수학대왕 수능 출제 예상 문제

001

함수 $f(x)=a\cos x+b\sin x-2\sqrt{3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=c$

세 상수 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)^2$의 값을 구하시오.

002

양의 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선

$y=\frac{3}{e^{2x}}+5t$에 접하는 기울기를 $f(t)$라 하자.

$f(t_1)=-6e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 t_1에 대하여

$12\times|f'(t_1)|$의 값을 구하시오.

003

일차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^e\left\{\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right\}dx=4e+3$

(나) $\int_0^1\{f(x)+xf'(x)\}dx=7$

$\int_0^1 e^x f(x)dx=pe+q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오

. (단, p, q는 유리수이다.)

001

$f(x) = a\cos x + b\sin x - 2\sqrt{3}$에서

$$f'(x) = -a\sin x + b\cos x$$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -a\sin\frac{\pi}{3} + b\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -a \times \frac{\sqrt{3}}{2} + b \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(a\sqrt{3} - b) = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$a\sqrt{3} - b = -4 \ \cdots \ ㉠$$

조건 (나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = c$에서 $x \longrightarrow 0$일 때

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$

이어야 한다.

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(0) &= a\cos 0 + b\sin 0 - 2\sqrt{3} \\ &= a - 2\sqrt{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로

$$a = 2\sqrt{3}$$

㉠에 $a = 2\sqrt{3}$을 대입하면

$$b = 10$$

또 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= f'(0) \\ &= c \end{aligned}$$

$f'(0) = -2\sqrt{3}\sin 0 + 10\cos 0 = 0 + 10 = 10$이

므로

$$c = 10$$

따라서

$$(a + b - c)^2 = (2\sqrt{3} + 10 - 10)^2 = 12$$

002

원점을 지나고 곡선 $y = \frac{3}{e^{2x}} + 5t$, 즉 $y = 3e^{-2x} + 5t$에 접하

는 직선의 접점의 좌표를 $(s,\ 3e^{-2s} + 5t)$라 하자.

$y' = -6e^{-2x}$이므로 접선의 방정식은

$$y - (3e^{-2s} + 5t) = -6e^{-2s}(x - s)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$0 - (3e^{-2s} + 5t) = -6e^{-2s}(0 - s)$$

$$t = -\frac{3(2s+1)e^{-2s}}{5} \ \cdots \ ㉠$$

이때 접선의 기울기는 $-6e^{-2s}$이므로

$$f(t) = -6e^{-2s} \ \cdots \ ㉡$$

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{6}{5}e^{-2s} + \frac{6(2s+1)}{5}e^{-2s} = \frac{12}{5}se^{-2s} \ \cdots \ ㉢$$

㉡의 양변을 s에 대하여 미분하면

$$f'(t) \times \frac{dt}{ds} = 12e^{-2s} \ \cdots \ ㉣$$

㉢, ㉣에서

$$f'(t) \times \frac{12}{5}se^{-2s} = 12e^{-2s}$$

$s \neq 0$이므로

$$f'(t) = \frac{5}{s} \ \cdots \ ㉤$$

한편, $t = t_1$일 때, $s = s_1$이라 하면 ㉡에서

$f(t_1) = -6e^{-2s_1} = -6e\sqrt{e} = -6e^{\frac{3}{2}}$이면 $s_1 = -\frac{3}{4}$이므로

㉤에서

$$f'(t_1) = \frac{5}{s_1} = \frac{5}{-\frac{3}{4}} = -\frac{20}{3}$$

따라서

$$12 \times |f'(t_1)| = 12 \times \frac{20}{3} = 80$$

003

$\{f(x)\ln x\}' = f'(x)\ln x + \dfrac{f(x)}{x}$이므로 조건 (가)에서

$$\int_1^e \left\{\frac{f(x)}{x} + f'(x)\ln x\right\} dx$$
$$= \Big[f(x)\ln x\Big]_1^e$$
$$= f(e) = 4e + 3 \ \cdots \ ㉠$$

또한

$$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_0^1 \{f(x) + xf'(x)\}dx$$
$$= \Big[xf(x)\Big]_0^1$$
$$= f(1) = 7 \ \cdots \ ㉡$$

$f(x)$는 일차함수이므로

$$f(x) = ax + b \ (a,\ b\text{는 상수},\ a \neq 0)$$

으로 놓으면 ㉠, ㉡에 의하여

$$f(e) = ae + b = 4e + 3,$$
$$f(1) = a + b = 7$$

에서

$$a = 4,\ b = 3$$

즉,

$$f(x) = 4x + 3$$

그러므로 $\displaystyle\int_0^1 e^x(4x+3)dx$에서

$$u(x) = 4x + 3,\ v'(x) = e^x$$

으로 놓으면 $u'(x) = 4,\ v(x) = e^x$이므로

$$\int_0^1 e^x f(x)dx = \int_0^1 e^x(4x+3)dx$$
$$= \Big[e^x(4x+3)\Big]_0^1 - \int_0^1 4e^x dx$$
$$= 7e - 3 - \Big[4e^x\Big]_0^1$$
$$= 7e - 3 - 4e + 4$$
$$= 3e + 1$$

따라서 $p = 3,\ q = 1$이므로

$$p + q = 4$$