제 2 교시

# 수학 영역

KSM

5 지 선 다 형

*1.* $2^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

*2.* 함수 $f(x)=2x^3+3x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

$f'(x)=6x^2+3$

$2f'(0)=6$

*3.* 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 2인 등비수열 $\{b_n\}$이

$a_2=b_2,\ a_4=b_4$

를 만족시킬 때, $a_1+b_1$의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_2+6=4b_2=4a_2,$

$a_2=2=b_2$

$a_1=-1,\ b_1=1$

*4.* 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 함수 $f(x)=x(x-m)(x-n)$이

$f(1)f(3)<0,\ f(3)f(5)<0$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

$m=2,\ n=4$

$f(x)=x(x-2)(x-4)$

$f(6)=6\cdot4\cdot2=48$

5. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 $\theta$에 대하여

$$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=18$$

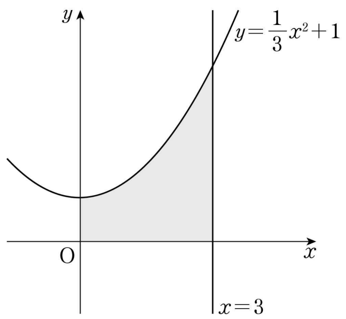
일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{S^2}=18,\ S^2=\frac{1}{9},\ S=-\frac{1}{3}$

6. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2+1$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $6$ ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ $8$ ⑤ $\frac{26}{3}$




$\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx$

$=\ \frac{1}{9}x^3+x\Big|_0^3=6$

7. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때,

$$S_7-S_4=0,\ S_6=30$$

이다. $a_2$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$a_5+a_6+a_7=2a_6=0$

$a_6=0$

$S_6=3(a_1+a_6)=30$

$a_1+a_6=10$

$\therefore a_1=10$

$5d=-10$

$d=-2$

$a_2=8$

*8.* 두 함수

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2,\ g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + a$$

가 있다. 모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$$f(x) \le g(x)$$

가 성립할 때, 실수 $a$의 최솟값은? [3점]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

$h = g - f = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a \ge 0$

$h' = 4x^3 + 4x^2 - 8x$

$= 4x(x^2 + x - 2)$

$= 4x(x+2)(x-1)$

$-2 \quad 0 \quad 1$

$h(-2) = a - \frac{32}{3} \ge 0$

$\therefore a \ge \frac{32}{3}$

*9.* 자연수 $n\,(n \ge 2)$에 대하여 $n^2 - 16n + 48$의 $n$제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$x^n = (n-4)(n-12)$

$4 \quad 12$

$(3,5,7,9)$ 홀 $\Rightarrow 1$

$f(2) = 2$

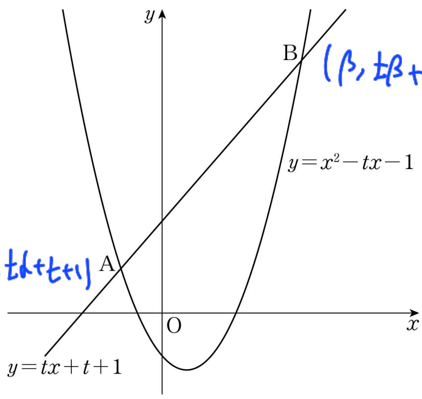
$f(4) = 1$

$f(6) = f(8) = f(10) = 0$

$\therefore 1 \times 4 + 2 + 1 + 0 = 7$

*10.* 실수 $t\,(t > 0)$에 대하여 직선 $y = tx + t + 1$과 곡선 $y = x^2 - tx - 1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$




$(\beta, t\beta + t + 1)$

$(\alpha, t\alpha + t + 1)$

$x^2 - 2tx - t - 2 = 0$ $\quad \begin{cases} \alpha + \beta = 2t \\ \alpha\beta = -t - 2 \end{cases}$

$|\alpha - \beta| = \sqrt{4t^2 + 4t + 8}$

$\overline{AB} = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + t^2(\alpha-\beta)^2} = |\alpha - \beta|\sqrt{1 + t^2}$

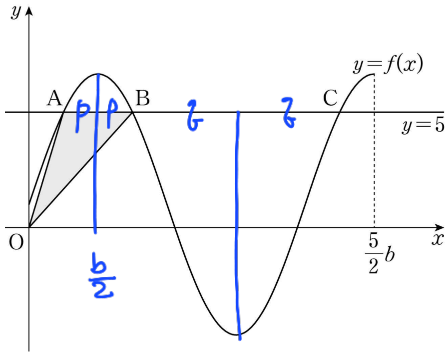
$\therefore \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{4t^2 + 4t + 8}\sqrt{1 + t^2}}{t^2} = 2 \times 1 = 2$

*11.* 그림과 같이 두 상수 $a$, $b$에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\left(0\le x\le \frac{5}{2}b\right)$$ 주기 $2b$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 $x$좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, $a^2+b^2$의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.) [4점]




① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

$\overline{BC}=2q=2p+6$ $\quad p-q=-3$

$\overline{AC}=2p+2q=2b$ $\quad p+q=b$

$p=\frac{b-3}{2}$, $q=\frac{b+3}{2}$

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times 2p\times 5=\frac{15}{2}$, $p=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow b=6$

$\frac{b}{2}-p=\frac{3}{2}$

$A\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

$a\sin\frac{3}{2b}\pi+1=5$

$a\sin\frac{\pi}{4}+1=5$, $a=4\sqrt{2}$

$a^2+b^2=32+36=68$

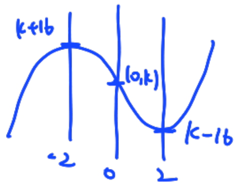
*12.* 양수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$를

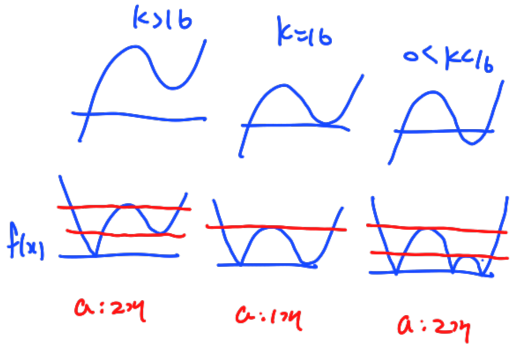
$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a\,(a\ge 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 $a$의 값이 오직 하나일 때, $k$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

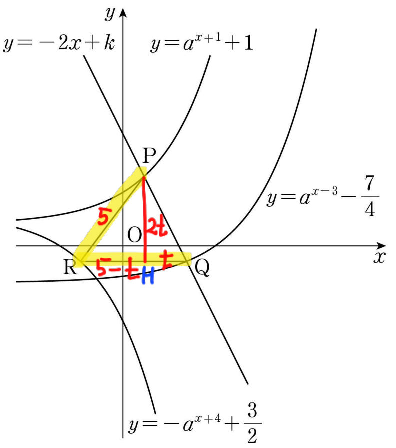


13. 그림과 같이 두 상수 $a\,(a>1)$, $k$에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1,\quad y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 함수 $y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}=5$일 때, $a+k$의 값은? [4점]




① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $7$ ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

△PRH ⇒ $5^2=(5-t)^2+(2t)^2$

$5t^2-10t=0$, $t=2$

P$(d, -2d+k)$ → $a^{d+1}+1=-2d+k$ ①

Q$(d+2, -2d+k-4)$ → $a^{d-1}-\frac{7}{4}=-2d+k-4$ ②

R$(d-3, -2d+k-4)$ → $-a^{d+1}+\frac{3}{2}=-2d+k-4$ ③

① − ③ ⇒ $2\cdot a^{d+1}-\frac{5}{2}=4$, $a^{d+1}=\frac{9}{4}$

① ⇒ $-2d+k=\frac{13}{4}$

② ⇒ $a^{d-1}-\frac{7}{4}=\frac{13}{4}-4$

$a^{d-1}=1$, $d=1$, $a^2=\frac{9}{4}$, $a=\frac{3}{2}$

$-2+k=\frac{13}{4}$, $k=\frac{21}{4}$

∴ $a+k=\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{27}{4}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\int_4^n f(x)\,dx\ge 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

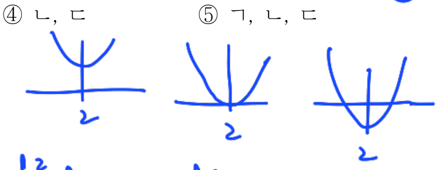
< 보 기 >

ㄱ. $f(2)<0$

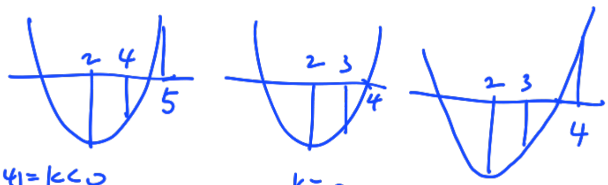
ㄴ. $\int_4^3 f(x)\,dx>\int_4^2 f(x)\,dx$

ㄷ. $6\le\int_4^6 f(x)\,dx\le 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ




$\int_4^2 f<0$ (×) $\int_4^2 f<0$ (×) $f(x)=x^2-4x+k$, $k<4$




$f(4)=k<0$
$f(5)=5+k>0$
$-5<k<0$
$\int_4^5 f=[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx]_4^5$
$=\frac{61}{3}-2\cdot 9+k\ge 0$
$k\ge-\frac{7}{3}$
∴ $-\frac{7}{3}\le k<0$

$k=0$
(ok)

$f(3)=k-3<0$
$f(4)=k>0$
$k<3$
$\int_4^3 f=[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx]_4^3$
$=-\frac{37}{3}+14-k\ge 0$
$k\le\frac{5}{3}$
$0<k\le\frac{5}{3}$

ㄱ. (ok) ∴ $-\frac{7}{3}\le k\le\frac{5}{3}$

ㄴ. $\int_4^3 f-\int_4^2 f=\int_4^3 f+\int_2^4 f=\int_2^3 f<0$

ㄷ. $\int_4^6 f=[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx]_4^6$
$=(72-72+6k)-(\frac{64}{3}-32+4k)$
$=2k+\frac{32}{3}$
$-\frac{14}{3}\le 2k\le\frac{10}{3}$
$6\le 2k+\frac{32}{3}\le 14$ ok

*15.* 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

이다.

