10일의 기적

(기하 해설지)

Part A. 올해기출 최종점검 2·3점 문제 (28문항)
Part B. 올해기출 최종점검 3·4점 문제 (16문항)
Part C. 올해기출 최종점검 고난도 문제 (4문항)

인간은 과정 앞에 무적이고, 결과 앞에 무력하다.
내가 매일 최선을 다하는 것만이
내가 이루어 내야 할 유일한 일이다. -김지석

김지석수학연구소

기하

1. 이차곡선

PART A

❄ 2·3점 ❄

포물선

[2023년 3월 (기하) 24번]

1. 포물선 $x^2=8y$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

[정답] ①

포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$이고 준선의 방정식은 $y=-2$이다.
따라서 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는 4이다.

[2023년 6월 (기하) 23번]

2. 포물선 $y^2 = -12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

[정답] ①

포물선 $y^2 = -12(x-1)$의 꼭짓점은 $(1,\,0)$이므로 준선의 방정식은

$$x = 1 - \left(\frac{-12}{3}\right) = 4$$

[2023년 9월 (기하) 27번]

3. 양수 p에 대하여 좌표평면 위에 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$가 있다. 이 포물선이 세 직선 $x=p$, $x=2p$, $x=3p$와 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자.

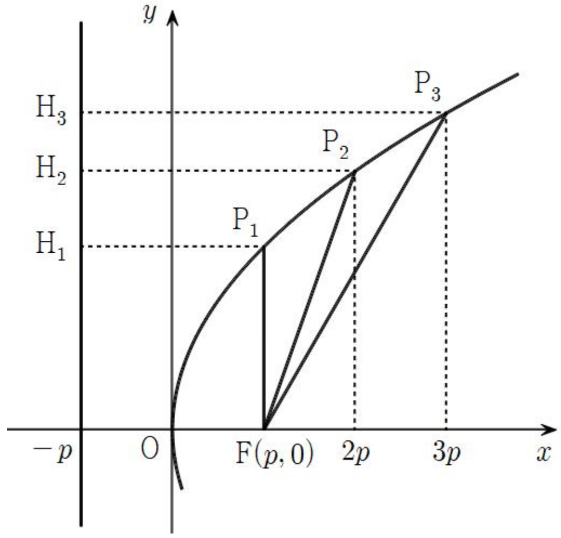
$\overline{\mathrm{FP}_1} + \overline{\mathrm{FP}_2} + \overline{\mathrm{FP}_3} = 27$일 때, p의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[정답] ③

포물선의 준선의 방정식은 $x = -p$

세 점 P_1, P_2, P_3에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 하자.



포물선의 정의에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FP}_1} + \overline{\mathrm{FP}_2} + \overline{\mathrm{FP}_3} &= \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{H}_2} + \overline{\mathrm{P}_3\mathrm{H}_3} \\ &= 2p + 3p + 4p \\ &= 9p\end{aligned}$$

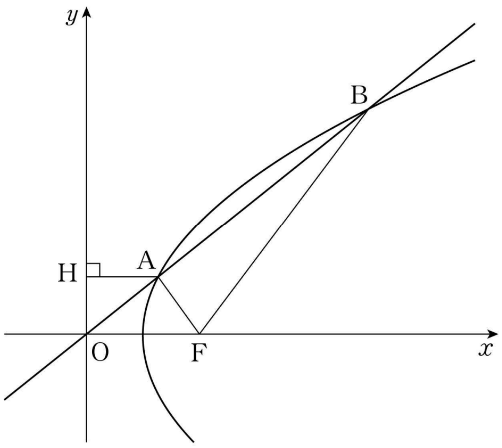
따라서 $9p = 27$에서 $p = 3$

[2023년 10월 (기하) 26번]

4. 그림과 같이 초점이 F$(2, 0)$이고 x축을 축으로 하는 포물선이 원점 O를 지나는 직선과 제1사분면 위의 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AF}=\overline{AH},\ \overline{AF}:\overline{BF}=1:4$$

일 때, 선분 AF의 길이는? [3점]



① $\frac{13}{12}$　② $\frac{7}{6}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{17}{12}$

