제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$\frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{2\cdot 2}$

$= 30$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

A와 B가 독립이므로,

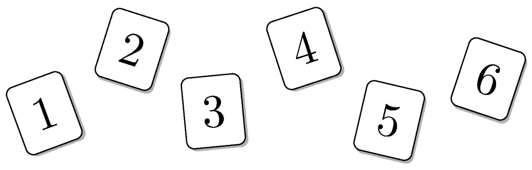
$P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$

$P(A^c) = 1-P(A) = 2P(A)$

$\therefore P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{3}{4}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{19}{30}$　③ $\frac{11}{15}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{14}{15}$



여사건.

양끝에 놓이는 숫자의 합이 10보다 큰 경우.
A라 하자.

(5, 6), (6, 5) 2가지이다.

$P(A) = \frac{{}_2P_2}{{}_6P_2} = \frac{1}{15}$

구하고자 하는 것은, $P(A^c)$이므로

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$= \frac{14}{15}$

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y = \begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$　② $\frac{13}{8}$　③ $\frac{27}{16}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{29}{16}$

Y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{{}_4C_0}{2^4}$	$\frac{{}_4C_1}{2^4}$	$1-\left(\frac{{}_4C_0+{}_4C_1}{24}\right)$

$\therefore E(Y) = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{4}{16} + 2\times\frac{11}{16}$

$= \frac{13}{8}$

27. 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

$X \sim N(m, 5^2)$

$\downarrow$ 표본 크기 49.

$\overline{X} \sim N(E(\overline{X}), (\frac{5}{7})^2)$

∴ 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간

$\Rightarrow \underbrace{m - 1.96 \times \frac{5}{7}}_{=a} \le m \le \underbrace{m + 1.96 \times \frac{5}{7}}_{\frac{6}{5}a}$

$\therefore \frac{a}{5} = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{7}$

한편 표본평균의 평균은 모평균이므로,

$\overline{x} = m = \frac{11}{10}a$ 가 성립한다.

$\therefore \overline{x} = \underbrace{(\cancel{2} \times 1.96 \times \frac{5}{7})}_{=\frac{a}{5}} \times \frac{11}{\cancel{2}}$

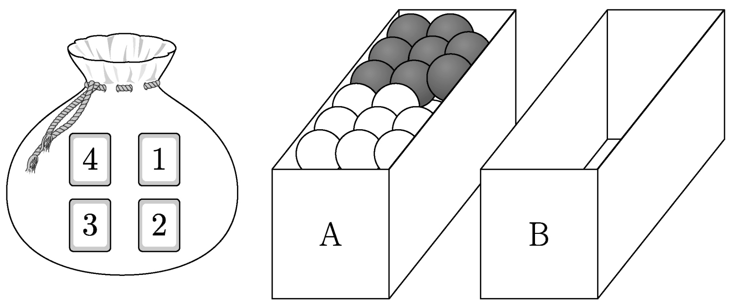
$= 15.4$

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



숫자 = 1인 사건 : X , $P(X) = \frac{1}{4}$
숫자 = 2or3인 사건 : Y , $P(Y) = \frac{2}{4}$ 이라 하자.
숫자 = 4인 사건 : Z , $P(Z) = \frac{1}{4}$

공의 개수가 8개가 되기 위해서는,

Y 4번 … (1)
or
Y 2번 + X, Z 1번 … (2) 이며,
or
X, Z 2번. … (3)

검은 공의 개수가 2인 것은 (3)의 경우뿐이다.

$$\frac{P_{(3)}}{P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}} = \frac{\cancel{(\frac{1}{4})^4} \cdot \frac{4!}{2!\,2!}}{\cancel{(\frac{1}{4})^4}\left\{2^4 + 2^2 \cdot \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!\,2!}\right\}}$$

$= \frac{3}{35}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> $a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

$C = n$이라 하면,

순서쌍 (a, b)를 택하는 경우의 수 : n^2

d를 택하는 경우의 수 : $7-n$

$\therefore \sum_{n=1}^{6} n^2(7-n) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2$

$= 637 - 441$

$= 196$

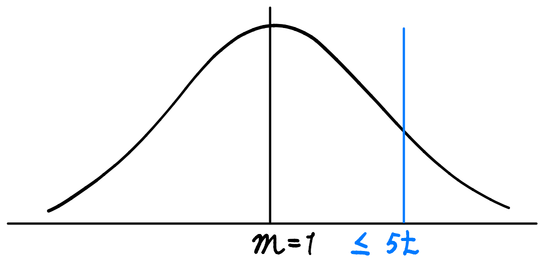
30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

$\approx$ 관찰이 필요한 문제.



$X \sim N(1, t^2)$

$P(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$

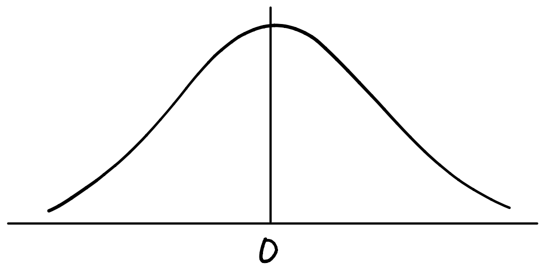
→ 구간 길이가 $2t$로 변수에 종속된 값.

+ 구간 중심 : t^2+1

→ 관찰하기에 어려움.

Then... How? 표준화!

표준화



$Z \sim N(0, 1^2)$

$P(t-1 \le Z \le t+1)$

→ 구간 길이가 2.

t값에 따라 바뀌지 않음.

+ 구간 중심 : t

→ 움직여가며 관찰.

$P(t-1 \le Z \le t+1)$의 값은 t가 0에 가까울수록 크다.

한편 $t \ge \frac{1}{5}$이므로, $t = \frac{1}{5}$일 때, 최댓값 $P(-0.8 \le Z \le 1.2)$를 갖는다.

$P(-0.8 \le Z \le 1.2) = P(0 \le Z \le 0.8) + P(0 \le Z \le 1.2)$

$= 0.673$

643