1. 삼각함수

- 삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

- 배각공식

① $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

③ $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

- 삼각 방 · 부등식

▣ 해를 구할 수 있다면 구하고, 구해지지 않으면 삼각함수 그래프의 대칭성과 주기성을 이용한다.

2. 미분 공식

- 삼각함수의 극한

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

③ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

▣ tip. 극한 계산에서, 빠른 계산을 위해 $\sin x$와 $\tan x$는 x로, $1-\cos x$는 $\dfrac{1}{2}x^2$로 바꿔서 생각할 수 있다.

- 지수 · 로그함수의 극한

① $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty & (a>1)\\ 0 & (0<a<1)\end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0 & (a>1)\\ \infty & (0<a<1)\end{cases}$

③ $\lim\limits_{x\to0+}\log_a x=\begin{cases}-\infty & (a>1)\\ \infty & (0<a<1)\end{cases}$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}\infty & (a>1)\\ -\infty & (0<a<1)\end{cases}$

- 극한값 e의 정의

① $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

▣ tip. $(1+0)^{\frac{1}{0}}$꼴을 먼저 만들어주고, $(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$꼴을 만들어 e에 지수가 붙은 꼴로 표현한다.

▣ tip. e는 약 2.718로, 값의 범위를 구하는 문제가 나올 수 있으니 대충 2.7로 알고 있자.

- 몫의 미분법

① $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

② $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

▣ tip. 몫의 미분법 문제에서 미분 후 먼저 약분을 해 식을 정리해준 뒤, 분모가 0인 경우를 조심하자. 분모가 0이면 그 지점에서 함수가 정의되지 않음.

- 합성함수 미분법

▣ 기본 논리

$y=f(t), t=g(x)$ 라 하면

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}f(t)=f'(t),\ \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}g(x)=g'(x)$

이때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고자 하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$이므로

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=f'(t)g'(x)$

이때 $t=g(x)$를 대입하면

$y'=f'(g(x))g'(x)$

▣ 결론 : 겉함수 미분하고 속함수 그대로, 곱하기 속함수 미분한거.
논리가 이해가 안 갈 수도 있는데, 잘 모르겠다면 매개변수 미분법이랑 음함수 미분법에 대한 이해가 아직 부족한 것. 논리에 대한 이해보다는 미분에 대한 규칙을 잘 지킬 수 있는지가 더 중요.

- 역함수 미분법

▣ 기본 논리

$f^{-1}=g$라는 식의 의미는 f, g는 역함수 관계라는 뜻이다.

$f(g(x))=x$ (역함수 관계니까)

$\dfrac{d}{dx}f(g(x))=\dfrac{d}{dx}x=1$ 에서 합성함수 미분법을 사용해주면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$\therefore f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)}$

▣ 기하학적 의미 (좌표평면 위에서...)

역함수 관계인 두 함수는 $y=x$라는 직선에 대해 서로 대칭이다.
그렇다면, $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 그은 접선 또한 $y=g(x)$위의 점 (b,a)에서 그은 접선과 대칭이다.
두 직선이 $y=x$에 대해 대칭이라는 것은 기울기의 곱이 1이라는 것과 같다.
따라서, 우리가 $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서의 미분계수를 알고 있다면, $y=g(x)$위의 점 (b,a)에서의 미분계수를 구할 수 있는 것이다.

▣ 주의할 점 : $f'(a)=0$이라면 $g'(b)$는 무한대 이므로 미분계수가 정의되지 않음!

– 매개변수 미분법

▣ 기본 논리

x, y, t에 대해

$f(t)=x$, $g(t)=y$이면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}f(t)}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

▣ 예시

t가 1월부터 12월, x가 월별 아이스크림 판매량, y가 월별로 상어에게 물려 사망하는 사람의 수라고 하자.

t와 x의 관계, t와 y의 관계는 각각 함수로 표현할 수 있을 것이다.

그런데, x와 y사이의 관계는 실생활에서 함수로 표현하기 쉽지 않을 것이다.

만약 어떤 사람이 x와 y사이의 관계, 즉 월별 아이스크림 판매량 변화에 따른 상어 사고 사망자 수 변화를 알고 싶다면?

비교적 구하기 쉬운 't 변화량에 따른 x 변화량'과 't 변화량에 따른 y 변화량' 사이의 관계로 대신 구해줄 수 있는 것이다.

▣ 결론

결국 매개변수 미분법은 공통적으로 사용하고 있는 변수가 존재할 때, 그 변수를 "매개로" 다른 변수 사이의 관계를 표현할 수 있다는 것이다.

– 삼각함수의 도함수

① $(\sin x)'=\cos x$ $\quad(\cos x)'=-\sin x$

② $(\tan x)'=\sec^2 x$ $\quad(\cot x)'=-\csc^2 x$

③ $(\sec x)'=\sec x\tan x$ $\quad(\csc x)'=-\csc x\cot x$

▣ 코 붙은건 미분하면 마이너스가 나오고, 시퀀트와 코시퀀트, 탄젠트와 코탄젠트는 미분한 꼴이 흡사하다.

– 지수 · 로그함수의 도함수

① $(a^x)'=a^x\ln a$ $\quad(e^x)'=e^x$

② $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $\quad(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

③ $(e^{f(x)})'=f'(x)e^{f(x)}$ $\quad(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

▣ 지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계인 것을 기억하자.

– 이계도함수

▣ 이계도함수란, 도함수를 한번 더 미분한 것. 도함수를 보고 원함수의 증감, 극점을 알 수 있듯이 이계도함수를 보고 도함수의 증감, 극점을 알 수 있다.