[정답] ③

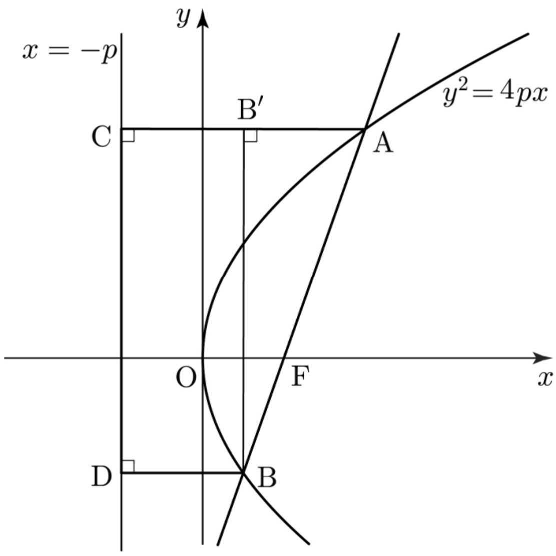
$\overline{AF}=\overline{AH}$이고 포물선의 축이 x축이므로 이 포물선의 준선은 y축이다.
포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 1이므로 포물선의 방정식은
$y^2=4(x-1)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면
$\overline{AH}:\overline{BH'}=\overline{OH}:\overline{OH'}=\overline{AF}:\overline{BF}=1:4$
점 A의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$으로 놓으면 점 B의 좌표는 $(4a, 4b)$이다.
두 점 A, B는 포물선 $y^2=4(x-1)$ 위의 점이므로
$b^2=4(a-1)$, $16b^2=4(4a-1)$
$16\times4(a-1)=4(4a-1)$, $12a=15$, $a=\frac{5}{4}$
따라서 $\overline{AF}=a=\frac{5}{4}$

[2023년 7월 (기하) 26번]

5. 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점] (단, 점 A는 제1사분면에 있다.)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

[정답] ①



$\overline{AC}=2k$, $\overline{BD}=k$ $(k>0)$이라 하자.
포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AC}+\overline{BD}=2k+k=3k$
점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 B$'$이라 하자.
$\overline{BB'}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$
사각형 ACDB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(2k+k)\times2\sqrt{2}k=3\sqrt{2}k^2=12\sqrt{2}$
$k^2=4$, $k=2$
따라서 선분 AB의 길이는 $3k=6$

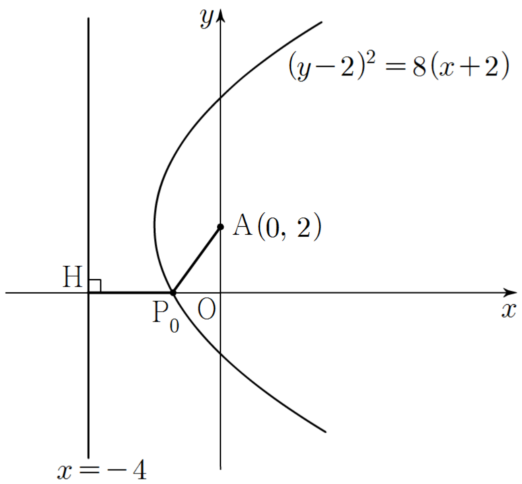
[2023년 6월 (기하) 27번]

6. 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자.

$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OP}_0}+\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? [3점] (단, O는 원점이다.)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[정답] ③



점 A가 포물선 $(y-2)^2=-8(x+2)$의 초점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}$는 점 P에서 이 포물선의 준선까지의 거리와 같다.
점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PH}}$이므로 그 최솟값은 점 P가 x축 위에 있을 때 선분 OH와 같다.
준선이 $x=-4$이므로 점 H의 좌표는 $(-4,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 최솟값은 4다.
점 Q는 $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=4$를 만족하므로 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이다.
이 타원의 장축은 직선 OA인 y축이고 타원의 중심이 점 $(0,\ 1)$이므로

$$M=1+2=3,\ m=1-2=-1$$
$$\therefore\ M^2+m^2=9+1=10$$

[2023년 3월 (기하) 26번]

7. 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 포물선과 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답] ②

$y^2=4x+4y+4$에서
$(y-2)^2=4(x+2)$
포물선 $y^2=4x+4y+4$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
두 점 A, B에서 초점까지의 거리는 모두 원의 반지름의 길이인 2이므로 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B와 준선 사이의 거리는 모두 2이다.
$|a-(-3)|=2$, $|c-(-3)|=2$이고
$a\geq -2$, $c\geq -2$이므로
$a=-1$, $c=-1$
두 점 A, B는 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 축인 직선 $y=2$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{b+d}{2}=2$
$b+d=4$
따라서
$$a+b+c+d=(-1)+(-1)+4$$
$$=2$$

