# *“귀찮은 걸 어쩌라고”*

모든 수학 강사가 연계교재를 풀어보랜다.

“근데 어쩌라고

할 게 얼마나 많은데, 썅
귀찮아 죽겠어
너희가 잘 정리해서 떠먹여 주던가!”

때론 연계교재를 풀어보라는 강사들이 무책임하게 느껴진다

“근데 수능에서 고난이도 연계 문제 나오면 어떡하지?
아, 불안해지네?
한 달 도 안 남았는데 EBS 푸는 게 맞는 선택인가?”

# *하지만!*

걱정마라

## ‘단 3시간’안에

이 책으로 수능특강 수2 LEVEL3를 모두 정리할 수 있다.

# *근데 LEVEL 3 너무 어려운데?*

걱정마라
LEVEL3 문제들이 발상을 쉬운 문제들로 익힐 것이다.
정리에서 끝나지 않는다

발상이 응용된다면 어떻게 나올지를 역대 ‘기출 문제’로 보여줄 것이다.

이것 이상의 연계 교재 공부는
필요없다.

거기에다 무료다!

연계 교재 공부할 시간이 없거나
할 마음이 없다면
이거라도 잘 보고 수능을 보도록 하자!

1. 잘 아는 발상이면 과감히 넘겨라
-안 그래도 시간이 없기 때문에 이미 아는 걸 붙잡고 있을 필요는 없다.

2. 문제의 발상이 잘 이해 되면 딸려 있는 기출 문제는 넘겨라
-딸려 있는 기출 문제는 발상이 잘 이해 되지 않을 때 풀어라. 시간 없다.

3. 반복이 핵심이다
-잘 모르겠으면 일다 넘겨라. 어떻게든 이해하려고
몇 시간씩 머리 싸매는 것보다 일단 넘겼다가
자주 다시 보도록 하자.

16p-LEVEL 1번 문제

[23009-0024]

다음 조건을 만족시키는 두 실수 $a$, $b$의 모든 순서쌍 $(a, b)$의 개수는?

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-a} = b$

(나) $\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^3+ax^2+bx}{x^k} \right| = \frac{1}{2}$인 자연수 $k$가 존재한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

발상1 : 분수식 극한식 → 대입하여 부정형인지 확인

분수식 극한식이 나왔을 때는 쫄지말고 이것부터 하면 된다.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}$ 또는 $\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+3}$와 같은 분수식 형태의 극한식이 나오면 '대입하여 부정형인지 확인'하는 것을 잊지마라.

부정형인지 아닌지 판단 기준은 분모가 0이면 부정형인 것이다.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}$에 $x=a$를 대입해보면 $\frac{f(a)}{0}$이 되므로 부정형이다.

수특 문제의 (가) 조건을 보자.

$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-a} = b$에 $x=1$을 대입해보면 $\frac{0}{1-a}$가 된다.

$a=1$이면 부정형이고 $a \neq 1$이면 부정형이 아니다.

그러므로 $a=1$일 때와 $a \neq 1$일 때로 '케이스 분류'하면 된다.

## 01

[2013년 6월 고3 문과 9번/3점]

**함수 $f(x)$에 대하여**

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$$

**일 때, $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?**

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$

④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

발상2 : 다항함수 $f(x)$에 대해서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b(b\neq0)$일 때, $f(x)$의 최저차항은 $bx^n$이다.

이 발상은 아는 학생이라면 다음 페이지로 넘어가고, 모른다면 아래 설명을 보자.

<설명>

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b(b\neq0)$가 수렴하려면 분모가 0이면 안된다.

분모가 0이면 부정형이기 때문이다. 그러므로 분모의 $x^n$가 전부 약분되어야 한다.

그러려면 다항함수 $f(x)$는 $f(x)=x^n g(x)$ $(g(0)\neq0,\ g(x)$는 다항함수$)$로 인수분해 돼야한다.

$f(x)=x^n g(x)$ $(g(0)\neq0)$을 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b$를 써보면

$\lim_{x\to0}\frac{x^n g(x)}{x^n}=b$가 되고 분자, 분모를 약분하면 $\lim_{x\to0}g(x)=b$가 된다.

$g(x)=px^m+qx^{m-1}+\ \cdots\ +rx+k$ ($m$은 최고차항의 차수)이라 하면

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}(px^m+qx^{m-1}+\ \cdots\ +rx+k)=k=b$가 된다.

이를 토대로 $f(x)$를 써보면

$f(x)=x^n(px^m+qx^{m-1}+\ \cdots\ +rx+b)$

$=px^{m+n}+qx^{m+n}+\ \cdots\ +rx^{n+1}+bx^n$가 되니

$f(x)$의 최저차항은 $bx^n$라는 것을 알 수 있다.

결론적으로 다항함수 $f(x)$에 대해 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b(b\neq0)$ 이런 극한식이 나오면 $f(x)$의 최저차항이 $bx^n$이라는 것이 떠오르면 된다.

이제 수특 원본 문제 (나) 조건을 보자.

$\lim_{x \to 0}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x^k}\right| = \frac{1}{2}$는 $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^n} = b(b \neq 0)$꼴이다.

그러므로 $x^3+ax^2+bx$의 최저차항의 차수는 $k$고 최저차항의 계수의 절댓값이 $\frac{1}{2}$라는 것을 알 수 있다.

**02**

[2017년 9월 고3 문과 12번/3점]

**다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.**

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

**$f(2)$의 값은?**

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

(가)에서 $f(x)$이 최고차항이 $2x^2$이라는 것을 알 수 있고, (나)에서 $f(x)$의 최저차항이 $3x$라는 것을 알 수 있다.

그러므로 $f(x) = 2x^2 + 3x$이다!

16p-LEVEL3 3번 문제

[23009-0025]

이차함수 $f(x)$와 상수 $a$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=a,\ \lim_{x\to 0}\frac{2f(x+2)}{f(x)}=\frac{5}{18}a$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{7}{5}$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

발상1 : 대칭성을 이용하라

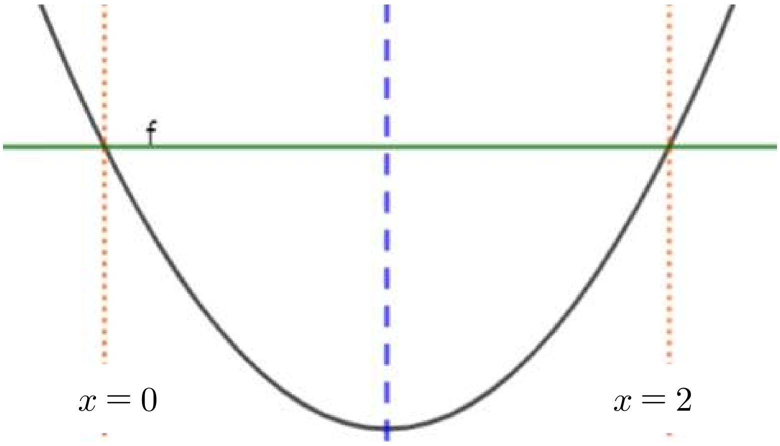
이 문제는 이 발상 하나만 가져가면 된다.

이차함수 $f(x)$가 $f(2)=f(0)$를 만족시킨다고 하자.

($\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}$에서 $f(2)=f(0)$를 알 수 있다.)

*이 조건 하나만으로도 대칭성을 이용하여 이차함수 $f(x)$의 대칭축의 방정식을 알 수 있다!*

$f(2)=f(0)$와 $f(x)$의 대칭축을 그림으로 표현해보자.




*$x=2$와 $x=0$은 대칭축에 대해 대칭일 수밖에 없다.*

그러므로 대칭축의 좌표는 $x=2$와 $x=0$의 평균인 $x=1$이다.

이차함수의 대칭축의 방정식을 이런 방식으로 제시할 수 있다는 것을 꼭 기억하자!

**03** [2020년 3월 고3 문과 13번/3점]

**최고차항의 계수가 $1$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 $y$축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$의 값은?**

① $1$ ② $4$ ③ $9$
④ $16$ ⑤ $25$

$g(x)$는 이차함수이고, 대칭축이 $x=0$($y$축)이다. (우함수)
$g(3)=0$이고, 대칭축이 $x=0$이기 때문에, $g(-3)=0$을 빠르게 알 수 있어야 한다.

28p-LEVEL3 1번 문제

[23009-0045]

실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$인 함수 $f(x)$와 $\lim_{x\to 1+} g(x) > \lim_{x\to 1-} g(x)$인 함수 $g(x)$가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)\times\left\{\lim_{x\to 1+} g(x) - \lim_{x\to 1-} g(x)\right\}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) $x<1$일 때 $f(x)g(x)=x^2-2x-8$이고, $x>1$일 때 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=3x+1$이다.

발상1 : 쪼개라 $f(x)g(x) \to f(x)\times g(x)$

곱함수 $f(x)g(x)$를 해석하는 기본적인 태도는 $f(x)$와 $g(x)$로 쪼개서 해석하는 것이다.

위의 문제에서는 $|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|$로 쪼개서 $|f(x)|$와 $|g(x)|$로 쪼개서 해석해야 한다. (만약 $|xy|$를 $|x||y|$로 바꿀 수 있다는 걸 몰랐다면 진짜 큰일 날 뻔한 것이다. 무조건 알고 있어야 한다!)

근데 $f(x)>0$이기 때문에 $|f(x)|=f(x)$이므로 $|f(x)g(x)|=f(x)|g(x)|$로 바꿔 해석하면 된다.

발상2 : 연속함수 $f(x)$와, $x=a$에서 불연속인 함수 $g(x)$가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $f(a)=0$이어야 한다.

(단, $g(x)$는 $x=a$에서 발산하지 않는다.)

이걸 모르고 있으면 진짜 곤란하다.......
'무조건' 알고 있어야 한다.
모르고 있었다면 발상2에 대한 아래 설명을 잘 보자.
알고 있다면 다음 페이지로 넘어가자.