▣ 이계도함수에서 얻을 수 있는 정보

1) 이계도함수가 양수

도함수가 증가한다. -> 기울기가 증가한다. -> 아래로 볼록하다.

2) 이계도함수가 음수면

도함수가 감소한다. -> 기울기가 감소한다. -> 위로 볼록하다.

– 접선의 방정식

▣ tip. 두 점 사이의 기울기 공식=접점에서의 미분계수

점 (a,b)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기 구하기

$\dfrac{f(t)-b}{t-a}=f'(t)=m(\text{기울기})$ 사용

– 속도와 가속도

▣ 기본 논리

① 수2

수직선 위의 점 P가 시간에 따라 위치가 변할 때, 즉 수직선 위에서 운동할 때, 위치 x를 시간 t에 따른 함수 $f(t)$로 표현하자.

이때, 속도는 위치를 시간으로 미분한 것과 같으므로

속도 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}f(t)=f'(t)$가 성립한다.

속력은 속도의 절댓값이므로 $|v(t)|$이다.

② 미적분

좌표평면 위의 점 P가 시간에 따라 위치가 변할때, 즉 좌표평면 위에서 운동할 때, 위치 $(x,\ y)$를 시간 t에 따른 점 $(f(t),\ g(t))$로 표현하자.

이때, 속도는 위치를 시간으로 미분한 것과 같으므로

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}f(t)=f'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}g(t)=g'(t)$가 성립한다.

따라서 속도는 $(f'(t),\ g'(t))$이다.

속력은 벡터합이므로 $\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$이다.

3. 적분 공식

– 부정적분의 미분

① $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x) \Leftrightarrow F(x)=\int f(x)dx$

② $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

③ $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

– 부정적분의 계산

① $\int dx=x+C$

② $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n\neq-1)$

③ $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

④ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

⑤ $\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

⑥ $\int(ax+b)^n dx=\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{a}(ax+b)^{n+1}+C$

⑦ $\int f(x)^n f'(x)dx=\dfrac{1}{n+1}f(x)^{n+1}+C$

⑧ $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

▣ tip. 어떻게 하면 미분해서 인테그랄 속에 있는 식이 나올지를 생각하는 연습을 하면, 위 적분들을 자유자재로 쓸 수 있다.

– 삼각함수의 부정적분

① $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$

② $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

③ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

▣ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

– 지수함수의 부정적분

① $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

② $\int e^x dx = e^x + C$

– 치환 적분법

▣ 기본 논리

$x = g(t)$일 때

$\int f(g(t))g'(t)dt$ 에서 $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}g(t) = g'(t)$ 이므로

$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)dx$

▣ 치환 적분법은 복잡한 식의 적분꼴을 찾아내기 위한 도구일 뿐이다. 결국 핵심은 어떤 합성함수를 미분해야 적분 기호 안의 식이 되는지를 유추해 내는 능력. 그 능력이 길러진다면 치환적분이라는 도구를 사용하지 않아도 복잡한 식의 적분을 할 수 있다.

– 부분 적분법

▣ 기본 논리

부분 적분법은 곱미분의 역연산과 같다.

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

– 정적분의 치환 적분법

$x = g(t)$이고 $a = g(\alpha),\ b = g(\beta)$일 때,

$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ 가 성립한다.

▣ tip. 정적분의 치환 적분을 할 때에는 꼭 $x = g(t)$와 $dx = g(t)dt$를 써둔 뒤 문제에 있는 적분식에 대입한다.

– 정적분과 무한급수

▣ 기본 논리 - 구분구적법

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$

해석 : 그래프 밑부분의 넓이는 a에서부터 b까지 함수 $f(x)$를 정적분한 것과 같다.

▣ 기본 논리 - 함숫값의 차

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

해석 : $f'(x)$을 x에서의 순간변화율, dx를 단위 x값이라 하면 $f'(x)dx$는 순간변화량으로 생각할 수 있다. 그렇다면 구간 $[a,\ b]$에서 $f'(x)dx$를 모두 더해주면 구간에서 $f(x)$값의 총 변화량이라고 생각할 수 있다.

– 변위와 이동거리

▣ 변위 - 기본 논리

위치를 미분한 것은 속도와 같다.

$v(t)$를 시간 t에 따른 속도, $x(t)$를 시간 t에 따른 위치라고 하면 t가 a에서 b까지 변할 때 위치의 변화량, 즉 변위는 다음과 같다.

$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$

▣ 이동거리 - 기본 논리

① 1차원 수직선 위에서

수직선 위를 운동하는 점의 속력은 속도의 절댓값과 같다.

따라서 속력은 $|v(t)|$로 표현할 수 있으므로 이동거리는

$\int_a^b |v(t)|dt$와 같다.

② 2차원 평면 위에서

2차원 평면 위를 운동하는 점의 속력은 다음과 같이 구한다.

x축 방향 속도를 $v_x(t)$, y축 방향 속도를 $v_y(t)$라 하면 속력은

$\sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2}$ 로 표현할 수 있으므로 이동거리는

$\int_a^b \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2}dt$와 같다.

▣ 곡선의 길이 - 기본 논리

곡선의 길이를 구하는 기본적인 아이디어는 곡선을 타고 어떤 점이 이동한다고 생각하는 것이다. 이 점이 시간에 따라서 움직이는 것이 아닌, x값이 일정하게 증가하며 곡선 위를 움직인다고 생각하면 x와 y를 x값의 변화에 따른 함수로 표현할 수 있다. 말이 조금 이상할 수도 있다.

$x = x, \quad y = f(x)$라 하면 $\frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$이므로

곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx$