수학 영역

제 2 교시

KSM

5지선다형

1. 두 다항식

$$A=2x^2+3y^2-2,\ B=x^2-y^2$$

에 대하여 $A-B$는? [2점]

① $-x^2+y^2-2$ ② $-x^2+4y^2$ ③ x^2+y^2
④ x^2+y^2+2 ⑤ x^2+4y^2-2

2. 두 집합

$$A=\{1,\ 4\},\ B=\{1,\ 2,\ a\}$$

에 대하여 $A \subset B$가 되도록 하는 상수 a의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}$

4. 연립부등식

$$\begin{cases} 3x \ge 2x+3 \\ x-10 \le -x \end{cases}$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$\begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 5 \end{cases}$

$3 \le x \le 5$

$3+4+5=12$

5. 좌표평면에서 원 $(x-a)^2+(y+4)^2=16$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 도형이 원 $(x-8)^2+(y-b)^2=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$(a,-4) \xrightarrow[y:5]{x:2} (a+2,\ 1)$

$(a+2,\ 1) = (8,\ b)$

$a=6$
$b=1$
$a+b=7$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ g)(x)=3x-1$일 때, $((f\circ g)\circ g)(a)=a$를 만족시키는 실수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

$f(g(g(a)))=a$
$f(3a-1)=a$
$2(3a-1)+1=a$
$6a-1=a,\ a=\frac{1}{5}$

7. 좌표평면 위의 세 점 A$(5,1)$, B$(-1,4)$, C(a,b)에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표와 선분 AC를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표가 서로 같을 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\left(\frac{-2+5}{2+1},\ \frac{8+1}{2+1}\right)=\left(\frac{2a-5}{2-1},\ \frac{2b-1}{2-1}\right)$

$(1,3)=(2a-5,\ 2b-1)$

$a=3,\ b=2$

8. 실수부분이 1인 복소수 z에 대하여 $\dfrac{z}{2+i}+\dfrac{\overline{z}}{2-i}=2$일 때, $z\overline{z}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

$z=1+bi$

$\overline{z}=1-bi$

$\dfrac{2z-zi+2\overline{z}+\overline{z}i}{5}=2$

$z+\overline{z}=2$

$z-\overline{z}=2bi$

$2(z+\overline{z})-i(z-\overline{z})=10$

$4+2b=10,\ b=3$

$z\overline{z}=1+b^2=10$

9. 좌표평면 위에 두 점 A$(2, 4)$, B$(5, 1)$이 있다. 직선 $y=-x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $4\sqrt{2}$

$P(a,-a)$　$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$(a-2)^2+(a+4)^2=(a-5)^2+(a+1)^2$

$4a+20=-8a+26$

$a=\frac{1}{2},\ P(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ \overline{OP}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

10. 다항식 $(x^2+4)^2-3x(x^2+4)-4x^2$이 $(x+a)^2(x^2+bx+c)$로 인수분해될 때, 세 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? [3점]

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

$x^2+4=A,$　$A^2-3xA-4x^2$

$A \quad -4x$

$A \quad x$

$(A-4x)(A+x)=(x^2+4-4x)(x^2+4+x)$

$=(x-2)^2(x^2+x+4)$

$a=-2,\ b=1,\ c=4$

$a+b+c=3$

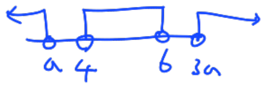
11. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} |x-5| < 1 \\ x^2 - 4ax + 3a^2 > 0 \end{cases}$$

이 해를 갖지 않도록 하는 자연수 a의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\begin{cases} -1 < x-5 < 1 \\ (x-a)(x-3a) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 < x < 6 \\ x < a,\ x > 3a \end{cases}$

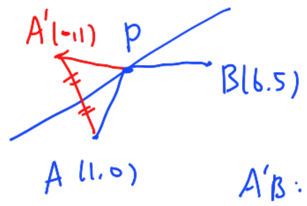


$\begin{cases} a \le 4 \\ 6 \le 3a \end{cases}$ $2 \le a \le 4$

$a = 2, 3, 4$ 3개

12. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(6, 5)$와 직선 $y = x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 $\mathrm{P_0}$이라 하자. 직선 $\mathrm{AP_0}$을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(9, a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8