<설명>
$f(x)g(x)$가 연속이려면 $x=a$에서의 좌극한 $\lim_{x\to a-} f(x)g(x)$과 우극한 $\lim_{x\to a+} f(x)g(x)$이 같아야 한다. $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a-} f(x)g(x) = \lim_{x\to a+} f(x)g(x)$

$g(x)$가 $\lim_{x\to a-} g(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a+} g(x) = \beta$ (단, $\alpha \neq \beta$)라고 한다면

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \alpha$
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \beta$
가 된다.

$\lim_{x\to a} f(x) \times \beta = \lim_{x\to a} f(x) \times \alpha$ (단, $\alpha \neq \beta$) *려면* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *이어야만 한다.*

(가) 조건에 의하면 $f(x)|g(x)|$가 연속이다.
($|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| = f(x)|g(x)|$ 이니깐 ($f(x) > 0$))

$f(x)$가 연속함수고 $|g(x)|$는 연속함수인지 불연속함수인지 주어지지 않았다. $f(x) > 0$이므로 $f(x)$는 0일 수 없다.

*만약 $|g(x)|$가 $x = a$에서 불연속이라면 $f(a) = 0$이어야 $f(x)|g(x)|$가 연속이 될 수 있는데, $f(x) > 0$이므로 불가능하다.*

*그러므로 $|g(x)|$는 연속함수여야만 하다.*

아래 문제가 풀기 귀찮으면, (가) 조건을 본 후 $|h(x)|$가 미분 불가능하다면 어디에서 미분 불가능할지만 생각해봐라.

**04**

[2020년 11월 고3 이과 28번/4점]

**두 상수 $a$, $b$ ($a<b$)에 대하여 함수 $f(x)$를**

**$f(x)=(x-a)(x-b)^2$이라 하자.**

**함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여**

**합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을**

**만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.**

> (가) **함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.**
>
> (나) $h'(3)=2$

$|h(x)|$가 미분 불가능한 점이 $x=1$이어야 $(x-1)|h(x)|$가 미분 가능하다.

28p-LEVEL3 2번 문제

[23009-0046]

함수

$$f(x)=\begin{cases} |x+2|-1 & (x<-1) \\ |x| & (-1\le x<1) \\ -|x-2|+1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |
|---|
| ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 불연속이다. |
| ㄴ. 함수 $f(x)\{f(x)+k\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 $k$의 값이 존재한다. |
| ㄷ. 함수 $f(x)f(x-2)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. |

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

발상1 : 불연속 후보점을 찾아라

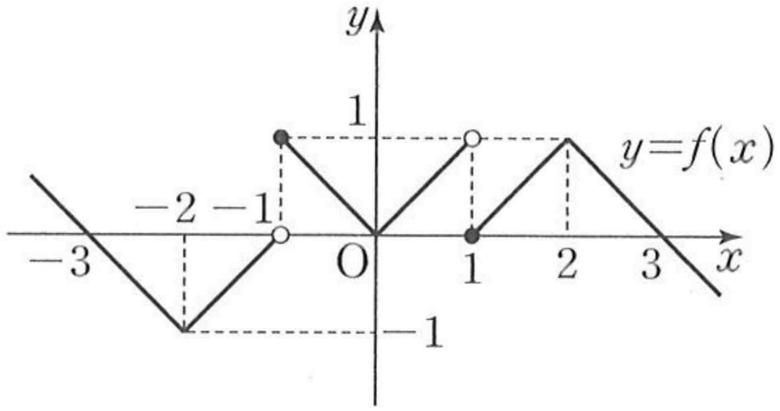
(ㄷ)을 보면 “$f(x)f(x-2)$가 실수 전체의 집합에서 연속”이냐고 묻고 있다.

이렇게 ‘실수 전체에서 연속’인지를 판단할 때는 ‘불연속 후보점’을 잘 찾아야 한다.

불연속이 될 수 있는 모든 곳에서 연속이라고 판명 나면 무조건 실수 전체에서 연속이기 때문이다.

*$f(x)g(x)$가 있을 때, 불연속 후보점은 $f(x)$가 불연속인 곳과 $g(x)$가 불연속인 곳이다. 이 지점들만 연속인지 불연속인지 확인하자.*

아래 $f(x)$의 그래프를 보고 $f(x)f(x-2)$의 불연속 후보점을 찾아보자.




$f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이다.

$f(x-2)$는 $f(x)$를 $x$축 방향으로 2만큼 평행이동했으니 $x=1$과 $x=3$에서 불연속이다.

그렇다면 $f(x)f(x-2)$는 $x=-1, x=1, x=3$이 불연속 후보점이다.
이 점들에서 연속이라면 $f(x)f(x-2)$는 실수 전체에서 연속이다.

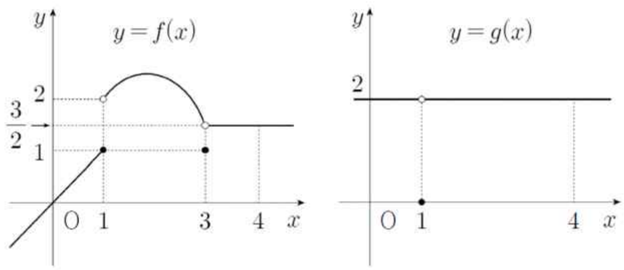
*<u>"불연속 후보점을 잘 찾자!"</u>*

바쁘면 (ㄷ)만 풀어봐라.

## 05

[2013년 7월 고3 문과 8번/3점]

**그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?**




**<보기>**

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=2$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄷ. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)g(x)$의 불연속인 점은 오직 한 개 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서 불연속이고, $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

그러므로 $f(x)g(x)$의 불연속 후보점은 $x=1$과 $x=3$이다.

28p-LEVEL3 3번 문제

[23009-0047]

함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x-2}$와 양의 실수 $t$에 대하여 $x$에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하고, $x$에 대한 방정식 $|f(x)|=tx$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 $t=b$에서만 불연속이다.
(나) 함수 $h(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(4)+h(4)=-3$일 때, $f(b)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이고, $2a+b\neq0$, $b>0$이다.)

① $-10$  ② $-8$  ③ $-6$  ④ $-4$  ⑤ $-2$

발상1 : 상황이 특정되지 않으면 케이스 분류를 해라

문제 조건의 $|f(x)|=t$를 보면 절댓값이 있기 때문에 $f(x)$와 $x$축이 교점을 갖는지가 중요하다.

그러니 문제의 $f(x)=\frac{ax+b}{x-2}=a+\frac{2a+b}{x-2}$를 $x$축, $y$축과 함께 그려봐라.

아마 잘 안될 것이다. 왜냐하면 $y$축 점근선인 $y=a$와 유리함수의 분자값인 $2a+b$ 값을 모르기 때문이다.

이러면 $f(x)$와 $x$축가 교점을 갖는지도 모르고, $f(x)$의 개형이 아래 두 개의 그림 중 어떤 개형인지도 알 수 없다.

이렇게 상황이 특정되지 않아서 풀이가 막혔을 때는 자신있게 케이스 분류를 해라!

많은 학생들이 이런 상황에서 자신이 뭔가를 놓쳤거나 자신의 수학 실력이 부족해서 막혔다고 생각하는데 그렇지 않다. 그저 케이스 분류를 하면 되는 상황인 것이다.

이 문제에서는 <u>$a>0$면서 $2a+b>0$</u>일 때, <u>$a>0$면서 $2a+b<0$</u>일 때, <u>$a<0$면서 $2a+b>0$</u>일 때, <u>$a<0$면서 $2a+b<0$</u>일 때로 케이스 분류를 하면 된다.

<u>*“상황이 특정되지 않으면 케이스 분류를 해라”*</u>

아래 문제가 어려우면 $g(x)=\dfrac{ax-9}{x-1}=a+\dfrac{a-9}{x-1}$의 $a-9$를 보고 어떻게 케이스 분류를 하면서 시작할지만 고민해봐라.

**06** [2019년 6월 고3 문과 30번/4점]

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 $t$의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.)

$g(x)=\dfrac{ax-9}{x-1}=a+\dfrac{a-9}{x-1}$의 $a-9$의 부호에 따라 유리함수의 개형이 결정되니깐 $a>9$일 때와 $a<9$일 때로 분류해서 시작하면 된다.

42p-LEVEL3 1번 문제

[23009-0071]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=0$

(나) 모든 실수 $x$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$$

이다.

발상1 : 모양에 맞게 변형하라

학생들이 답지 풀이를 봤을 때 많이 하는 질문 중 하나가

*"왜 답지는 갑자기 이렇게 변형해요? 납득이 안가요."*

이다.

그에 대한 명확한 답을 주겠다.

(나) 조건을 봤을 때 뭐가 떠오르는가?

미분계수의 정의 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$이 떠올라야 한다. 괜히 $h$를 준 게 아니다.

출제자가 좀 더 미분계수의 정의를 떠올리기 편하라고 $h$로 준거다.

원형이 되는 식을 떠올렸을 때는 항상 *그 원형의 모양에 맞게 변형해야 한다.*

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}$을 *$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 모양이 등장하도록 변형해야 한다.*

일단 $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}$의 분자는 $f(h)$가 공통인수니깐 $f(h)$로 인수분해하고, 분모는 $h^2$이니깐 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$모양에 맞게 $h\times h$로 쪼개자.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}\times\frac{f(h)}{h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}=\frac{1}{2}f'(x)$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}\times\frac{f(h)}{h}=\frac{1}{2}f'(x)f'(0)$임을 알 수 있다.

"문제의 식을 변형할 때의 기준은 항상 기준이 되는 식의 *모양에 맞게 변형*하면 된다."

아래 문제는 킬러 문제다.

자신 없거나 시간이 없으면 $\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$를 어떻게 변형할지만 생각해봐라.

