년도 수능 11번

11.

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$= 25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$= 70-30\sqrt{5}\cos\theta$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하

$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$= 49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$= 94-42\sqrt{5}\cos\theta$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$이므로 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta = 94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2 = 70-30\sqrt{5}\cos\theta = 70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$

즉, $\overline{BC} = \sqrt{10}$

한편, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$이므로

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$

$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R \Rightarrow \quad 5\sqrt{2} = 2R \Rightarrow \quad \therefore R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

2023학년도 9월모평 13번

12.

삼각형 CDE에서 $\angle CED = \frac{\pi}{4}$이므로 코사인법칙에 의해

$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{CE}\times\overline{ED}\times\cos\frac{\pi}{4}$

$= 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 10$이므로

$\overline{CD} = \sqrt{10}$

$\angle CDE = \theta$라 하면 삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 의해

$\cos\theta = \frac{\overline{ED}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{CE}^2}{2\times\overline{ED}\times\overline{CD}} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 4^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

이므로 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{AC} = x$, $\overline{AE} = y$라 하면 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

$x^2 = y^2 + 4^2 - 2\times y\times4\times\cos\frac{3}{4}\pi$,

$x^2 = y^2 + 16 - 2\times y\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$x^2 = y^2 + 4\sqrt{2}y + 16$ ⋯ ㉠

한편, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin\theta} = 2R$, 즉 $\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2R$

$2R = \frac{\sqrt{5}}{2}x$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 $\angle CAB = \alpha$라 하면

$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

이등변삼각형 AOC에서

$\angle ACO = \angle CAO = \alpha$

이므로 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \frac{y}{\sin\alpha}$, 즉 $\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$에서

$\sqrt{2}x = \sqrt{5}y$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{5}{2}y^2 = y^2 + 4\sqrt{2}y + 16$,

$\frac{3}{2}y^2 - 4\sqrt{2}y - 16 = 0$,

$3y^2 - 8\sqrt{2}y - 32 = 0$

$(3y+4\sqrt{2})(y-4\sqrt{2}) = 0$에서

$y = 4\sqrt{2}$

이므로

$\overline{AC} = x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times4\sqrt{2} = 4\sqrt{5}$

따라서

$\overline{AC}\times\overline{CD} = 4\sqrt{5}\times\sqrt{10} = 20\sqrt{2}$

정답 ⑤

2007년 3월학평 나형 22번

15.

(가)와 (나)에서

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$,

$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$

이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 160$

$4(a_1 + a_n) = 160 \quad \therefore\ a_1 + a_n = 40$

한편, $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = 260$ 이므로 $\dfrac{40n}{2} = 260$

2021학년도 9월모평 가형 27번

19.

모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$

이 성립하고

$S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13 \times 3^{n-1}$ ……㉠

이 성립한다.

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2 + a_3 + a_4 = 13$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하

면

$a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 13$

$a_1 r(1 + r + r^2) = 13$ ……㉡

또, ㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3 + a_4 + a_5 = 13 \times 3 = 39$

이므로

$a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 = 39$

$a_1 r^2 (1 + r + r^2) = 39$ ……㉢

㉢÷㉡을 하면

$\dfrac{a_1 r^2 (1 + r + r^2)}{a_1 r (1 + r + r^2)} = \dfrac{39}{13}$

에서 $r = 3$

$r = 3$을 ㉡에 대입하면

$a_1 \times 3 \times (1 + 3 + 9) = 13$

에서 $a_1 = \dfrac{1}{3}$

따라서 $a_4 = a_1 r^3 = \dfrac{1}{3} \times 3^3 = 9$

정답 9

2022년 3월학평 13번

22.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d \geq 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$이어야 한다.

(ⅰ) $S_3 = S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1+2d)}{2} = \frac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1 = -4d$이므로

$S_3 = S_6 = -9d > 0$,

$S_{11} = \frac{11(2a_1+10d)}{2} = 11d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-9d = -11d - 3$, $d = -\frac{3}{2}$

$a_1 = -4d = 6$

(ⅱ) $S_3 = -S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1+2d)}{2} = -\frac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1 = -2d$이므로

$S_3 = -S_6 = -3d > 0$

$S_{11} = \frac{11(2a_1+10d)}{2} = 33d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-3d = -33d - 3$, $d = -\frac{1}{10}$

$a_1 = -2d = \frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은 $6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$이다.

2023학년도 9월모평 15번

23.