타원

[2023년 3월 (기하) 23번]

8. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ 8

[정답] ⑤

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는
$2\times\sqrt{16}=2\times4=8$

[2023년 7월 (기하) 24번]

9. 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 (a, b)에서의 접선이 점 $(8, 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

[정답] ③

타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는

점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{32}+\frac{by}{8}=1$

접선이 점 $(8, 0)$을 지나므로 $\frac{8a}{32}=1$, $a=4$

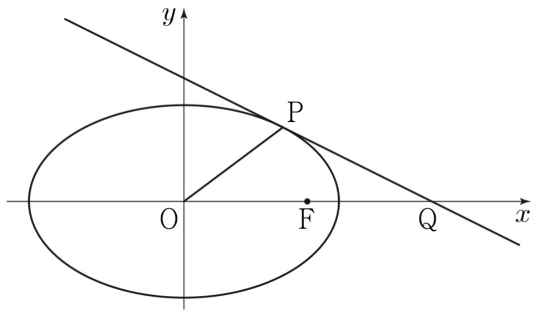
점 $(4, b)$가 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{16}{32}+\frac{b^2}{8}=1$, $b^2=4$ $b>0$이므로 $b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

[2023년 4월 (기하) 25번]

10. 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? [3점] (단, O는 원점이다.)



① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

[정답] ⑤

점 F의 x좌표를 c라 하면
$c=\sqrt{40-15}=5$이므로 $\mathrm{F}(5,\ 0)$
$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=10$에서 $\mathrm{Q}(10,\ 0)$
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면
타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$\frac{x_1}{40}x+\frac{y_1}{15}y=1$
이 직선의 x절편이 10이므로 $x_1=4$
점 $\mathrm{P}(4,\ y_1)$이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ 위의 점이므로
$\frac{4^2}{40}+\frac{y_1^2}{15}=1$에서 $y_1=3$
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PH}}=3$
따라서
삼각형 POQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times10\times3$
$=15$

쌍곡선

[2023년 4월 (기하) 24번]

11. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? [3점] (단, a는 양수이다.)

① $4\sqrt{2}$　② 6　③ $2\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{11}$　⑤ $4\sqrt{3}$

[정답] ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의
점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{a}x$이므로
$\frac{2\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$에서 $a=2$
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의
두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면
$c=\sqrt{4+8}$
$=2\sqrt{3}$
따라서
구하는 두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$

[2023년 10월 (기하) 24번]

12. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점] (단, a는 양수이다.)

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ 2

④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 6

[정답] ④

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$의 점근선의 기울기는

$\pm\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{a^2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{a}$

이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$이므로

$\dfrac{3\sqrt{3}}{a}=3$에서 $a=\sqrt{3}$

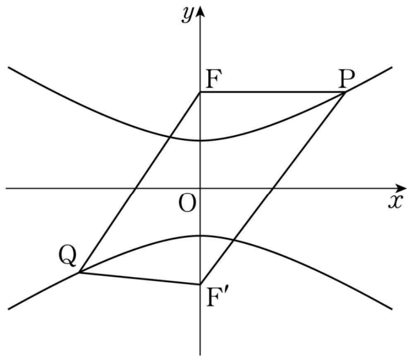
따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=2\sqrt{3}$

[2023년 3월 (기하) 27번]

13. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$이 있다. 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 쌍곡선 위의 제3사분면에 있는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'}=5,\ \overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$$

를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$의 값은? [3점]



① 10 ② $\dfrac{35}{3}$ ③ $\dfrac{40}{3}$

④ 15 ⑤ $\dfrac{50}{3}$

[정답] ④

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$의 주축의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=4$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF}'}=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF}'})=8$

$(\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})=8$

$5+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})=8$

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=3$

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}-\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{QF}}=3$

$\overline{\mathrm{QF}}=9$, $\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=15$

[2023년 9월 (기하) 24번]

14. 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7, 6)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답] ①

쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7, 6)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1, \qquad x-y=1$$

따라서 접선의 방정식의 x절편은 1이다.

[2023년 3월 (기하) 25번]

15. 한 초점이 $\mathrm{F}(3, 0)$이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것을 l이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는? [3점] (단, a, b는 양수이다.)