**07** [2021년 9월 고3 22번/4점]

**최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수**

$$g(x)=f(x-3)\cdot\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

**가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.**

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은

서로 다른 네 실근 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$를 갖고

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$는 미분 계수의 정의와 모양이 비슷하므로 미분 계수의 정의식의 모양에 맞게 변형해야 한다.

$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$를

$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}\times\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{-h}$로 변형하는 것만 성공하면 이 문제는 넘겨도 된다.

발상2 : 다항함수 조건은 특이 조건이다

후에 84p-LEVEL3 3번 문제에서 자세히 다룰 것이니 지금은 넘어가도록 하자.

42p- LEVEL3 3번문제

[23009-0073]

**3** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & (x\le 0) \\ x^2+2 & (x>0) \end{cases}$과 세 정수 $a$, $b$, $k$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le k) \\ f(x-a)+b & (x>k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b+k$의 최솟값은?

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

발상1 : 정수 또는 자연수가 나오면 대입하라

'정수 $a$, $b$, $k$'라는 말이 있다.

정수 또는 자연수라는 말이 나오는 순간 숫자 '대입'을 할 준비를 해야 한다.

평가원 기출 문제에서 정수 또는 자연수가 등장한 문제의 95% 이상은 대입을 통해 문제를 푼다.

자연수라는 말이 나오면 1부터 시작해 1, 2, 3...이렇게 대입하면 된다. 정수라는 말이 나오면 0부터 시작해서 1, 2, 3.... 또는 -1, -2, -3... 이렇게 대입하는 게 일반적이다.

TIP을 주겠다. 이 문제에서는 정수 $a$, $b$, $k$의 합 $a+b+k$의 '최소'를 구하라 했다. 그러므로 $a$, $b$, $k$는 작아야 한다. 그러니 0, -1, -2... 순으로 대입하자.

**08**

[2010년 9월 고3 문과 26번]

$1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 8$인 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$ 이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m, n)$의 개수는?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

발상2 : 그림을 그려라

$g(x)$의 $f(x-a)+b$는 $f(x)$를 단순히 평행이동시킨 식일 뿐이다.
그 이상 뭔가를 알아낼 수 없다.

그러므로 우리는 필히 '그래프 그림'을 그려봐야 한다.

식에서 주는 정보가 거의 없다는 것은 출제자가 '그림을 그려서 정보를 뽑아내!'라는 뜻이기도 하기 때문이다.

그래프 그림을 그린 후, 그 그림을 실제로 평행이동시켜보면서 풀면 된다.

## 09

[2021년 6월 고3 14번/4점]

**두 양수 $p$, $q$와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?**

| |
|---|
| (가) 모든 실수 $x$에 대하여<br>$xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다.<br>(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 $a$의 개수는 1이다. |

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

문제가 어렵다면 이것만 보자.

(가)를 변형해보면 $g(x)=\begin{cases} f(x-p)+q & (x>0) \\ -f(x-p)-q & (x<0) \end{cases}$가 된다.

위의 수특 문제처럼 평행이동 꼴이다.

그래프를 그린 후 직접 평행이동시키면서 풀어야겠다는 생각만 들었으면, 풀지 말고 과감하게 넘겨라.

그거면 충분하다.

발상3 : 이차함수의 도함수는 일대일대응이다

이 발상은 이 문제만의 핵심 발상이니 주목하자.
원본 문제로 이 발상을 설명하는 것은 어려워서 쉬운 변형 문제로 설명하겠다.

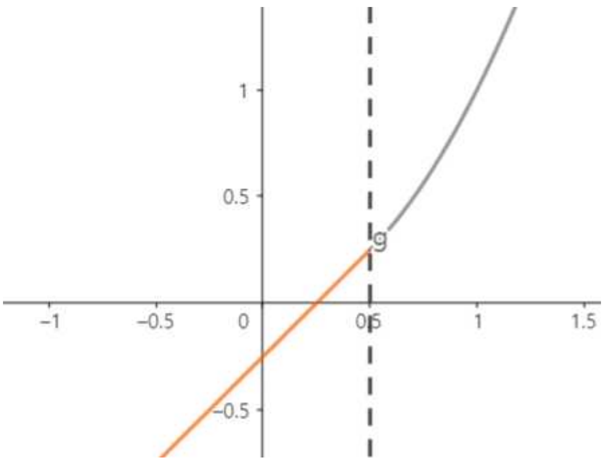
다음 문제를 풀어보자.

$f(x)=x+k$와 $g(x)=x^2$가 있다. $h(x)=\begin{cases} f(x) \ (x<p) \\ g(x) \ (x \geq p) \end{cases}$가 미분가능할 때, $p$의 값을 구하여라.

$h(x)$는 미분 가능하기 때문에 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=p$에서 미분계수가 같아야 한다. $k$값이 주어지지 않았는데 $p$를 구하라고 해서 문제를 풀다 당황했을 수 있다.

근데 놀랍게도 $k$값을 몰라도, $p$값을 구할 수 있는 방법이 있다!

$f(x)$는 기울기가 1인 직선이므로 항상 미분계수가 1이다. 미분계수가 1인 점을 $g(x)$에서 찾으면 그곳이 $x=p$이다.
그런데 *이차함수의 도함수는 직선, 곧 일대일 함수*이기 때문에 미분계수가 1인 곳이 '딱 한 곳' $x=\frac{1}{2}$밖에 없다!



관련 기출이 없어서 자체 제작 문제로 대체하겠다.
다음 문제를 풀어보자.

$f(x)=2x+k$와 $g(x)=x^2$가 있다. $h(x)=\begin{cases}2x+k & (x<p)\\ x^2 & (x\geq p)\end{cases}$가 미분가능할 때, $p$의 값을 구하여라. 정답: $p=1$

이차함수 $g(x)$가 $g'(a)=b$일 때, $g'(x)=b$를 만족시키는 $x$는 $a$가 유일하다는 점. 즉, 이차함수의 도함수는 일대일 함수라는 점을 기억하자.

이 문제는 해설지에 없다.

56p-LEVEL 3 2번 문제

**2** [23009-0099]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $p$에 대하여 함수 $g(x)$를

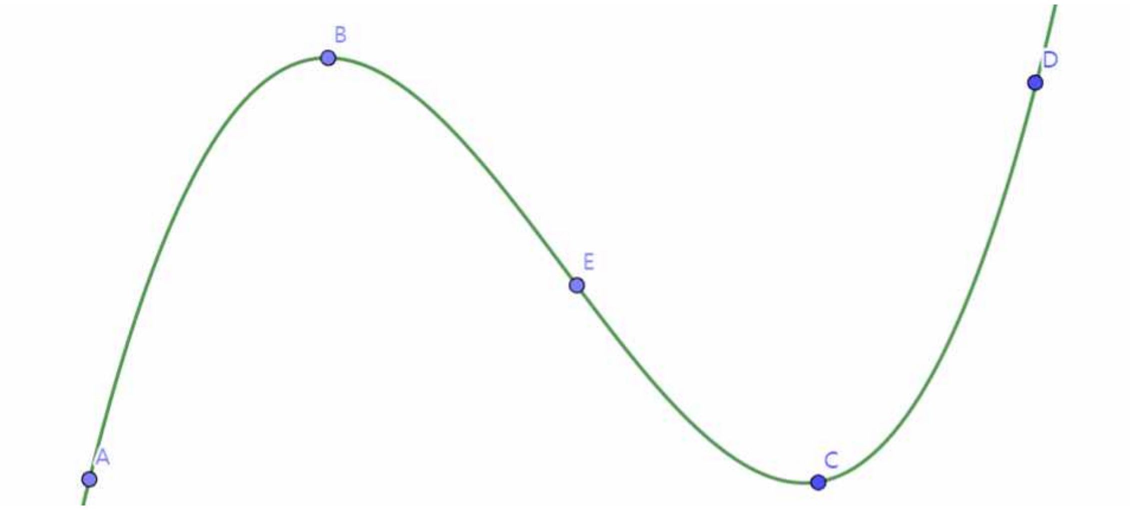
$$g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$$

라 하자. $g(2)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가질 때, $p$의 값은? (단, $p\neq2$)

① $-\frac{1}{5}$　② $-\frac{1}{4}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-1$

발상1 : 삼차함수 특이점 5개 중 2개만 알면 나머지 좌표를 다 구할 수 있다.

삼차함수의 특이점 5개는 잘 알 것이다.




이 중 '2개만 알면' 나머지가 다 구해진다는 것 정말 중요하다.

위의 그림에서 $A(-1, 0)$, $E(1, 1)$일 때, 나머지 좌표들을 구해보자.

답: $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, $D(3, 2)$

이 내용을 적용하면 수특 원래 문제에서 '$f(x)$가 $x=0, x=1$에서 극값을 갖'는다는 정보를 통해 $f(x)$의 특이점 5개를 다 구할 수 있다.

**10** [2013년 6월 고3 문과 17번/4점]

**곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 $x$좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 $y$절편의 값은?**

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

혹시 삼차함수의 변곡점의 $x$좌표 구하는 공식을 아는가?

모른다면 무조건 외워라.

발상2에서도 나온다.

***삼차함수*** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$***의 변곡점의 좌표는*** $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$

이 공식으로 변곡점의 좌표와 점 A좌표로 총 2개의 삼차함수 특이점을 알고 있으니 나머지 3개도 알 수 있다.

발상2 : 삼차함수 $f$와 일차함수 $g$를 더하거나 뺀 삼차함수 $f \pm g$의 변곡점의 $x$좌표는 $f$의 변곡점과 같다.

삼차함수의 변곡점의 $x$좌표는 '삼차함수의 삼차항의 계수와 이차항의 계수'에 의해 결정된다.
이걸 모르고 있었다면 아래 공식을 꼭 익혀두자.

"삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$의 변곡점의 $x$좌표는 $-\dfrac{b}{3a}$이다"

$f(x)$에 일차함수 $g(x) = px + q$를 더하거나 뺀
삼차함수 $f(x) \pm g(x) = ax^3 + bx^2 + (c-p)x + (d-q)$의 변곡점의 $x$좌표는 여전히 $-\dfrac{b}{3a}$다!

그러므로 수특 원래 문제에서 $g(x)$와 $f(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 서로 같다.

**11** [2016년 9월 고3 문과 20번/4점]

**삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.**

| |
|---|
| (가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.<br>(나) $f'(-3)=f'(3)$ |

**<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?**

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ이 중요하다. (참고로 답지의 ㄷ풀이는 좋은 풀이가 아니다.)
점 $(-1, f(-1))$에서 접선을 그었을 때 만들어지는 삼차함수 특이점 5개 중 변곡점에 해당하는 점의 $x$좌표는 $f(x)$의 변곡점의 $x$좌표와 같다.

즉, 점 $(-1, f(-1))$에서 접선을 그었을 때 만들어지는 차함수(삼차함수)의 변곡점의 $x$좌표와 $f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 같다는 뜻이다!

56p-LEVEL3 3번 문제

[23009-0100]

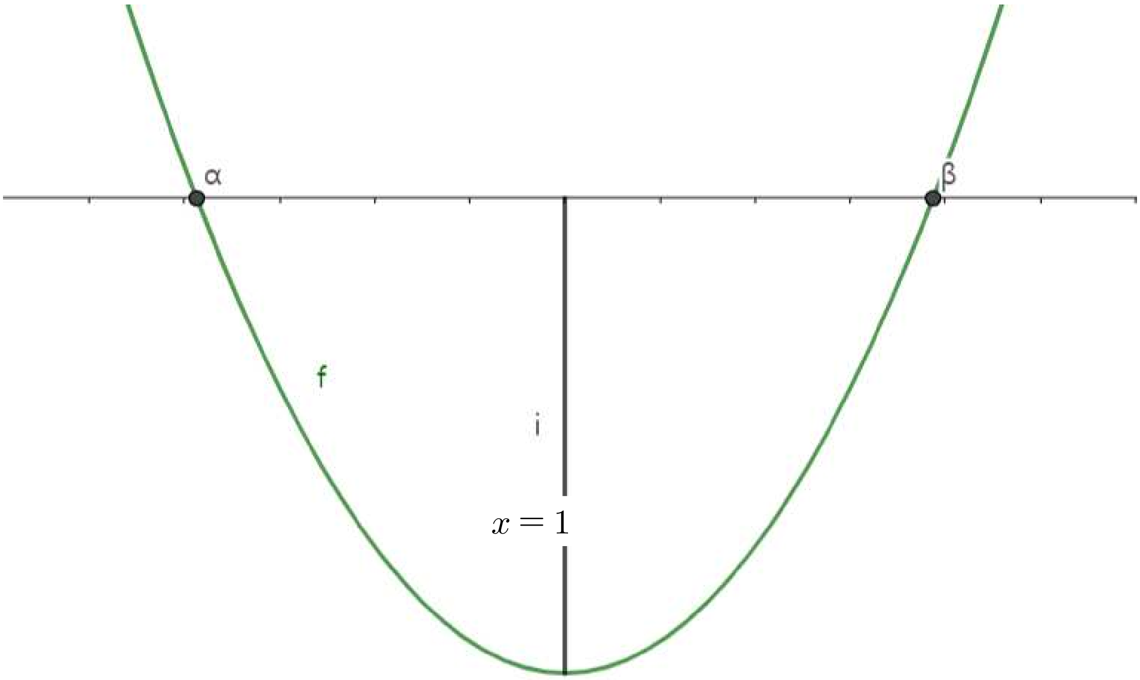
**3** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=f(x)\times f'(x),\ h(x)=|g(x)|$$

라 하자. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 2이고 실수 $k$에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 실수 $k$의 최솟값이 0일 때, 실수 $k$의 최댓값은 $\frac{a\sqrt{42}-b}{72}$이다. 두 정수 $a$, $b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

발상1 : 이차함수의 두 실근의 합의 평균은 대칭축의 $x$좌표다

위 문제의 세 번째 줄을 보면 “두 실근의 합이 2”라고 나와있다.
두 실근이 각각 $\alpha$, $\beta$라면 $\alpha$와 $\beta$의 정 가운데, 즉 평균에는 대칭축 $x=1$이 있다.




*“이 발상은 꼭 외워야 할 실전 개념이다”*

**12** [2005년 9월 고3 이과 7번]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $-1$에서 7까지 변할 때의 평균변화율은 0이다.

ㄴ. 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a)+f'(b)=0$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ문제 풀이가 발상1이랑 비슷하다.
이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=3$이라는 것을 아는 상태에서 $a+b=6$을 봤을 때, $\frac{a+b}{3}$이 떠올랐으면 BEST다!

57p-LEVEL3 4번 문제

[23009-0101]

**4** 함수 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.

ㄴ. $1<x<2$에서 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 3보다 큰 모든 실수 $a$에 대하여 $f(a)<f'(a)\times(a-3)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ선지

발상1 : 사잇값 정리

ㄴ선지를 보면 '적어도 하나의 실근을 갖는다'라고 나와있다.

이런 식으로 특정 값을 구하라는 게 아니라 '개수'(ex-적어도 하나의, 세 실근을 갖는다)가 언급될 때는

*그림 그리기, 사잇값 정리, 롤의 정리, 평균값 정리* 등의 도움을 받을 수 있는 문제가 많다.

(물론 식 풀이도 같이 해야 한다. 70p-2번 문제는 '개수'라는 말이 언급되어 있지만 방정식을 세워 푸는 문제다.)

위의 문제에서는 $f(1)-\frac{1}{2}<0$, $f(2)-\frac{1}{2}>0$를 만족시키므로 ㄴ 선지는 맞다.

어려우면 ㄷ은 풀지마라.
ㄴ까지만 풀어봐라.
힌트는 롤의 정리가 이용된다는 것이다.

**13** [2017년 7월 고3 문과 20번/4점]

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{0}^{x} tf(t)dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $g'(0)=0$

ㄴ. 양수 $\alpha$에 대하여 $g(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 양수 $\beta$에 대하여 $f(\beta)=g(\beta)=0$이면 모든 실수 $x$에 대하여 $\int_{\beta}^{x} tf(t)dt \geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

발상2 : 모양에 맞게 변형하라

이 발상은 정말 광범위하게 쓰이니 집중하도록 하자

$f(a) < f'(a) \times (a-3)$ 식의 '*모양*'을 봤을 때
접선의 방정식 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$의 *'모양'*과 매우 비슷하다는 점을 알 수 있다.

모양이 비슷하다는 건 수학에서 우연이 아니다.

그 비슷한 모양의 *'원형의 식'*을 떠올린 후 원형의 식의 *모양에 맞게 변형*하고 해석해야 한다.
이 상황에서 원형의 식은 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$이다.

그러니 $f(a) < f'(a) \times (a-3)$를 $f'(a)(3-a) + f(a) < 0$으로 변형해보자.

$x = a$에서의접선의 방정식인 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$에 $x = 3$을 대입한 식이라는 것을 알 수 있다.

**14** [2009년 6월 고3 이과 6번]

**함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이고,**
**$f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때,**
**$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$의 값은?**

① $-8$ ② $-4$ ③ $4$
④ $8$ ⑤ $12$

결론 부분 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$을 봤을 때

미분계수 극한식 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ 모양이 떠올랐으면

당신은 3등급 짬밥이 될 자질은 충분하다는 것이다.

원본 모양에 맞게 결론 부분 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$을 잘 변형해보자.

57p-LEVEL3 5번 문제

[23009-0102]

**5** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x & (0<x<1) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 3) \end{cases}$

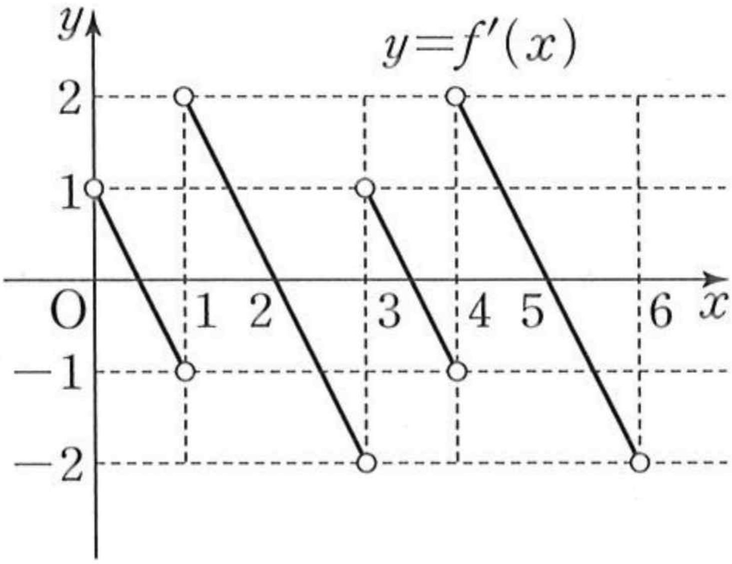
(나) 모든 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이다.

양의 실수 $m$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)-mx$라 할 때, 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 실수 $\alpha$를 작은 수부터 차례대로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\cdots$, $\alpha_n$, $\cdots$이라 하자. $\alpha_7<6\le\alpha_8$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=18$일 때, $g'\left(\frac{11}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

발상1 : 도함수는 ‘부호 변화’가 중요하다

아래 그래프는 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$다.