조건 (가)에 의하여 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$

조건 (나)에 의하여

$a_4 = r$이고 $0 < |r| < 1$에서 $|a_4| < 5$이므로

$a_5 = r + 3$

$|a_5| < 5$이므로

$a_6 = a_5 + 3 = r + 6$

$|a_6| \geq 5$이므로

$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = -\frac{r}{2} - 3$

$|a_7| < 5$이므로

$a_8 = a_7 + 3 = -\frac{r}{2}$

그러므로 $r^2 = -\frac{r}{2}$

$r \neq 0$이므로 $r = -\frac{1}{2}$

즉, $a_4 = -\frac{1}{2}$

이때 $|a_3| < 5$이면 $a_3 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$이고 이것은 조건을 만족시키며, $|a_3| \geq 5$이면 $a_3 = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$인데 이것은 조건을 만족시키지 않으므로

$a_3 = -\frac{7}{2}$

또, $|a_2| < 5$이면 $a_2 = -\frac{7}{2} - 3 = -\frac{13}{2}$인데 이것은 조건을 만족시키지 않고, $|a_2| \geq 5$이면 $a_2 = -2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 7$이고 이것은 조건을 만족시키므로

$a_2 = 7$

또, $|a_1| < 5$이면 $a_1 = 7 - 3 = 4$이고, $|a_1| \geq 5$이면 $a_1 = -2 \times 7 = -14$인데 조건

(나)에 의하여 $a_1 < 0$이므로

$a_1 = -14$

따라서

$a_1 = -14$, $a_2 = 7$, $a_3 = -\frac{7}{2}$, $a_4 = -\frac{1}{2}$,

$a_5 = -\frac{1}{2} + 3$, $a_6 = -\frac{1}{2} + 6$, $a_7 = \frac{1}{4} - 3$, $a_8 = \frac{1}{4}$,

$a_9 = \frac{1}{4} + 3$, $a_{10} = \frac{1}{4} + 6$, $a_{11} = -\frac{1}{8} - 3$, $a_{12} = -\frac{1}{8}$,

…

이와 같은 과정을 계속하면

$|a_1| \geq 5$이고, 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}| \geq 5$임을 알 수 있다.

그러므로 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m은

1, 2, 6, 10, ⋯, 98

이고, $2 = 4 \times 1 - 2$, $98 = 4 \times 25 - 2$이므로

$p = 1 + 25 = 26$

따라서

$p + a_1 = 26 + (-14) = 12$

정답 ③

2020학년도 6월모평 나형 28번

.

27.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r(r는 정수)라 하면

첫째항이 2이므로 $a_n = 2r^{n-1}$

$a_2 = 2r,\ a_3 = 2r^2$이므로

조건 (가)에서

$4 < 2r + 2r^2 \le 12$ 즉, $2 < r + r^2 \le 6$

$r^2 + r > 2$에서

$r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) > 0$이므로

r<-2 또는 r>1 ----㉠

$r^2 + r \le 6$에서

$r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) \le 0$이므로

$-3 \le r \le 2$ ----㉡

㉠, ㉡에서

$-3 \le r < 2$ 또는 $1 < r \le 2$

r는 정수이므로 r=-3 또는 r=2

(i) r=2인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} (2 \times 2^{k-1}) = \frac{2(2^m - 1)}{2-1} = 2(2^m - 1)$$

$2(2^m - 1) = 122$에서

$2^m - 1 = 61,\ 2^m = 62$

이때 $2^m = 62$를 만족시키는 m 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) r=-3인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \{2 \times (-3)^{k-1}\}$$
$$= \frac{2\{1-(-3)^m\}}{1-(-3)}$$
$$= \frac{1-(-3)^m}{2}$$

$\frac{1-(-3)^m}{2} = 122$에서

$1 - (-3)^m = 244$

$(-3)^m = -243$

즉, $(-3)^m = (-3)^5$이므로 m=5

$i),\ (\mathrm{ii})$에 의하여 r=-3, m=5 이므로

$a_m = a_5 = 2 \times (-3)^4 = 162$

2019년 10월학평 나형 17번

28.

S_n의 이차항의 계수를 a라 하자. 조건에서

$S_{10} = S_{50}$ 이고 S_n은 $n = 30$ 일 때 최댓값 410을 가지므로

$S_n = a(n-30)^2 + 410$

$S_{10} = 10$ 이므로 $10 = a(10-30)^2 + 410$ 에서

$a = -1$

그러므로 $S_n = -(n-30)^2 + 410$

$S_m > S_{50} = S_{10}$을 만족시키는 자연수 m의 범위는

$10 < m < 50$ 이므로 $p = 11,\ q = 49$

따라서 $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=11}^{49} a_k = S_{49} - S_{10}$

$= \{-(49-30)^2 + 410\} - 10 = 39$

2020학년도 수능 나형 15번

30.

$$S_n=\frac{n\{2\times 50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$

$$=-2n^2+52n$$

$$=-2(n-13)^2+2\times 13^2$$

이므로 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값은 $m=11$일 때 최대가 된다.

정답 ④

2022학년도 6월모평 13번

34.

(ⅰ) $k=1,4,9,16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ⅱ) $k\neq 1,4,9,16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{20} k=210$이고, $1+4+9+16=30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\left\{k\times\frac{f(\sqrt{k})}{3}\right\}$$

$$=30\times\frac{1}{3}+(210-30)\times\frac{3}{3}$$

$$=10+180=190$$

정답 ⑤

2022학년도 수능 21번

36.

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2,$$

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1=-2,\ a_2=-4$

$$\sum_{k=3}^{9}a_k=\sum_{k=3}^{9}2^k=\frac{2^3(2^7-1)}{2-1}=2^{10}-8,$$

$a_{10}=-1024$

이어야 한다.

따라서

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=(-2)+2^3+2^5+2^7+2^9$

$=678$

정답 678

2023학년도 6월모평 12번

37.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$

이므로

$a_5 < 0,\ a_7 > 0$

즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$$
$$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$$

$a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$$(a_1+18)+(a_1+24)+(a_1+30)$$
$$=6-(a_1+3)-(a_1+9)+|a_1+15|$$

$|a_1+15|=5a_1+78$ $\cdots\cdots$㉠

㉠에서 $a_1+15 \ge 0$이면

$a_1+15=5a_1+78$

$4a_1=-63$

$a_1=-\dfrac{63}{4} < -15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1+15<0$이므로 ㉠에서

$-a_1-15=5a_1+78$

$6a_1=-93$

$a_1=-\dfrac{31}{2}$

따라서

$$a_{10}=a_1+9\times 3$$
$$=-\frac{31}{2}+27$$
$$=\frac{23}{2}$$

정답 ③

2023학년도 수능 13번

40.

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n=m^{12}$ ----㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=4^{12}$

즉,

$x^n=2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(4)=7$

(iv) $m=5$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(5)=5$

(v) $m=6$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(6)=5$

(vi) $m=7$일 때,

㉠의 방정식은

2021년 3월학평 19번

47.

$S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$ 이므로 $a_{n+1}S_n = a_n(a_{n+1} + S_n)$,

$(S_n - a_n)a_{n+1} = a_n S_n$

즉, $S_{n-1}a_{n+1} = a_n S_n \ (n \geq 2)$ …… ㉠

$a_1 = S_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이므로 $S_2 = a_1 + a_2 = 6$

㉠에서 $a_{n+1} = \dfrac{a_n S_n}{S_{n-1}}$ …… ㉡

㉡에 $n=2$, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3 = \dfrac{a_2 S_2}{S_1} = \dfrac{4 \times 6}{2} = 12$ 에서 $S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 12 = 18$

$a_4 = \dfrac{a_3 S_3}{S_2} = \dfrac{12 \times 18}{6} = 36$ 에서 $S_4 = S_3 + a_4 = 18 + 36 = 54$

$a_5 = \dfrac{a_4 S_4}{S_3} = \dfrac{36 \times 54}{18} = 108$

따라서 $S_5 = S_4 + a_5 = 162$

2022년 4월학평 12번

49.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8)$$
$$= 15 \times 4 = 60$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$이므로 $\displaystyle\sum_{n=5}^{8} a_n = 54$

조건 (나)에 의하여

$a_6 = a_5 + 5$,

$a_7 = a_6 + 6 = a_5 + 11$,

$a_8 = a_7 + 7 = a_5 + 18$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=5}^{8} a_n = 4a_5 + 34 = 54$에서 $a_5 = 5$

2022학년도 9월모평 15번

50.

$a_5 + a_6 = 0$에서 $3a_5 = 0$

즉, $a_5 = 0$

$\dfrac{1}{2} < a_5 \leq 1$이면 $a_6 = -2a_5 + 2$이므로

$a_5 + a_6 = 0$에서 $-a_5 + 2 = 0$

즉, $a_5 = 2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5 = 0$이고 이때 $a_4 = -1$ 또는 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = 1$이다.

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$일 때

$a_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2}a_{n+1}$

(i) $a_4 = -1$인 경우

$a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 = 0$인 경우

㉠ $a_3 = -1$인 경우

$a_2 < 0$, $a_1 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3 = 0$인 경우

$a_2 = 0$ 또는 $a_2 = 1$이고,

$a_2 = 0$일 때 $a_1 = 1$이면 조건을 만족시키고, $a_2 = 1$일 때 $a_1 = \dfrac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3 = 1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고, $a_2=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$$

정답 ①

2023학년도 6월모평 15번

51.

고고

$a_1=0$이므로

$$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$$

$a_2>0$이므로

$$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$$

$a_3<0$이므로

$$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$$

$a_5<0$이므로

$$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$$

$a_7<0$이므로

$$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\neq 0$이다.

$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\neq 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k\ge 11$이면 $a_{22}\neq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

정답 ②