$A'B : y = \frac{2}{3}x + 1$

$\frac{2}{3}x + 1 = x$, $x = 3$

$P_0(3,3)$

$AP_0 : y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$y=x$ 대칭

$x = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}$ $(9, a)$

$9 = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}a = \frac{21}{2}$

$a = 7$

13. 실수 x에 대한 두 조건

$p : (x+1)(x+2)(x-3)=0,$

$q : x^2+kx+k-1=0$ $(x+k-1)(x+1)=0$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은? [3점]

① -18 ② -16 ③ -14 ④ -12 ⑤ -10

$P=\{-1,-2,3\}$

$Q=\{-1,1-k\}$ $1-k=-1,-2,3$

$k=2,3,-2$

$2\times3\times(-2)=-12$

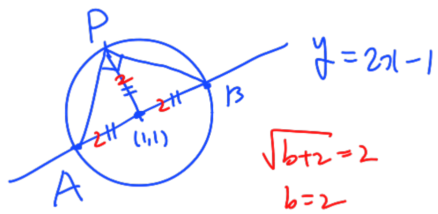
14. 원 $C : x^2+y^2-2x-ay-b=0$에 대하여 좌표평면에서 원 C의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있다. 원 C와 직선 $y=2x-1$이 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 4일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(x-1)^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}+b+1$

$(1,\frac{a}{2}) \to y=2x-1$ $\frac{a}{2}=1$, $a=2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=b+2$, $r=\sqrt{b+2}$



$\sqrt{b+2}=2$

$b=2$

$a+b=2+2=4$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 역함수를 갖는다. 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f^{-1}(x),\ f(x^2+1)=-2x^2+1$$

일 때, $f(-2)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$f(-2)=f^{-1}(-2)=k$

$f(k)=-2$

$-2x^2+1=-2$

$x^2=\frac{3}{2}$

$f(x^2+1)=-2x^2+1$

$x^2=\frac{3}{2} \to f\left(\frac{5}{2}\right)=-2 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

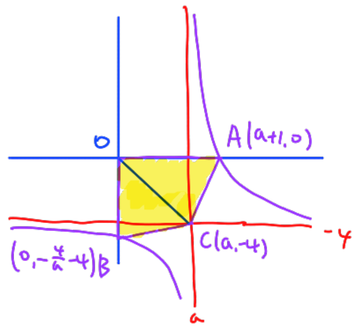
16. 유리함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}-4\,(a>1)$에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OBCA의 넓이가 24일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$a>1$

$\left(0, -\frac{4}{a}-4\right)$

⊖



$S=\triangle OAC+\triangle OBC$

$=\frac{1}{2}(a+1)\times 4+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a}+4\right)a$

$=2a+2+2+2a$

$=4a+4=24,\ a=5$

17. 양수 k에 대하여 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+k+3$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 서로 다른 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$에서 만난다. $\alpha \le x \le \beta$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 10일 때, $\alpha \le x \le \beta$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, $\alpha < \beta$) [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$-(x-2)^2+k+7$

$k+7=10,\ k=3$

$-x^2+4x+6=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$x=-1,\ 3$　$\alpha=-1$　$\beta=3$

최소 ⇒ $f(-1)=-9+10=1$

18. 다항식 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 상수 k
>
> 다항식 $f(x)+g(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지와
> 다항식 $f(x)+g(x)$를 x^2+2x-2로 나누었을 때의 나머지가
> $\underbrace{x^2+2x-\frac{1}{2}f(x)}_{=k}$로 같다.　$f(x)=2x^2+4x-2k$