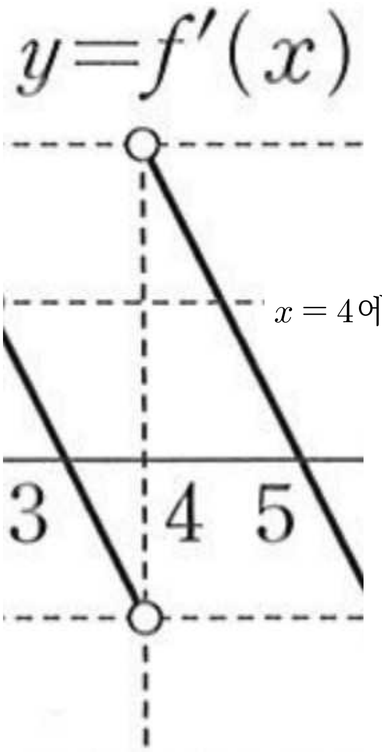



이 그래프를 보고 $f(x)$가 $x=2$, $x=5$에서 극값을 갖는다는건 대부분 잘 안다.

자, 질문 하나 하겠다. $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 $f(x)$는 극값을 갖는가?

만약 대답을 망설였다면 지금 PDF를 보고 있다는 사실에 감사해라.

정답은 ‘그렇다’이다.
왜냐하면 $x=1, x=3, x=4$에서도 $f'(x)$의 부호가 변하기 때문이다.




$x=4$에서 $f(x)$는 극값!

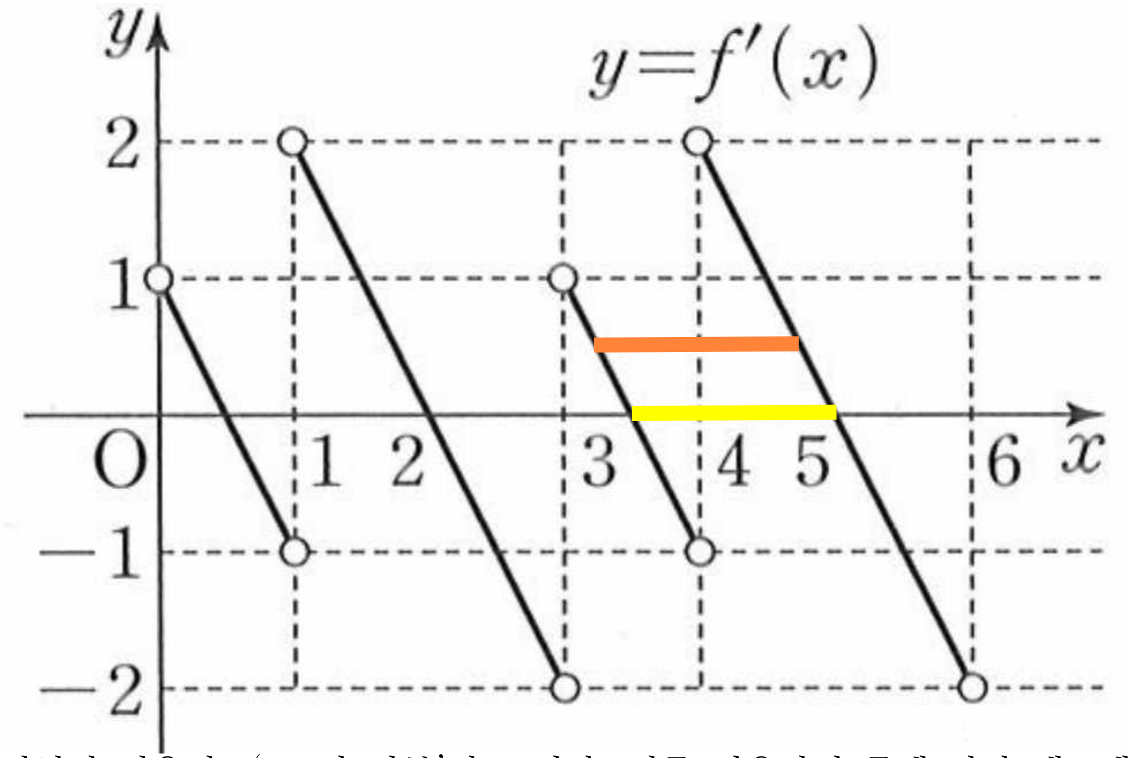
이 이미지를 머리에 담아두고, $f(x)$의 극값은 $f'(x)$의 부호가 변하는 곳에서 생긴다는 것 잊지 않도록 하자.

안타깝게도 이 발상은 공통 과목 기출 중 기억나는 게 없다.

발상2 : 공통, 반복되는 것은 단서 조건이다

문제 발문에서 공통되거나 반복되는 요소가 있다? 굉장히 중요한 조건일 수 있다. 다음 식을 보자.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+1 & (0<x<1) \\ -2x+4 & (1<x<3) \end{cases}$$




직선의 기울기 '$-2$가 반복'되고 있다. 이를 이용하여 문제 하나 내보겠다.

$x$축과 평행한 주황색 선분의 길이를 구하여라.
정답은 $5-3=2$이다. 주황색 선분 양끝의 직선 두 개의 기울기가 서로 $-2$로 같기 때문에
노란색 선분의 길이와 주황색 선분의 길이가 같다. 노란색 선분의 길이가 $5-3=2$니깐 주황색 선분의 길이도 2이다.

이렇게 문제에 *공통된 요소 또는 반복되는 요소*가 있다면 주목하도록 하자.

**15** [2023년 9월 고3 13번/4점]

**두 실수 $a$, $b$에 대하여**

**함수** $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$ **이**

**구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M-m$의 값은?**

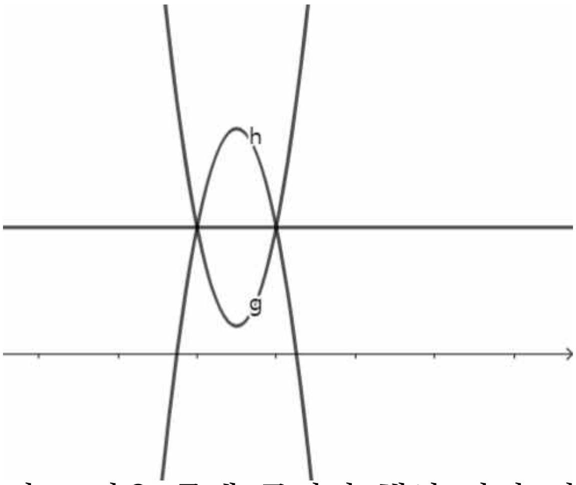
① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

‘감소’라는 말이 있으니 미분을 해보자.

$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x\geq 0) \end{cases}$의 위 아래 식에서 $-b$가 반복된다.

이 사실을 이용하면 아래 그림을 그릴 수 있다.




이 그림은 문제 풀이의 핵심 단서 역할을 한다.

잘 모르겠으면 유튜브 ‘수능날먹’에서 ‘올해 9평공통기출 3분안에 정리할 수 있을까?’ 0초(시작부분)시간대를 시청하도록 하자.

70p-1번 문제

[23009-0125]

**1** 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^3-x^2$과 실수 $t$에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $0\le t\le 5$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{22}{7}$　　$\frac{24}{7}$　　③ $\frac{26}{7}$　　④ 4　　⑤ $\frac{30}{7}$

발상 : 경계값에 주목하라

응용 가능성이 무한대인 발상이다.

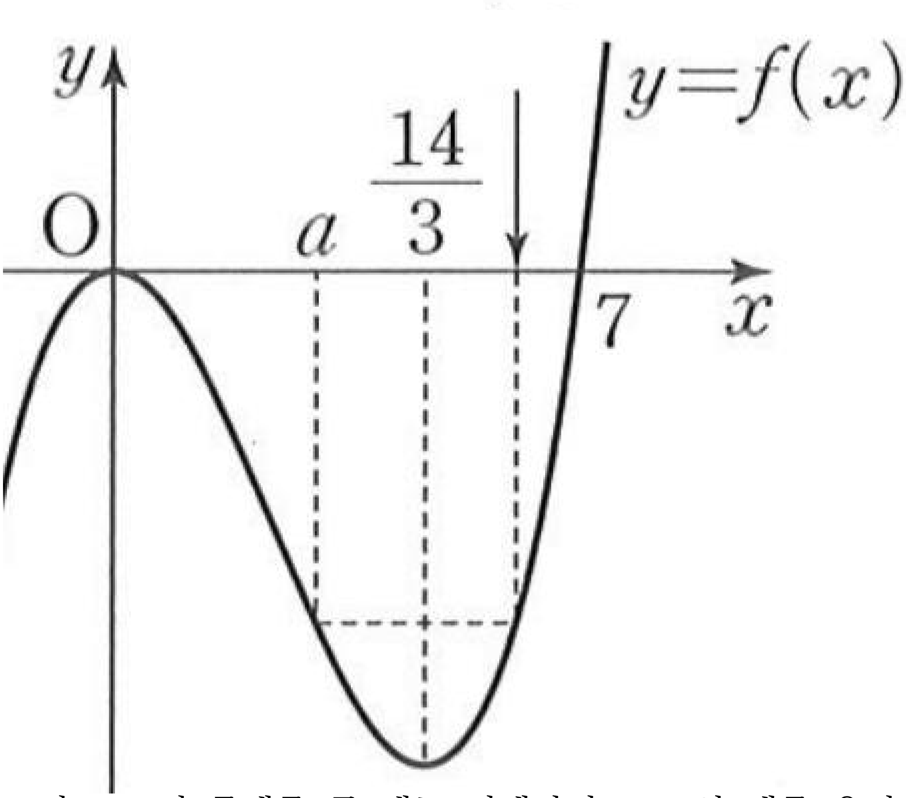
부등식 $x\ge 1$에서 가장 중요한 $x$값은 무엇인지 아는가?
바로 $x=1$이다. $x=1$이 경계값이기 때문이다.

부등식 $f'(x)<1$에서 가장 중요한 $f'(x)$값이 몇인지 아는가?
바로 $f'(x)=1$이다. 경계값이기 때문이다.