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

[정답] ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2a$이므로
$2a=4$에서 $a=2$
점 $\mathrm{F}(3, 0)$이 쌍곡선의 한 초점이므로
$a^2+b^2=3^2$에서
$b^2=5$, $b=\sqrt{5}$
쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$\sqrt{5}x-2y=0$$

따라서 점 $\mathrm{F}(3, 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

[2023년 4월 (기하) 26번]

16. 두 초점이 $\mathrm{F}(3\sqrt{3},\,0)$, $\mathrm{F}'(-3\sqrt{3},\,0)$인 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF'이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF가 정삼각형일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[정답] ①

점 Q가 y축 위의 점이므로
삼각형 $\mathrm{QF'F}$는 이등변삼각형이다.
삼각형 PQF가 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{F'PF} = \angle\mathrm{PFQ} = \dfrac{\pi}{3}$

$\angle\mathrm{FF'Q} = \angle\mathrm{QFF'}$
$= \theta$라 하면

삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 세 내각의 합은 π이므로

$\theta + \left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{\pi}{3} = \pi$에서 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

그러므로 삼각형 $\mathrm{PF'F}$는

$\angle\mathrm{FF'P} = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{PFF'} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{F'F}} = 6\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}} = 6$, $\overline{\mathrm{PF'}} = 12$

따라서
쌍곡선의 주축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 12 - 6$
$= 6$

벡터 연산

[2023년 7월 (기하) 23번]

17. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

[정답] ②

$$\begin{aligned} 2\vec{a}+\vec{b} &= (4,\ 6)+(4,\ -2) \\ &= (4+4,\ 6+(-2)) \\ &= (8,\ 4) \end{aligned}$$

따라서 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 12

기하

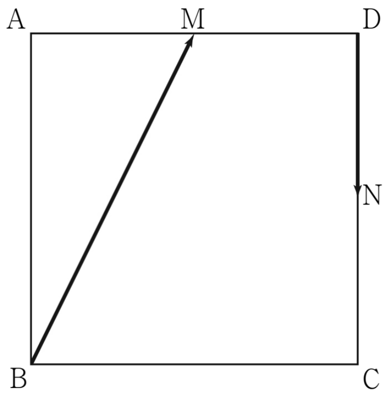
2. 평면벡터

PART A

❋ 2·3점 ❋

[2023년 4월 (기하) 23번]

18. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 선분 AD, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|$의 값은? [2점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[정답] ③

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면
$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{ME}$
따라서
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|&=|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}|\\&=|\overrightarrow{BE}|\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

[2023년 6월 (기하) 24번]

19. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여
$$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$$
일 때, $p-q$의 값은? [3점] (단, p와 q는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답] ④

$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$에서
$$2\overrightarrow{AB}+p(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\mathrm{q}\overrightarrow{AC}$$
$$(2-p)\overrightarrow{AB}+(-p-q)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$이므로
$$2-p=0,\ -p-q=0$$
따라서 $p=2,\ q=-2$이므로
$$p-q=2-(-2)=4$$

[2023년 9월 (기하) 25번]

20. 좌표평면 위의 점 $A(4, 3)$에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? [3점] (단, O는 원점이다.)

① 2π ② 4π ③ 6π
④ 8π ⑤ 10π

[정답] ⑤

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = 5$$

따라서 점 P는 점 O를 중심으로 하고 반지름이 5인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 10π이다.

위치벡터

[2023년 10월 (기하) 27번]

21. 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$는 서로 평행하다.
(나) $t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

삼각형 ABD의 넓이가 12일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[정답] ⑤

선분 BD를 $2:3$으로 내분하는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$

조건 (나)에서

$t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}=5\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

를 만족시키는 실수 t가 존재하므로 점 E는 선분 AC 위의 점이다.

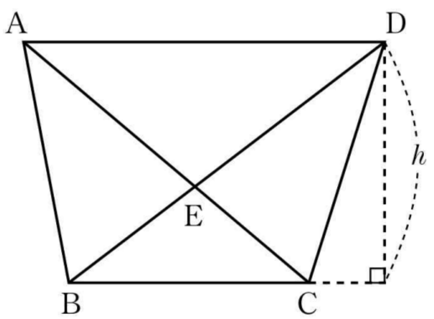
조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 서로 평행하고

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{ED}}=2:3$

이므로 두 삼각형 EDA, EBC는 서로 닮음이고 닮음비는 $3:2$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|:|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=3:2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$