$g(1)=7$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

$f(x)+g(x)=xQ(x)+k$

$f(x)+g(x)=(x^2+2x-2)Q_1(x)+k$

$\underbrace{f(x)+g(x)-k}_{3차}=x(x^2+2x-2)$

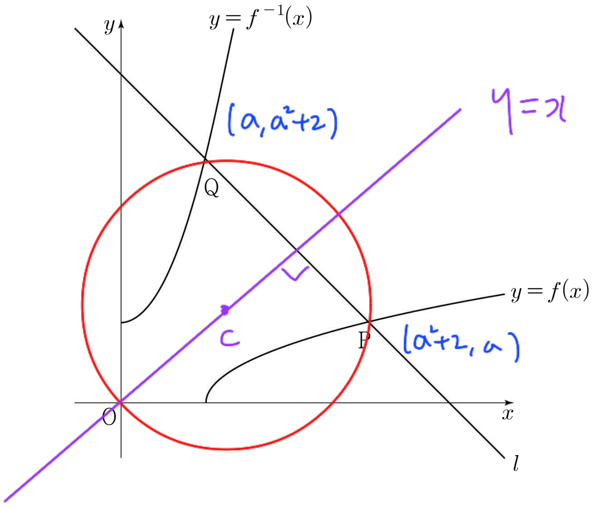
$f(1)=6-2k,\ g(1)=7$

$f(1)+g(1)-k=1$

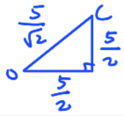
$6-2k+7-k=1,\ k=4$

$\therefore f(3)=18+12-8=22$

19. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 기울기가 -1인 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 점 P에서 만나고 직선 l이 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 점 Q에서 만난다.



다음은 삼각형 OPQ의 외접원의 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$일 때, 점 P의 y좌표를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

점 P의 y좌표를 $a(a\geq 0)$이라 하면 점 P의 좌표는 $(\boxed{(가)}, a)$이다. a^2+2 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고 두 직선 l과 $y=x$는 서로 수직이므로 두 점 P와 Q는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다. 그러므로 삼각형 OPQ의 외접원의 중심을 C라 하면 점 C는 직선 $y=x$ 위에 있다. 삼각형 OPQ의 외접원의 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$일 때, $\pi r^2=\frac{25}{2}\pi$ 점 C의 좌표는 $(\boxed{(나)}\frac{5}{2}, \boxed{(나)}\frac{5}{2})$이고, $r=\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\overline{CP}=\overline{CO}$에서 $a=\boxed{(다)}$ 2 따라서 점 P의 y좌표는 $\boxed{(다)}$ 2이다. 

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(a)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 m, n이라 할 때, $m+g(n)$의 값은? [4점]

① 8 ② $\frac{33}{4}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{35}{4}$ ⑤ 9

$C\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ $\overline{CP}=\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$a^4-5a+\frac{13}{2}=\frac{25}{2}$, $a^4-5a-6=0$

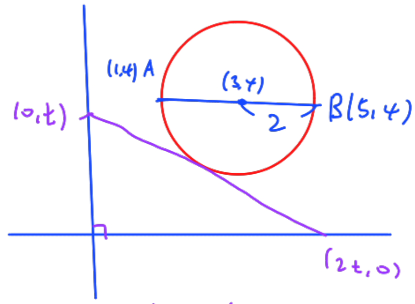
$(a+1)(a^3-a^2+a-6)=0$

$(a+1)(a-2)(a^2+a+3)=0$, $a=2$

$\frac{5}{2}+g(2)=\frac{5}{2}+6=\frac{17}{2}$

20. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(5,4)$, $\mathrm{C}(2t,0)$, $\mathrm{D}(0,t)$가 있다. 선분 CD 위에 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$인 점 P가 존재하도록 하는 t의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



$y=-\frac{1}{2}x+t$ $x+2y-2t=0$

$(3,4)$ ~ $x+2y-2t=0$

$\frac{|11-2t|}{\sqrt{5}}=2$

$|2t-11|=2\sqrt{5}$

$2t-11=2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}$

$t=\sqrt{5}+\frac{11}{2}, -\sqrt{5}+\frac{11}{2}$

M m

$M-m=2\sqrt{5}$

21. $n(U)=5$인 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$$n(B\cap C)=2,\ n(B-A)=1,\ n(C-A)=2$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

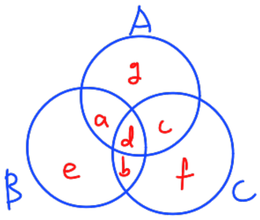
〈 보 기 〉

ㄱ. $n(A\cap B\cap C)\neq 0$

ㄴ. $n(A\cap B\cap C)=2$이면 $n(C)=4$이다.

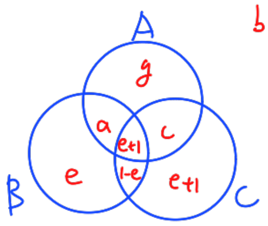
ㄷ. $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은 42이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$b+d=2$
$b+e=1$
$b+f=2$
$d-e=1$
$f-e=1$

$d=f=e+1$
$b=1-e$



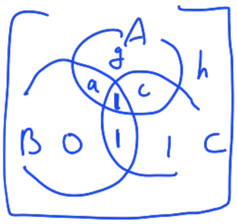
$n(B\cap C)=2$

ㄱ. $e+1\neq 0$ $(\because e\geq 0)$

ㄴ. $e+1=2\rightarrow e=1$, $d=2$, $f=2$ $a=b=c=0$, $n(C)=4$

ㄷ. $e=0$ or $e=1$

$e=0$



$e=1$

$n(A)\times n(B)\times n(C)=2\times3\times4$
$=24$

$n(A)\times n(B)\times n(C)$

최대 → $a+c=2$
2 0 → $3\times4\times3=36$
1 1 → $3\times3\times4=36$
0 2 → $3\times2\times5=30$

최소 → $h=2$ → $1\times2\times3=6$

$M=36$
$m=6$
$M+m=42$

단답형

22. x에 대한 이차방정식 $x^2+10x+a=0$이 중근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{25}$

23. 다항식 x^3+ax^2-7을 $x-2$로 나눈 나머지가 17일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$2\rightarrow 8+4a-7=17$

$4a=16$, $a=4$

24. 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x^2-3xy+2y^2=6 \end{cases}$$

의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$(x-y)(x-2y)=6$

$3 \quad 2$

$x-2y=2$

$-\underline{x-y=3}$

$-y=-1$, $y=1=\beta$

$x=4=\alpha$

25. 정수 k에 대한 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{9}$

p : 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이다. q : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이다.

$p: D/4 = k^2-4k-5<0$

$-1<k<5$

$q: \quad k-2\geq 0, \quad k\geq 2$

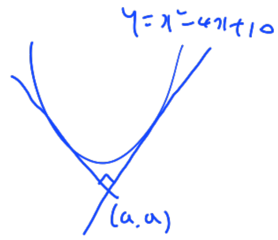
$2\leq k<5$

$k=2,3,4$

$2+3+4=9$

26. 좌표평면에서 점 (a, a)를 지나고 곡선 $y=x^2-4x+10$에 접하는 두 직선이 서로 수직일 때, 이 두 직선의 기울기의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{15}$



$y=m(x-a)+a$, $x^2-4x+10=mx-ma+a$

$x^2-(4+m)x+10+ma-a=0$

$D=m^2+8m+16-40-4ma+4a=0$

$m^2+(8-4a)m+4a-24=0$

$m_1m_2=4a-24=-1$, $4a=23$

$m_1+m_2=(4a-8)=15$

27. 삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\{\omega(\overline{\omega}-1)\}^n=256$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.) [4점]

$\boxed{16}$

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$

근: ω $\quad \omega^2-2\omega+2=0$

$\omega\overline{\omega}=2$ $\quad \omega^2=2\omega-2$

$\omega^3=2\omega^2-2\omega=2\omega-4$

$\omega^4=2\omega^2-4\omega=-4=\overline{\omega}^4$

$\overline{\omega}^2=2\overline{\omega}-2$, $\overline{\omega}-1=\frac{1}{2}\overline{\omega}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\omega}\right)^2=\frac{2}{\omega^2}$