(나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

$a_3$ 4k-3 4k-2 4k-1 4k

$a_4$ 4k+3 4k+4 4k+5 2k+6

$a_5$ 4k+11 2k+10 4k+13 k=2p-1 k=2p
k+11 2k+14

$a_3>a_5$ (X) 2k>12 (X) $k>\frac{11}{3}$ k>7
k>6

$50<6k+14<60$
$6<k<\frac{23}{3}$
k=7
$a_3=26$
$a_2$ 44 22
$a_1$ 42 84 40

$50<3k+17<60$
$11<k<\frac{43}{3}$
k=13
$a_3=52$
$a_2=96$
$a_1$ 94 188

$50<4k+20<60$
$\frac{15}{2}<k<10$
k=8
$a_3=32$
$a_2$ 56
$a_1$ 54 108

M=188
m=40
M+m=228

**단 답 형**

*16.* 방정식

$$\log_2(x-2)=1+\log_4(x+6)$$

을 만족시키는 실수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$ $\boxed{10}$

$\log_4(x-2)^2=\log_4(4x+24)$

$x^2-4x+4=4x+24$

$x^2-8x-20=0$

$x=-2, 10$ $(x>2)$

$\therefore x=10$

*17.* 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+2)f(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(3)=2,\ f'(3)=4$ $\boxed{22}$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$g'(3)=f(3)+5f'(3)=2+20=22$

*18.* 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{110}$

$\Sigma(a_k-b_k)=30$

$-\ \Sigma(a_k-2b_k)=-10$

$\Sigma b_k=40$

$\Sigma a_k=70$

*19.* 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=12t-12,\ v_2(t)=3t^2+2t-12$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

$\boxed{102}$

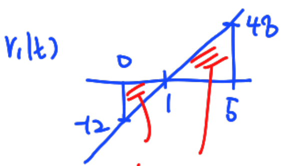
$x_1(t)=6t^2-12t$

$x_2(t)=t^3+t^2-12t$

$x_1(k)-x_2(k)=-k^3+5k^2=0$

$-k^2(k-5)=0,\ k=5$

$\int_0^5|v_1(t)|dt$




$6+96=102$

*20.* 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}\,dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{24}$

$2x^2f(x)=3\left(\int_0^x(x-t)f(x)dt+\int_0^x(x-t)f(t)dt\right)$

$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$

$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x(x-t)f(t)dt$

$\therefore \frac{1}{2}x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)f(t)dt$

$x^2f(x)=6\int_0^x(x-t)f(t)dt$

$2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$

$f=ax^n\sim \Rightarrow 2ax^{n+1}+nax^{n+1}=\frac{6a}{n+1}x^{n+1}\sim$

$2+n=\frac{6}{n+1},\ n^2+3n-4=0\quad n=1$

$f(x)=ax+b$

$2ax^2+2bx+ax^2=6\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)=3ax^2+6bx$

$3ax^2+2bx=3ax^2+6bx,\ b=0$

$f(x)=ax$

$f'(2)=a=4\qquad \therefore f(x)=4x$

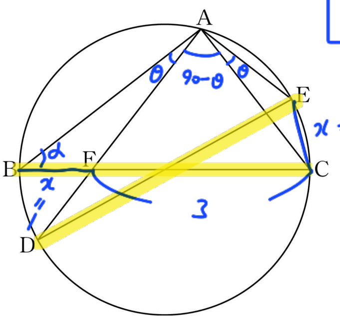
$f(6)=24$

*21.* 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC}=\overline{DE}=4,\ \overline{BF}=\overline{CE},\ \sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, $k^2$의 값을 구하시오. [4점]

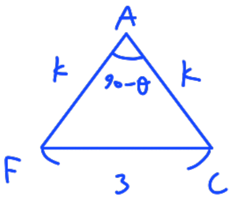
$\boxed{6}$




$\frac{x}{\sin\theta}=2R=4$, $x=4\sin\theta=1$ $\therefore \overline{CF}=3$

$\triangle ABF \Rightarrow \frac{\overline{AF}}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\theta}=4$, $\overline{AF}=4\sin\alpha$