…… ㉠



사다리꼴 ABCD의 높이를 h로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=12$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=24$

…… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|)\times h$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|+\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\right)\times h$

$=\dfrac{5}{6}\times|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=\dfrac{5}{6}\times 24$

$=20$

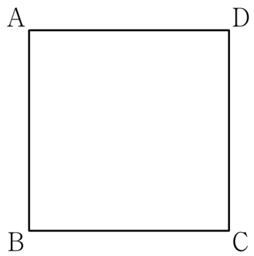
내적

[2023년 6월 (기하) 25번]

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$$

일 때, 실수 k의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[정답] ②

$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$에서

$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+3k(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD})+k(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$

$+3k^2(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})=0$

$|\overrightarrow{AB}|^2-3k|\overrightarrow{AB}|^2+k|\overrightarrow{BC}|^2=0$

$1-3k+k=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

직선의 방정식

[2023년 7월 (기하) 25번]

23. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m:\frac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[정답] ⑤

직선 l이 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행하므로

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하자.

직선 m의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(7,\ 1)$

$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$|\vec{v}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,\ -1)\cdot(7,\ 1)=3\times7+(-1)\times1=20$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|20|}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

기하

3. 공간도형

PART A

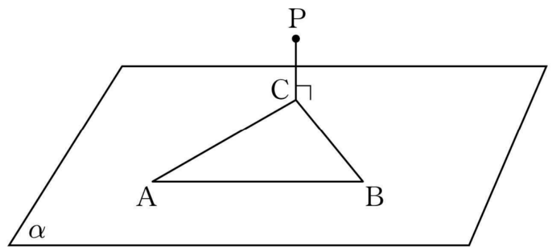
❄ 2·3점 ❄

삼수선

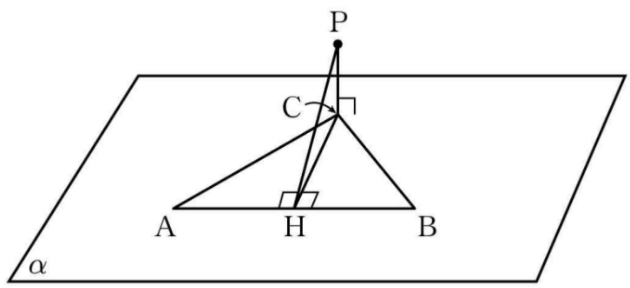
[2023년 10월 (기하) 25번]

24. 평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고 넓이가 12인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 C와 일치한다. $\overline{\mathrm{PC}}=2$일 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는? [3점]

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$



[정답] ②



점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times\overline{\mathrm{CH}}=12$에서 $\overline{\mathrm{CH}}=4$

$\overline{\mathrm{PC}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

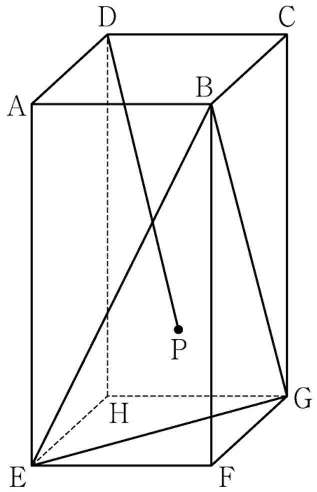
삼각형 PHC는 선분 PH를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PC}}^2+\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.

[2023년 9월 (기하) 26번]

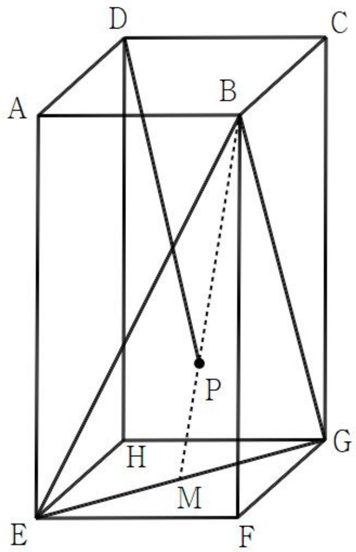
25. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=6$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 삼각형 BEG의 무게중심을 P라 할 때, 선분 DP의 길이는? [3점]



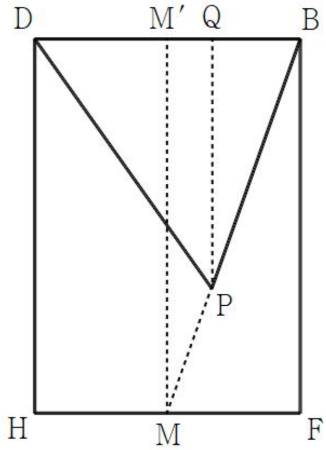
① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

[정답] ②

다음 그림과 같이 선분 EG의 중점을 점 M이라 하면 세 점 B, P, M은 한 직선 위에 있고, $\overline{BM}\perp\overline{EG}$가 성립한다.
그러므로 평면 BEHF 위에 점 P, M이 존재한다.



선분 BD의 중점을 점 M′, 점 P에서 평면 ABCD에 수선을 내려 그 수선의 발을 점 Q라 하고, 삼각형 BDP를 그려 보면 다음과 같다.



$\overline{BD}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{BM'}=\overline{DM'}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\overline{BP}:\overline{PM}=2:1$이므로 $\overline{BQ}:\overline{QD}=1:2$

$\overline{DQ}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, $\overline{QP}=\frac{2}{3}\times6=4$이므로

삼각형 DPQ에서

$$\overline{DP}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$$

[다른 풀이]

꼭짓점 E를 원점, 세 직선 FE, FG, FB를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 좌표를 잡으면

$$E(3,0,0),\ G(0,3,0),\ B(0,0,6),$$

$D(3,3,6)$

삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$P(1,1,2)$

$$\therefore\ \overline{DP}=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$$

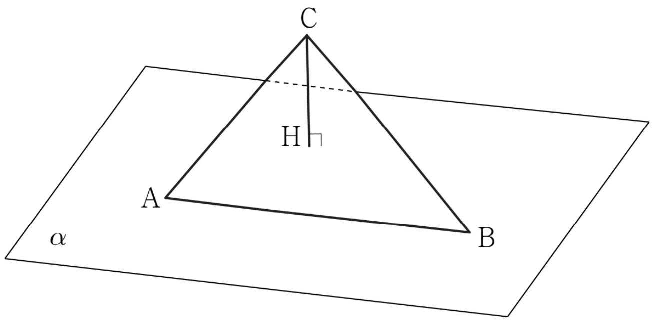
[2023년 7월 (기하) 27번]

26. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

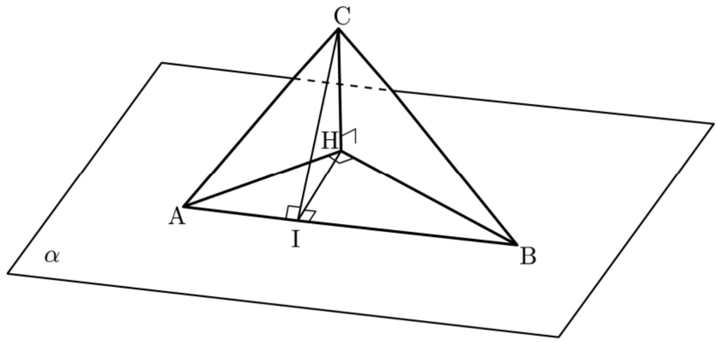
> (가) $\angle \mathrm{AHB}=\frac{\pi}{2}$
>
> (나) $\sin(\angle \mathrm{CAH})=\sin(\angle \mathrm{ABH})=\frac{\sqrt{3}}{3}$

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점] (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.)

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$　② $\frac{\sqrt{7}}{7}$　③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$
④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$



[정답] ④



$\overline{\mathrm{CH}}=a$ $(a>0)$이라 하자.

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}a$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{(\sqrt{6}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=2a$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{CI}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

직각삼각형 HBI에서 $\overline{\mathrm{HI}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{\mathrm{CI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}a$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{CI}}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

공간좌표

[2023년 9월 (기하) 23번]

27. 좌표공간의 점 $A(8, 6, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답] ④

xy평면에 대칭이동하면 z좌표의 부호가 변하므로
점 B의 좌표는 $B(8, 6, -2)$
따라서 구하는 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+2)^2} = 4$$

[2023년 10월 (기하) 23번]

28. 좌표공간의 두 점 $A(a, 0, 1)$, $B(2, -3, 0)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 yz평면 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[정답] ①

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times2-2\times a}{3-2}, \frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times1}{3-2}\right)$$

즉, $(6-2a, -9, -2)$
yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $6-2a=0$
따라서 $a=3$