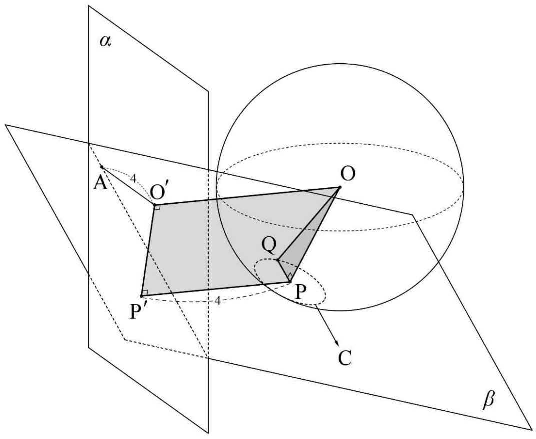
30. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 구의 중심 O에서 평면 α, 평면 β까지의 거리는 각각 5, 3이고, 평면 β와 구가 만나 생기는 원 C의 중심은 P이다. 평면 α와 평면 β의 교선 위에 점 A, 원 C 위에 점 Q를 잡고, 두 점 O, P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 O$'$, P$'$이라 하면 네 점은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PP'}} = \overline{\mathrm{O'A}} = 4$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$

평면 OPP$'$O$'$과 평면 OPQ가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



이면각의 정의와 직선과 평면의 수직조건을 아주 논리적으로 사용해야 하는 문제입니다.
눈으로 보이는 대로 판단하지 않고 논리로 판단하셔야 합니다.

(나)조건을 해석하기 위해 보조선으로 $\overline{\mathrm{AO}}$를 긋고 나면 $\triangle$OPQ, $\triangle$APO와 $\triangle$OPP$'$Q$'$이 모두 $\overline{\mathrm{OP}}$를 교선으로 공유한다는 것을 알 수 있습니다. 따라서

평면 OPP$'$O$'$와 평면 OPQ의 사잇각(θ)=평면 OPQ와 평면 APO의 사잇각(θ_1)+평면 APO와 평면 OPP$'$O$'$의 사잇각 (θ_2)

또, $\overline{\mathrm{OP}}$가 평면 β에 수직이므로, $\overline{\mathrm{OP}}$는 평면 β 위의 모든 직선과 수직입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$입니다. 이면각의 정의에 따라 교선인 직선 OP에 수직인 두 직선 AP, PQ가 이루는 각이 θ_1입니다.
여기서, (나)의 조건 $\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$을 이용하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{OP}},\ \overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{AO}} \Rightarrow \overline{\mathrm{PQ}}\text{는 평면 APO와 수직}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{AP}}\text{이므로 } \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

((나)조건을 벡터의 분해를 이용하면 삼수선의 정의 없이도 풀이를 진행할 수 있습니다.)

다음으로 θ_2로 가능한 것을 찾기 위해서는 $\overline{\mathrm{OP}}$에 수직인 평면 OPP′O′ 위의 직선을 찾아야 합니다. 이를 위해 점 A의 평면 OPP′O′ 위로의 정사영을 알아봅시다.
아직 사용하지 않은 길이 조건을 찾아보면

$$\overline{\mathrm{OO'}}\text{와 } \overline{\mathrm{PP'}}\text{는 평행이고 } \overline{\mathrm{OO'}}=5,\ \overline{\mathrm{PP'}}=4\text{이므로 } \overline{\mathrm{O'P'}}=2\sqrt{2}$$
$$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{41},\ \overline{\mathrm{OP}}=3\text{이고 } \overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{PO}}\text{이므로 } \overline{\mathrm{AP}}=4\sqrt{2}$$
$$\overline{\mathrm{AP}}=4\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{PP'}}=4\text{고 } \overline{\mathrm{AP'}}\perp\overline{\mathrm{PP'}}\text{이므로 } \overline{\mathrm{AP'}}=4$$

임을 알 수 있습니다. 여기서 $\overline{\mathrm{AP'}}=\overline{\mathrm{AO'}}=4$이므로 $\triangle\mathrm{AP'O'}$은 이등변삼각형이고,
이등변삼각형의 성질에 따라, $\overline{\mathrm{P'O'}}$의 중점을 A′이라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}}\perp\overline{\mathrm{O'P'}}$, $\overline{\mathrm{AA'}}\perp\overline{\mathrm{PP'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}}$는 평면 OPP′O′와 수직입니다. 그러므로 앞에서 말했던 점 A의 평면 OPP′O′ 위로의 정사영은 A′이 됩니다.

$$\overline{\mathrm{AP}}=4\sqrt{2}\text{이고 } \overline{\mathrm{A'P}}=3\sqrt{2}\,(\text{직각삼각형})\text{이므로 } \cos\theta_2=\frac{3}{4}$$
$$\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_2\right)=-\frac{\sqrt{7}}{4},\ \cos^2\theta=\frac{7}{16}=\frac{q}{p}$$
$$p+q=23$$