$\triangle ABC \Rightarrow \overline{AC}=4\sin\alpha$ $\therefore \triangle ACF$: 이등변 △




$9=k^2+k^2-2k^2\cos(90-\theta)$

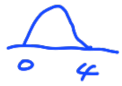
$9=2k^2-2k^2\sin\theta=\frac{3}{2}k^2$

$\therefore k^2=6$

*22.* 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

$=x(x-4)^2$

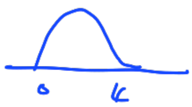


라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

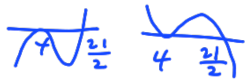
$\boxed{29}$

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$

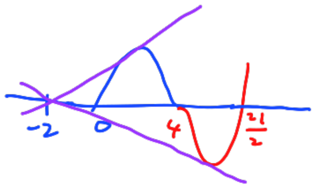
(나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

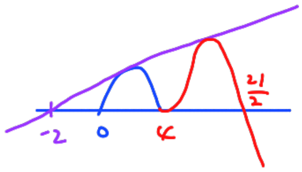


$f'(4)=0$
$f(4)=0$
$f\left(\frac{21}{2}\right)=0$



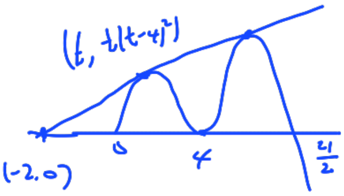
$f(x)=p(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)$





접선2개 (X)

접선 1개 (O)

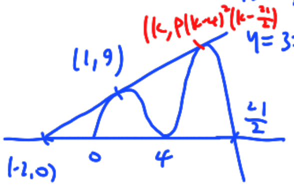



$f(x)=p(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)$

$f'(x)=p\left(2(x-4)\left(x-\frac{21}{2}\right)+(x-4)^2\right)$
$=p(x-4)(3x-25)$

$\frac{t(t-4)^2}{t+2}=3t^2-16t+16=(3t-4)(t-4)$

$t(t-4)=(3t-4)(t+2)$, $t^2-4t=3t^2+2t-8$, $t^2+3t-4=0$ $(t>-2)$
$t=-4, 1$ $\therefore t=1$




$\frac{p(k-4)^2\left(k-\frac{21}{2}\right)}{k+2}=p(k-4)(3k-25)$

$(k-4)\left(k-\frac{21}{2}\right)=(3k-25)(k+2)$

$k^2-\frac{29}{2}k+42=3k^2-19k-50$

$4k^2-9k-184=0$,

$k$ $-8$
$4k$ $+23$

$k=8 \rightarrow (8, -40p)$
$=(8, 30)$
$p=-\frac{3}{4}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$f(x)=-\frac{3}{4}(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)$

$g(10)=f(10)=-\frac{3}{4}\cdot 36\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{2}$

제 2 교시

# 수학 영역(확률과 통계)

**5지선다형**

23. 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(45, p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=15$일 때, $p$의 값은? [2점]

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

$E(X)=45p=15$

$p=\frac{1}{3}$

24. 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, $A^C$은 $A$의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$


$P(A)=\frac{1}{4}$

$P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

25. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7 이하인 자연수의 개수는? [3점]

① 45 ② 47 ③ 49 ④ 51 ⑤ 53

전체 $2\times3\times3\times3=54$

8이상 2222 → 1개

54−1=53개

26. 어느 지역에서 수확하는 양파의 무게는 평균이 $m$, 표준편차가 16인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 수확한 양파 64개를 임의추출하여 얻은 양파의 무게의 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $240.12 \le m \le a$이다. $\bar{x}+a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, $Z$가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 486 ② 489 ③ 492 ④ 495 ⑤ 498

$\bar{x}-1.96\cdot\frac{16}{8}$

$=\bar{x}-3.92=240.12$

$\therefore \bar{x}=244.04$

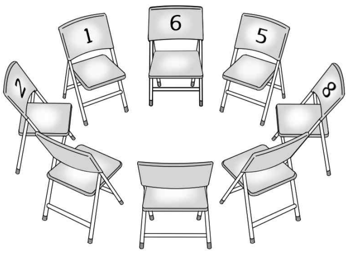
$a=244.04+3.92$

$=247.96$

$\bar{x}+a=492$

27. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 의자가 있다. 이 8개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 두 수가 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

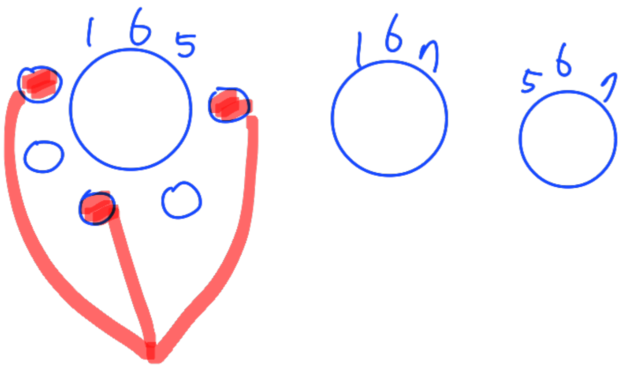
① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96




1 2 3 4 5 6 7 8

6 = 2×3

6 양옆 ⇒ 1, 5, 7




2, 4, 6 ⇒ 3!
나머지 3, 7 → 2!
1, 5 자리변경 → 2!
∴ 3!×2!×2! = 24

∴ 24×3 = 72

28. 정규분포를 따르는 두 확률변수 $X$, $Y$의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 $a$에 대하여

평행이동

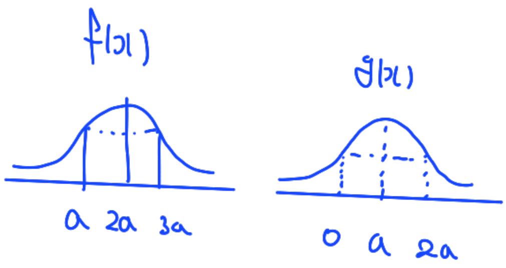
$$f(a)=f(3a)=g(2a),$$

$$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915$$

일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

| $z$ | $\mathrm{P}(0\le Z\le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185




$X\sim N(2a,\sigma^2)$ $Y\sim N(a,\sigma^2)$

$P(Y\le 2a)=P\left(Z\le \frac{a}{\sigma}\right)=0.6915$ $\therefore \frac{a}{\sigma}=0.5$

$P(0\le X\le 3a)$

$=P\left(-\frac{2a}{\sigma}\le Z\le \frac{a}{\sigma}\right)=P\left(-1\le Z\le \frac{1}{2}\right)=0.5328$

단답형

*29.* 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a$, $b$, $c$의 모든 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le 8$
(나) $(a-b)(b-c)=0$

$\boxed{64}$

a=b or b=c

i) a=b=c → 8개

ii) a=b, b≠c  ${}_8C_2 = 28$

iii) a≠b, b=c  ${}_8C_2 = 28$

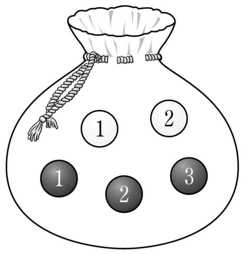
64

*30.* 주머니에 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공 중 임의로 1개의 공을 주머니에 다시 넣고,
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않는다.

이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{5}$



${}_5C_2=10$

꺼낸공 남은공

WW  W 1 2  B (×)

B B  1 3  W1 W2  B1 B2 ⇒ $\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$

2 3  W1 W2  B1 B2 ⇒ $\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$  $\frac{1}{10}$

W B  2 1  W1  B2 B3 ⇒ $\frac{1}{10}$

1 2  W2  B1 B3 ⇒ $\frac{1}{10}$  $\frac{2}{10}$

$\therefore \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{10}} = \dfrac{2}{3}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

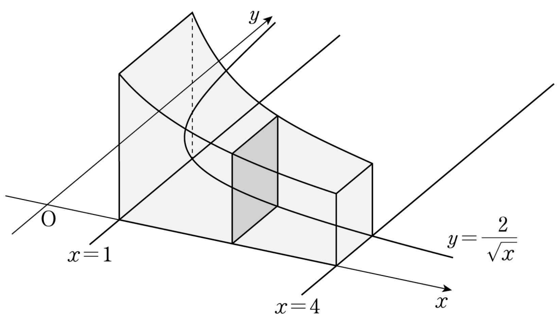
$\frac{k\pi}{3n} \to x$

$\frac{\pi}{3n} \to dx$

$6\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = -6\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -6\left(\frac{1}{2}-1\right) = 3$

25. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 와 $x$ 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]




① $6\ln2$　② $7\ln2$　③ $8\ln2$　④ $9\ln2$　⑤ $10\ln2$

$\int_1^4 \frac{4}{x}dx = 4\ln x\Big|_1^4 = 4\ln4$

$= 8\ln2$

26. 함수 $f(x)=e^{2x}+e^x-1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $g(5f(x))$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ $1$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

$f(0)=1$

$g(1)=0$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$

$f'(0)=3$,

$f(k)=5$

$e^{2k}+e^k-1=5$

$(e^k+3)(e^k-2)=0$

$k=\ln2$

$f(\ln2)=5$

$g(5)=\ln2$

$g'(5f(0))\cdot 5f'(0)$

$= g'(5)\cdot 5f'(0)$

$= \dfrac{1}{f'(g(5))}\times 15$

$= \dfrac{15}{f'(\ln2)} = \dfrac{15}{8+2} = \dfrac{3}{2}$

27. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 4$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}}$ 이 실수 $S$에 수렴할 때, $S$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$a_n = ar^{n-1}$

$-1 < \frac{r}{3} < 1$

$\sum \frac{a}{r}\left(\frac{r}{3}\right)^n = 4$, $\frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{r}{3}} = 4$

$-1 < \frac{1}{r^2} < 1$

$\frac{a}{3-r} = 4$,

| $r$ | $a$ | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | $\rightarrow r \neq 1$ |
| 2 | 4 | $\rightarrow a_n = 4\cdot 2^{n-1}$ |

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot 2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$

28. 함수

$$f(x) = \sin x \cos x \times e^{a\sin x + b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

(가) $ab = 0$ or $\begin{cases} a=0, b\neq 0 \\ a\neq 0, b=0 \end{cases}$

(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2} - 2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② $-2$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-1$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

i) $a=0, b\neq 0$

$f(x) = \sin x \cos x\, e^{b\cos x}$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

$-\int_1^0 te^{bt}dt = \int_0^1 te^{bt}dt$

$= \frac{t}{b}e^{bt}\Big|_0^1 - \frac{1}{b}\int_0^1 e^{bt}dt$

$= \frac{1}{b}e^b - \frac{1}{b^2}\left[e^{bt}\right]_0^1$

$= \frac{1}{b}e^b - \frac{e^b}{b^2} + \frac{1}{b^2}$

$= \frac{1}{b^2} + e^b\underbrace{\left(\frac{b-1}{b^2}\right)}_{=-2}$

$b-1 = -2b^2$

$2b^2+b-1=0$

$b = \frac{1}{2}, -1$

$(a,b) = (0, \frac{1}{2}), (0,-1)$

$\Rightarrow$

ii) $a\neq 0, b=0$

$f(x) = \sin x \cos x\, e^{a\sin x}$

$\sin x = t$

$\cos x\,dx = dt$

$\int_0^1 te^{at}dt$

$= \frac{1}{a^2} + e^a\underbrace{\left(\frac{a-1}{a^2}\right)}_{=-2}$

$a = \frac{1}{2}, -1$

$(a,b) = (\frac{1}{2},0), (-1,0)$

$\therefore$ $a-b$의 최솟값

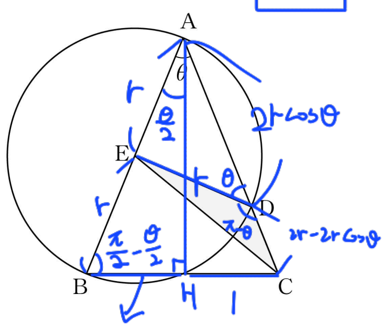
$= -1-0 = -1$

$D = a^2 - 4b$

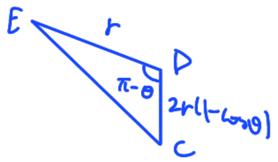
**단답형**

29. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 선분 AB의 중점을 E라 하자. $\angle BAC = \theta$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

$\boxed{30}$




$2r \sin\frac{\theta}{2} = 1, \quad r = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$




$S = \frac{1}{2} r \cdot 2r(1-\cos\theta) \cdot \sin(\pi - \theta)$

$= r^2(1-\cos\theta)\sin\theta = \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$\therefore 60 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = 60 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta \cdot 4\sin^2\frac{\theta}{2}} = 60 \times \frac{1}{2} = 30$

30. 두 정수 $a$, $b$에 대하여 함수

$$f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x} = \frac{x^2 + ax + b}{e^x}$$

$x \to \infty$ $f \to 0$ $\quad$ $x \to -\infty$ $f \to \infty$

이 다음 조건을 만족시킨다. $\quad$ 근: $\gamma, \delta$

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. $\quad \gamma + \delta = -a$
(나) 함수 $|f(x)|$가 $x = k$에서 극대 또는 극소인 모든 $k$의 값의 합은 3이다.

$f(10) = pe^{-10}$일 때, $p$의 값을 구하시오. [4점]

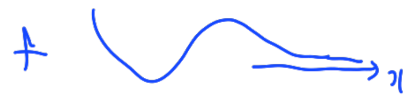
$\boxed{91}$

$f'(x) = e^{-x}(2x + a - x^2 - ax - b)$

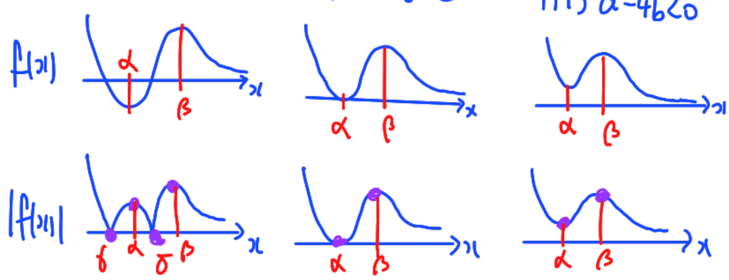
$= -e^{-x}(x^2 + (a-2)x + b - a)$ $\to$ 근: $\alpha, \beta$ $\quad \alpha + \beta = 2 - a$

극값 $\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(b-a) = a^2 + 4 - 4b > 0$ $\quad a^2 - 4b > -4$

$f'$ $\ominus$ $\alpha$ $\oplus$ $\beta$ $\ominus$




i) $a^2 - 4b > 0$ $\quad$ ii) $a^2 - 4b = 0$ $\quad$ iii) $a^2 - 4b < 0$




i) $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 2 - a - a = 3$, $a = -\frac{1}{2}$ (X)

ii) $\alpha + \beta = 2 - a = 3$, $a = -1$, $a^2 - 4b = 0$, $b = \frac{1}{4}$ (X)

iii) $\alpha + \beta = 2 - a = 3$, $a = -1$, $-4 < a^2 - 4b < 0$, $\frac{1}{4} < b < \frac{5}{4}$, $b = 1$

$\therefore f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

$f(10) = 91e^{-10}$ $\quad p = 91$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 좌표공간의 두 점 A$(a, 0, 1)$, B$(2, -3, 0)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 $yz$평면 위에 있을 때, $a$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\frac{6-2a}{3-2}=0$, $a=3$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, $a$는 양수이다.) [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 6

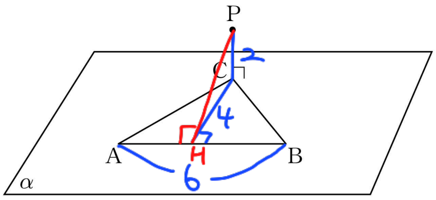
$\frac{3\sqrt{3}}{a}=3$

$a=\sqrt{3}$

$2a=2\sqrt{3}$

25. 평면 $\alpha$ 위에 $\overline{AB}=6$이고 넓이가 12인 삼각형 ABC가 있다. 평면 $\alpha$ 위에 있지 않은 점 P에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발이 점 C와 일치한다. $\overline{PC}=2$일 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는? [3점]

① $3\sqrt{2}$  ② $2\sqrt{5}$  ③ $\sqrt{22}$  ④ $2\sqrt{6}$  ⑤ $\sqrt{26}$

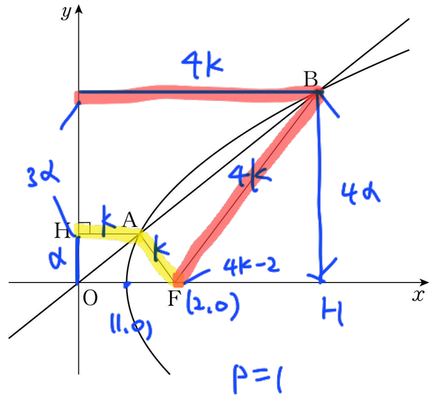



$\overline{PH}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

26. 그림과 같이 초점이 F(2, 0)이고 $x$축을 축으로 하는 포물선이 원점 O를 지나는 직선과 제1사분면 위의 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

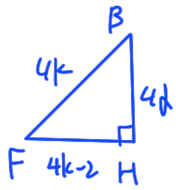
$$\overline{AF}=\overline{AH},\ \overline{AF}:\overline{BF}=1:4$$

일 때, 선분 AF의 길이는? [3점]




① $\frac{13}{12}$  ② $\frac{7}{6}$  ③ $\frac{5}{4}$  ④ $\frac{4}{3}$  ⑤ $\frac{17}{12}$

$y^2=4(x-1)$  $(k, \alpha)$




$\alpha^2=4(k-1)$

$16k^2=16k^2+4-16k+16\alpha^2$

$16\alpha^2=16k-4$

$4\alpha^2=4k-1$

$16(k-1)=4k-1$

$12k=15,\ k=\frac{5}{4}$

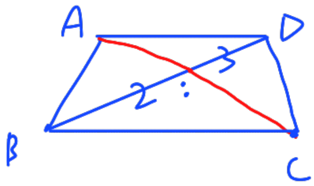
*27.* 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

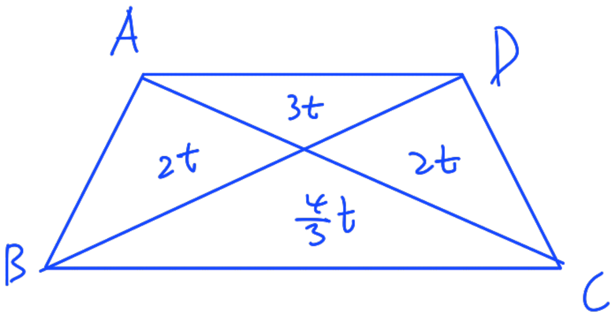
| |
|---|
| (가) 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$는 서로 평행하다. |
| (나) $t\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$를 만족시키는 실수 $t$가 존재한다. |

삼각형 ABD의 넓이가 12일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$\frac{t}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{5}$ BD 2:3 내분

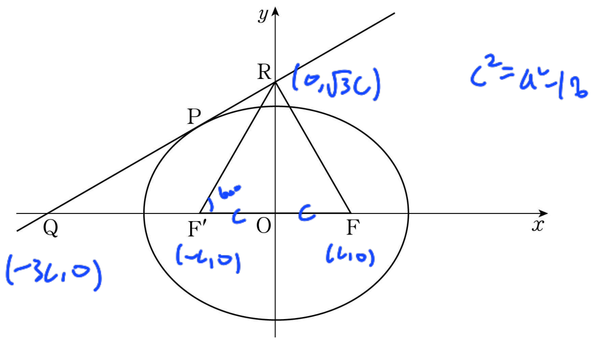



$5t=12$, $t=\frac{12}{5}$

$\square ABCD = \frac{25}{3}t = \frac{25}{3}\times\frac{12}{5} = 20$

*28.* 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{18}=1$이 있다. 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. 삼각형 RF′F가 정삼각형이고 점 F′은 선분 QF의 중점일 때, $c^2$의 값은? (단, $a$는 양수이다.) [4점]




$c^2=a^2-18$

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}c$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{3}+18}$

$3c^2=\frac{1}{3}a^2+18 = \frac{1}{3}(c^2+18)+18$

$=\frac{1}{3}c^2+24$

$\frac{8}{3}c^2=24$, $\therefore c^2=9$

## 단답형

*29.* 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 제1사분면 위의 점 P가

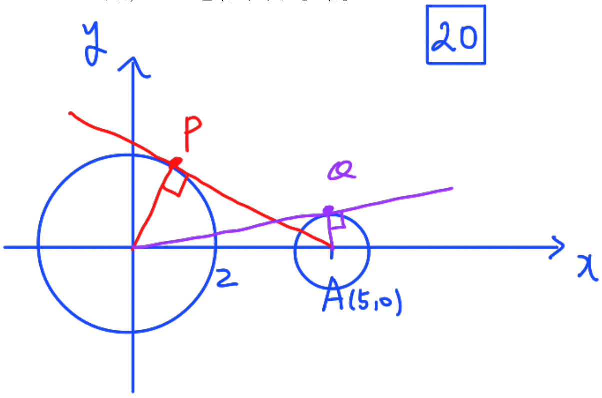
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

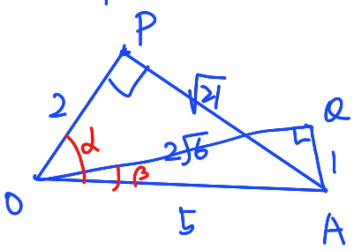
을 만족시키고, 제1사분면 위의 점 Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{20}$




$\overline{AP}=\sqrt{21}$

$\overline{OQ}=2\sqrt{6}$

$\cos\alpha=\frac{2}{5},\ \cos\beta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$

$=5\cdot2\sqrt{6}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}-5\cdot2\cdot\frac{2}{5}$

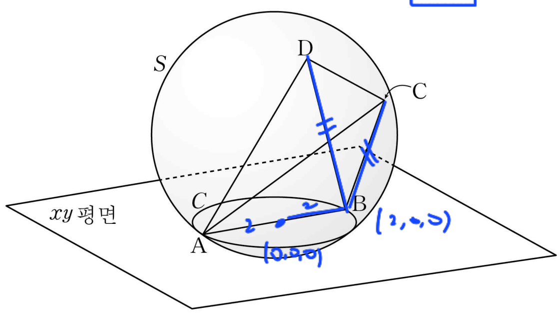
$=24-4=20$

*30.* 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-\sqrt{5})^2=9$가 $xy$평면과 만나서 생기는 원을 $C$라 하자. 구 $S$ 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

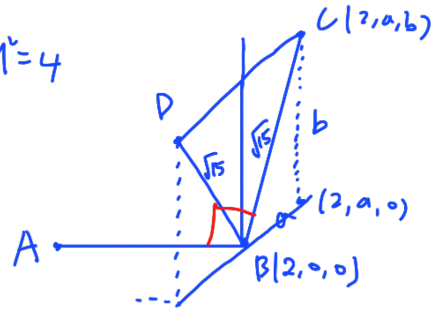
> (가) 선분 AB는 원 $C$의 지름이다.
> (나) 직선 AB는 평면 BCD에 수직이다.
> (다) $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이를 $k$라 할 때, $k^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{15}$




$z=0 \rightarrow x^2+y^2=4$




$a^2+b^2=15$

C는 구S 위 $\Rightarrow 4+a^2+(b-\sqrt{5})^2=9$

$a^2+b^2-2\sqrt{5}b=0$

$\therefore b=\frac{3}{2}\sqrt{5},\ a=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\overline{CD}=2a=\sqrt{15}$ $\therefore \triangle BCD$ : 정$\triangle$, $\angle DBC=60°$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}$

$\therefore k=2\sqrt{15}\cos60°=\sqrt{15}$

$k^2=15$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.