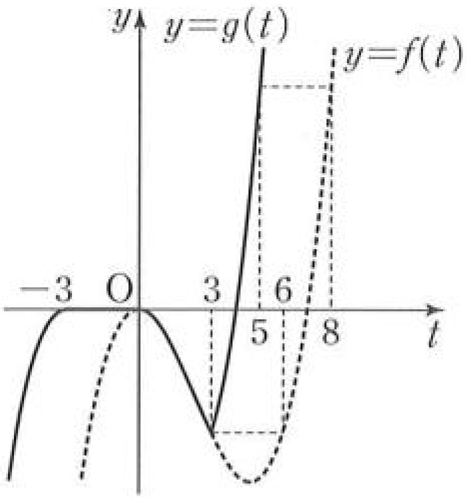
이처럼 수학에서는 경계값이 중요하다. 그리고 그 경계값은 '='(등호)를 포함할 때가 압도적으로 많다는 사실 꼭 알아둬라.

이는 현우진을 비롯한 수많은 인강쌤들도 강조하는 내용이다.

위의 문제에서 이 발상이 어떻게 사용되는지 봐보자.
$g(t)$는 구간 $[t,\ t+3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이다. 이 문제를 풀다보면 가장 중요한 $t$값은 3이다. 왜냐하면 $t=3$일 때 구간의 양 끝의 함숫값이 같아서($f(3)=f(6)$이 성립할 때) $t=3$이 '경계값'이 되기 때문이다. 아래 그래프를 보면서 확인해봐라.



그러므로 이 문제를 풀 때는 경계값인 $t=3$일 때를 유의하며 문제를 풀어야 한다.
실제로 아래 $g(t)$의 그래프를 보면 $t=3$일 때 급격한 변화가 있는 함수라는 것을 알 수 있다.



이 발상만 알면 이 문제는 다 안 것과 다름 없다!
70p-2번 문제

아래 문제가 어려워 보이면 문제에 있는 부등식을 보고 뭘 해야 할지만 생각해봐라.

**16** [2015년 9월 고3 문과 21번/4점]

실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 $t$의 값의 합은?

① $-7$ ② $-3$ ③ $1$
④ $5$ ⑤ $9$

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}<0$일 때와

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=0$일 때로 분류할 생각만 들었으면 충분하다. 굳이 다 안 풀어도 된다.

70p-LEVEL3 2번 문제

[23009-0126]

**2** 곡선 $y=ax^3-2x\ (a>0)$과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{27}$의 서로 다른 교점의 개수가 6이 되도록 하는 모든 자연수 $a$의 값의 합을 구하시오.

발상 : 복이차식은 치환하라

은근히 잘 까먹는 발상이다.

이 문제를 풀다보면 $a^2x^6-4ax^4+5x^2-\frac{1}{27}=0$이 나온다.

$x$의 차수가 전부 짝수이므로 복이차식이다. 그래서 $x^2=t\,(t\geq 0)$으로 치환해서 풀면 된다.

$x^2=t\,(t\geq 0)$로 치환하면 $a^2t^3-4at^2+5t-\frac{1}{27}=0\,(t\geq 0)$가 된다.

여기서 주의할 점이 있다!
방정식의 근이 $t=a\,(a>0)$으로 나왔을 때, $x=\sqrt{a}$ 또는 $x=-\sqrt{a}$가 실제 근이라는 것을 절대 잊지마라!

아, 그리고 교육과정에서 다항식을 가르칠 때 사차까지는 가르치고 오차부터 안 가르친다.
그래서 최고차항이 사차인 복이차식은 굳이 치환하지 않고 풀어도 풀리는 경우가 많다.

당장에 기억나는 기출은 없다.

70p-3번 문제

[23009-0127]

**3** 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치는 각각

$$x_1(t)=t^3+at^2+5t,\ x_2(t)=t^2+bt+c$$

이다. 두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하고, 두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 할 때, 다음 조건이 성립한다.

(가) 두 점 P, Q가 시각 $t=\alpha$ $(\alpha>0)$에서 만나고 $v_1(\alpha)=v_2(\alpha)$, $a_1(\alpha)=a_2(\alpha)$이다.
(나) $a_1(4)-a_2(4)=12$

$x_1(\alpha)+x_2(\alpha+1)$의 값은? (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

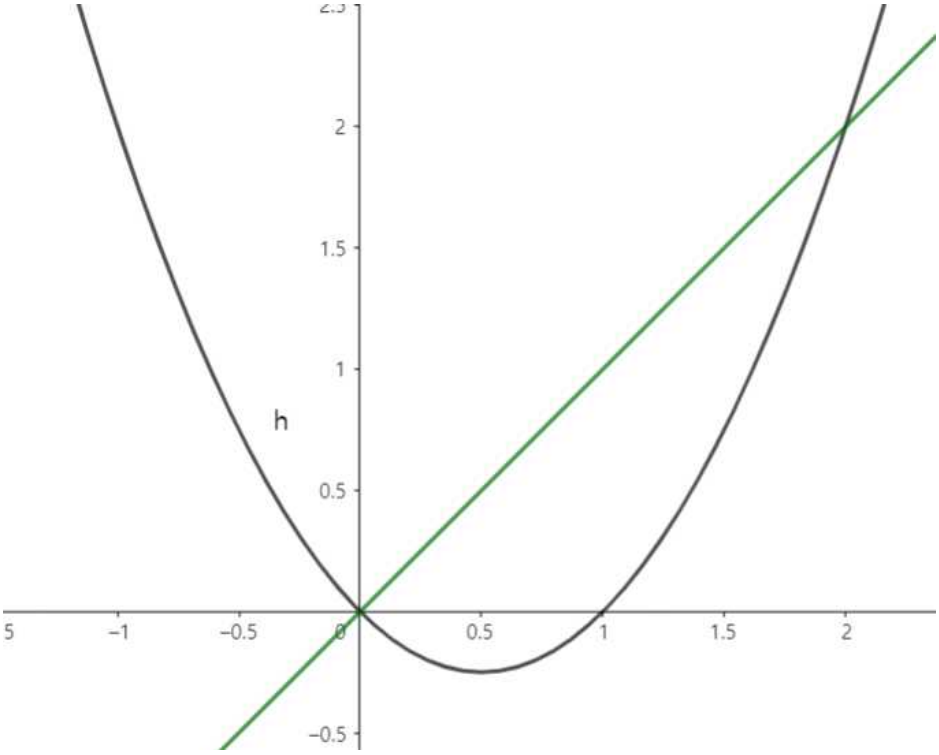
① $-7$　② $-6$　③ $-5$　④ $-4$　⑤ $-3$

발상1 : 서로 다른 두 함수의 관계를 차함수로 해석하라

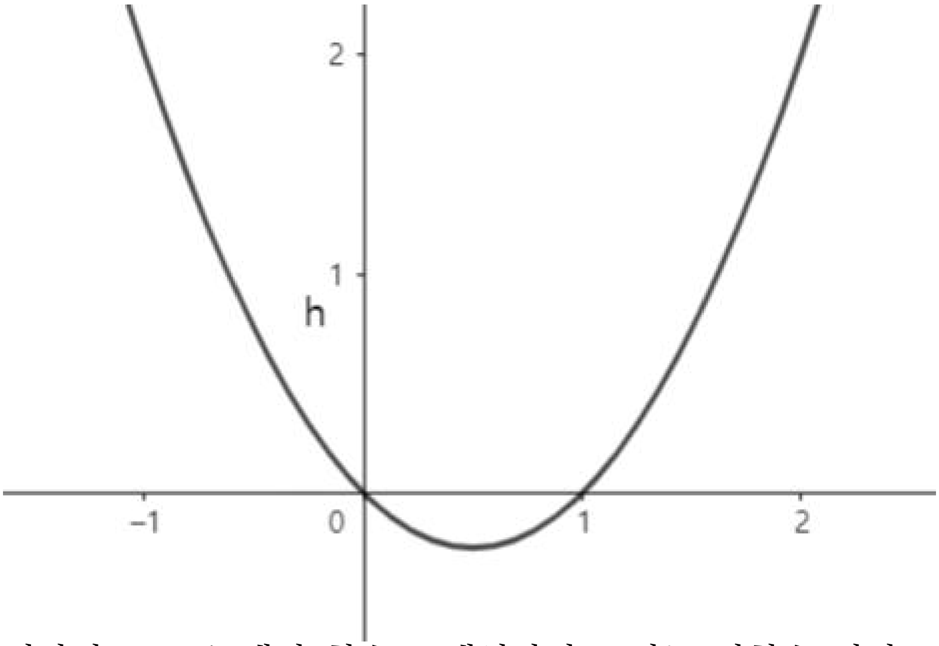
무조건 이번 수능에서도 나오는 발상이다.

서로 다른 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=x$이 있다.

아래 그림처럼 좌표평면 위의 두 개의 함수로 문제를 풀 수 있다.



하지만 차함수 $f(x)-g(x)=x^2-x$로 해석하면, 아래 그림처럼 '하나의 함수'만으로도 문제를 풀 수 있다.




일반적으로 두 개의 함수로 해석하기 보다는 차함수 하나로 해석하는 것이 쉽다.
그러니 차함수를 적극 활용하도록 하자!

**17** [2022년 6월 고3 9번/4점]

두 함수 $f(x)=x^3-x+6$, $g(x)=x^2+a$가 있다.
$x \geq 0$인 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립할 때, 실수 $a$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$f(x)-g(x) \geq 0$으로 변형하여 차함수로 풀자.

자신이 2등급 이상이라면 이 문제도 풀어보자.

**18** [2020년 11월 고3 문과 30번/4점]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를
$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$이라 하자.
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
$h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

84p-LEVEL3 2번 문제

[23009-0153]

**2** 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\ \int_{-2}^{2} f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)<0) \\ f(x) & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 할 때, $\int_{0}^{2} g(x)dx=\frac{1}{4}$이다. $f(4)$의 값을 구하시오.

발상1 : 특이 조건은 단서 조건이다.

위의 문제 조건의 $\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$처럼 적분 구간이 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 꼴이면 필수적으로 $f(x)$가 기함수 또는 우함수인지 의심해야 한다.

$\int_{-a}^{a} f(x)dx$를 보고 우함수 또는 기함수를 의심한 것과 같이

문제의 특이 조건을 보고 특이 상황을 의심하는 태도를 갖자.

이 태도는 수능 수학에서 2등급과 3등급을 가르는 핵심 태도 중 하나다.

특이 상황을 의심했으면 진짜 그 상황인지 확인하며 풀면 된다.

현우진, 양승진, 이창무 등의 모든 인강 강사들이 강조하는 태도이니 그 중요성은 말로 표현할 수 없다.

**19** [2007년 6월 고3 이과 5번]

**최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$의 값은?**

① $-1$　② $-2$　③ $-3$
④ $-4$　⑤ $-5$

$f(-1)=2$, $f(1)=-2$를 보면 서로 원점대칭 관계이다.
여기에 $f(0)=0$ 조건도 있으니 필수적으로 $f(x)$가 기함수인 것을 의심해야 한다.
$f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(0)=0$가 특이 조건인 것이다.

84p-LEVEL3 3번 문제

[23009-0154]

**3** 다음 조건을 만족시키는 모든 일차 이상의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은?

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{3}\{f(x)+k\}$이다. (단, $k$는 실수이다.)
(나) $x$에 대한 방정식 $f(x)=m$이 실근을 갖도록 하는 실수 $m$의 최솟값은 $-4$이다.
(다) $f(0)\geq 0$

① $-\frac{16}{3}$ ② $-\frac{14}{3}$ ③ $-4$ ④ $-\frac{10}{3}$ ⑤ $-\frac{8}{3}$

발상1 : 다항함수 조건은 특이 조건이다

*올해 9평 22번에서 나온 발상*이니 대단히 중요한 발상이다

$f(x)$가 다항함수라는 조건과 $f(x)$에 대한 항등식이 같이 있는 문제가 종종 나온다.
그런 문제는 $f(x)=ax^n+\cdots$으로 둔 후 항등식에 대입하여
최고차항의 계수 $a$와 최고차항의 차수 $n$을 알아내는 문제가 많다.

이 풀이는 $f(x)$가 다항함수일 때만 가능하다.
그래서 다항함수 조건은 특이 조건인 것이다.

**20** [2019년 11월 고3 문과 28번/4점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여
>
> $$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$ 이다.
>
> (나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

**21** [2023년 9월 고3 22번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모두 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

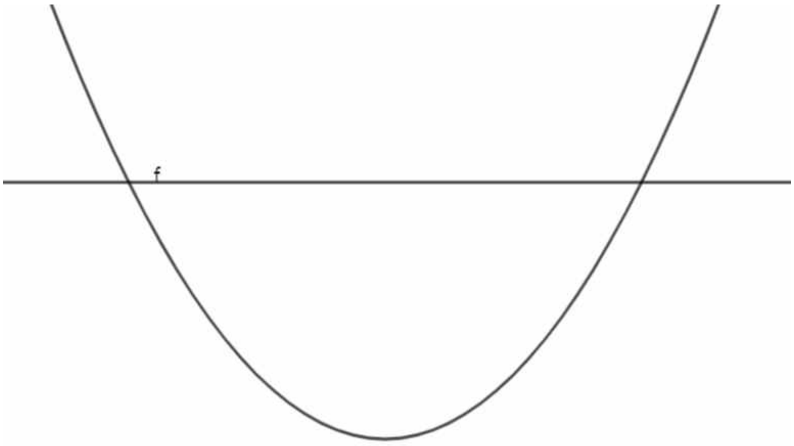
> (가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x)-2x^2-1$
>
> (나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.

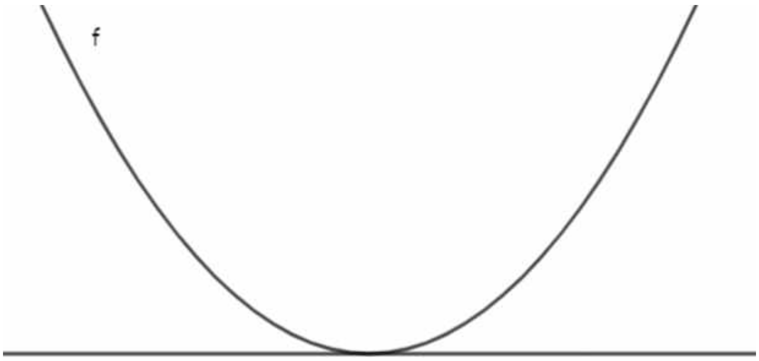
발상2

$f(x)$가 이차함수라는 것을 알고 (나) 조건을 보자.
(나) 조건은 무엇을 의미하는 걸까?

방정식 $f(x)=m$이 실근을 갖는다는 것은
좌표평면에서 $y=f(x)$와 $y=m$이 만난다는 것이다.




이 상황에서 $m$값이 최소가 되려면
$f(x)$의 꼭짓점에 $y=m$이 접해야 한다.




(나) 조건은 결국
*"$f(x)$의 최솟값은 $-4$"*라는 뜻이다.

이런 방식으로 이차 함수의 꼭짓점에 대한 정보를 줄 수 있다는 점 기억하자.

## 22

[2023년 6월 고3 20번/4점]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때,
$f(9)$의 값을 구하시오.

> $x \geq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여
> $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$이다.

$x \geq 1$에서 $g(x) \geq g(4)$라는 것은 $g(x)$가 $x=4$에서 극솟값을 갖는다는 것을 우회적으로 표현한 것이다.

85p-LEVEL3 4번 문제

[23009-0155]

**4** 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. $h(x)=\int_1^x g(t)dt$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=x(x-1)(x-2)$이면 $h(3)=\frac{1}{4}$이다.

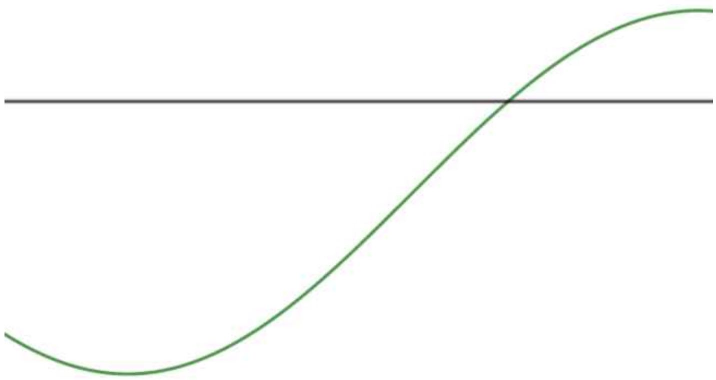
ㄴ. $h(2)>0$이면 $a>1$이고 $f(a)=0$인 실수 $a$가 존재한다.

ㄷ. $f(\alpha)=f(\beta)=0$이고 $\alpha\beta<0$이면 $h(\alpha)h(\beta)\geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

발상1 : $\infty$를 이용한 사잇값 정리

사잇값 정리를 그림으로 표현해보자.



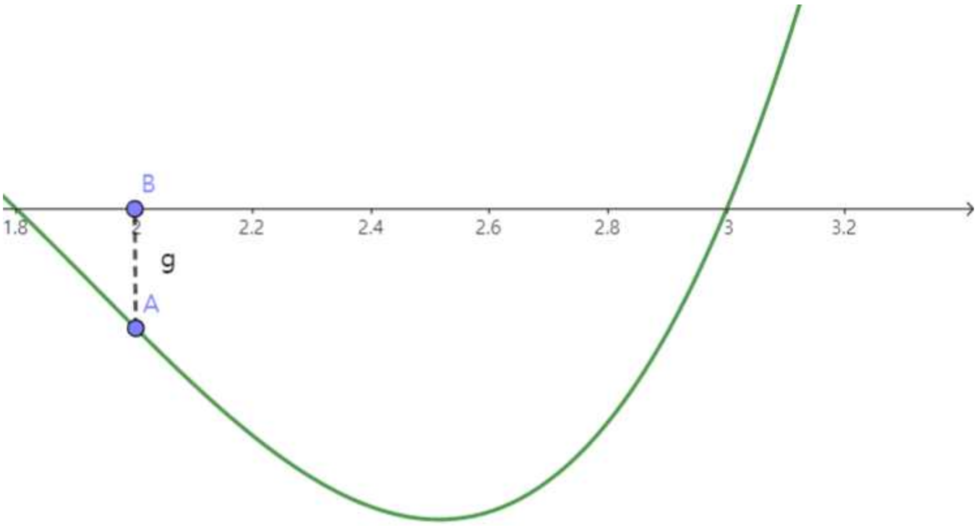
이처럼 사잇값 정리는 보통 두 개의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용한다.

그런데 이 문제는 특이하게도 $f(2)$와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 이용한다. 다음 문제를 풀어보자

"최고차항이 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $f(2)<0$를 만족시킨다. $f(x)$는 $x>2$에서 실근이 적어도 하나 존재하는가?"

답은 “존재한다”이다.

아래 그림을 보자.




$f(x)$는 최고차항이 양수라서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to+\infty$다.
그래서 자연스럽게 $f(x)$는 $x>2$인 곳에서 실근을 갖는다.

꼭 두 점이 주어지지 않아도
이렇게 *$\infty$를 이용해 사잇값 정리를 증명할 수 있다*는 점 꼭 기억하자.

수특 원본 문제와는 사뭇 다르긴 하지만, $x \to \infty$를 이용하여 푸는 기출 문제가 존재한다.

**23** [2014년 9월 고3 문과 21번/4점]

**최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?**

> (가) $f(0) = -3$
> (나) 모든 양의 실수 $x$에 대하여
> $6x - 6 \le f(x) \le 2x^3 - 2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

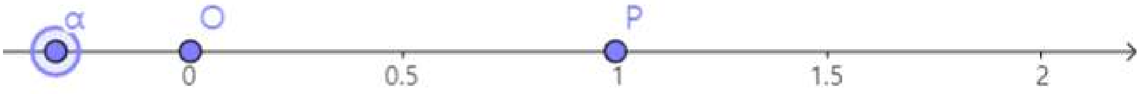
$f(x)$가 몇차식인지 주어지지 않았다.
하지만 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$만 봐도 $f(x)$는 최소 최고차항이 6이상인 일차 또는 최고차항이 2이하인 삼차라는 것을 알 수 있다.

만약 $f(x)$가 사차이거나 최고차항이 2보다 큰 삼차라면, $x \to \infty$에서 $f(x)$는 무조건 $2x^3-2$보다 커진다.
또한 만약 $f(x)$가 상수함수거나 최고차항이 6보다 작은 일차라면, $x \to -\infty$에서 $f(x)$는 무조건 $6x-6$보다 작아진다.

## 발상3 : 상황이 특정되지 않으면 케이스 분류를 해라

이 발상을 잘 활용하느냐에 따라 1등급과 2등급이 결정되기도 한다.
케이스 분류에 대한 거부감만 없어도 당신은 1등급을 맞을 자격이 있는 학생이라 확신할 수 있다.

ㄷ 선지 내용을 쉽게 바꿔 표현해보겠다.
“삼차함수 $f(x)$가 $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $\alpha<0$, $\beta>0$, $f(1)=0$를 만족시킨다.”
여기서 우리는 $\alpha$의 위치는 대략적으로 알 수 있다.




그러나 $\beta$는 위치가 특정되지 않는다.
1보다 큰 곳에 있는지, 작은 곳에 있는지, $\beta$가 1인지 알 수 없다.

이렇게 *상황이 특정되지 않을 때는 과감하게 케이스 분류를 하라*.

$0\le\beta<1$일 때, $\beta=1$일 때, $\beta>1$일 때로 분류해 다 해보면 된다.

상황이 특정되지 않아 풀이가 막혔을 때 많은 학생들은
“아, 내가 뭘 실수했나? 내가 뭘 모르고 있나?”를 생각한다.

하지만 대부분 케이스 분류하면 풀리는 문제다.

그러나 학생들은 케이스 분류를 하고 싶지 않아 주저한다.
그러면 평생 1등급은커녕 2등급도 힘들 수 있다.

*상황이 특정되지 않으면 케이스 분류를 해라*

**24** [2013년 6월 고3 문과 21번/4점]

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, $a$는 상수이다.)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

$a(3x-x^3)$의 최고차항 계수의 부호가 정해지지 않았다.
그러므로 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 케이스 분류해야 한다.

85p-LEVEL3 5번 문제

[23009-0156]

**5** 최고차항의 계수가 $-2$이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

(가) $\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$

(나) $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$

(다) $x\geq1$이면 $f(x)\leq0$이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

발상1 : 미지수 2개 이하 → 식 풀이 가능

$f(x)$는 최고차항 계수가 $-2$이고 $f(0)=0$ 즉 상수항이 0이기 때문에 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx$로 잡고 문제를 풀 수 있다.

단, 주의점 2개가 있다.

첫 번째

$f(x)=ax^2+bx^2+c$처럼 미지수가 3개 이상이면 식 풀이를 보류해라.

교육청 문제 해설지에서나 아주 가끔 미지수 3개를 잡는 풀이가 나오지,

평가원 문제에서 미지수 3개를 잡는 문제는 거의 없다.

두 번째

문제의 발문을 존중해라

2개 이하의 미지수로 식을 쓸 수 있다고 무조건 그렇게 푸는 게 아니다.

다음 장의 문제를 보자.

[2022년 11월 고3 22번/4점]

**최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.**

> (가) **모든 실수 $x$에 대하여**
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$**이다.**
>
> (나) **함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이다.**
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

이 문제도 위의 수특 문제처럼 $f(x)$의 최고차항 계수가 $1$이고, $f(0)=-3$ 즉 상수항의 계수가 주어졌기 때문에 $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$으로 식을 세울 수 있다.

하지만 이 문제는 이렇게 시작하면 망한다.

그 이유는 가나다 순서 때문이다. 가나다 문제는 가→나→다 순서를 잘 지켜야 한다.
(가)를 무시하고 맨 아래에 있는 (다)의 조건을 먼저 이용해버리는 것은 출제자가 원하는 풀이가 아니다.
출제자가 $f(0)=-3$을 (다)에 넣은 이유는 (가)와 (나)를 이용해 식을 작성한 후 마지막에 $f(0)=-3$을 대입하여 문제를 풀라는 뜻이다.

<u>*"항상 출제자의 발문을 존중하며 문제를 풀도록 하자."*</u>
이 태도는 너무 기본적인 태도라서 이 태도만 익히면 바로 2등급 떡상이다. 장담한다.

발상2 : 특이 조건은 풀이 단서다.

(나)를 보면 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$이라는 조건이 있다.

딱봐도 기함수가 의심가지 않는가?

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$와 같은 특이 조건들은 대부분 우연이 아니라 출제자가 문제에 심어둔 풀이 단서다.

$f(x) = -2x^3 + ax$라고 가정한 후 풀어 보면 된다.
모순이 생기지 않으면 안심하게 문제를 계속 풀면 된다.
이런 방법으로 문제를 풀면, 시험장에서 최소 한 문제는 더 풀 시간을 아낄 수 있다.

**25** [2015년 11월 고3 문과 20번/4점]

**두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여**

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

**를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여**

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

**일 때, $h(3)$의 값은?**

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$\int_{-3}^{3}$이므로 기함수 또는 우함수 적분 성질의 도움으로 계산을 살짝 간단하게 할 수 있다.

100p-LEVEL3 1번 문제

[23009-0181]

**1** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-|f(x)|$$

라 하고, 함수 $h(x)$를 $h(x)=\int_0^x g(t)dt$라 할 때, 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(0)=0$
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.

$f(1)=-1$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

발상1

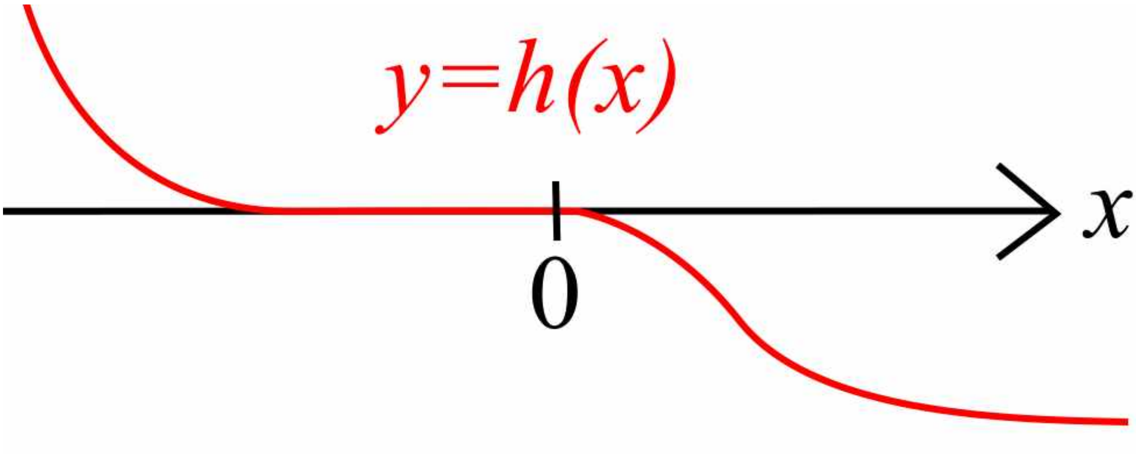
이 내용은 기출에서도 많이 나온 발상이다. 하지만 이 내용을 정리하는 사람은 거의 없다.
당신만은 이 내용을 정리하여 다른 학생들보다 한 발 더 앞서나가길 바란다.

(나) 조건을 보자
"방정식 $h(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다."
이 문장에서 가장 눈에 띄는 키워드는 무엇인가?
바로 "뿐"이라는 단어다.

왜냐하면 "뿐"이라는 키워드는 $h(x)=0$의 실근이 '단 한 개만' 존재한다는 것을 강조하기 때문이다.

그러므로 우리가 (나) 조건에서 얻을 수 있는 것은 두 가지다.
첫 째 '$h(0)=0$이다'
둘 째 '$x=0$이외의 다른 $h(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다'

이 문제는 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$를 케이스 분류로 알아내야 하는 문제다.
케이스 분류를 할 때 '$x=0$이외의 다른 $h(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다' 조건이 엄청난 활약을 한다. 다음 그림을 보자.




위의 그림은 $h(x)$의 케이스들 중 하나이다. 과연 이 케이스는 모순일까 아닐까?

답은 '모순'이다.
왜냐하면 $h(x)$의 실근이 $x=0$말고도 존재하기 때문이다.

*"~뿐", "~만", "오직 하나" 키워드들은 문제 풀이의 굉장한 단서가 될 수 있다*는 점 주의하자.

이것으로 수학2 수능특강 LEVEL3 발상총정리 1부가 끝났습니다.

ddorogi2@naver.com으로 50줄 이상 좋은 후기 보내주시면
바로 수학2 수능특강 LEVEL3 발상총정리 1부를 무료로 보내드립니다!

수능일까지 포기하지 마시고 꼭 열공하시길 바랍니다.

PDF에서 오류나 피드백, 원하시는 PDF 자료가
있으시다면 ddorogi2@naver.com으로 언제든지 보내주세요!