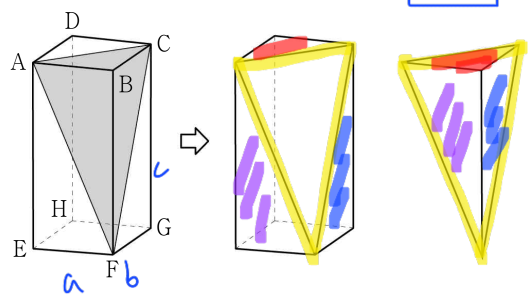
$\omega(\overline{\omega}-1)=\omega\cdot\frac{2}{\omega^2}=\frac{2}{\omega}=\overline{\omega}$

$\therefore \left(\frac{2}{\omega}\right)^n=\overline{\omega}^n=256=(-4)^4$

$\overline{\omega}^4=-4$, $\overline{\omega}^{16}=(-4)^4$ $\quad n=16$

28. 그림과 같이 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 단면 AFC가 생기도록 사면체 F$-$ABC를 잘라내었다. 입체도형 ACD$-$EFGH의 모든 모서리의 길이의 합을 l_1, 겉넓이를 S_1이라 하고, 사면체 F$-$ABC의 모든 모서리의 길이의 합을 l_2, 겉넓이를 S_2라 하자. $l_1-l_2=28$, $S_1-S_2=61$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CF}}^2+\overline{\mathrm{FA}}^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{148}$



$l_1-l_2=(3a+3b+3c+\triangledown)-(a+b+c+\triangledown)$

$=2a+2b+2c=28$

$\therefore a+b+c=14$

$S_1-S_2=ab+bc+ca=61$

$\therefore AC^2+CF^2+FA^2=2(a^2+b^2+c^2)=2(14^2-2\cdot61)$

$=148$

29. 집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $\{f(x)+x^2-5\}\times\{f(x)+4x\}=0$이다.
> (나) $f(0)\times f(1)\times f(2)<0$

$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)=-x^2+5$ or $f(x)=-4x$ $\boxed{26}$

$-3\to-4$ $-3\to12$
$-2\to1$ $-2\to8$
$-1\to4$ $-1\to4$ $\to f(-1)=4$
$0\to5$ $0\to0\ (\times)$
$1\to4$ $1\to-4$
$2\to1$ $2\to-8$

(나) $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$
5 4 -8 $\to f(-1)=4$ 이므로 $f(1)\neq4$
-4 1

$\therefore$ $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(-1)$ $f(-3)$ $f(-2)$
5 -4 1 4 12 8
$(\because)\ f(-3)\neq-4$ $(\because)\ f(2)\neq1$

$\therefore\ 5-4+1+4+12+8=26$

30. 양수 m에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

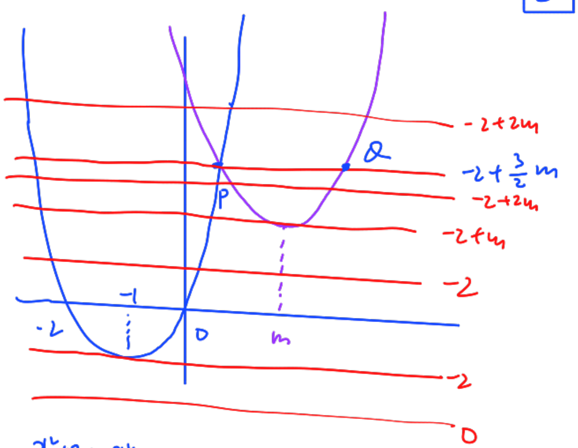
$$f(x)=x^2+2x,\ g(x)=(x-m)^2+m$$

이다. 실수 $t(t>-1)$에 대하여 집합

$$\{x\,|\,f(x)=t \text{ 또는 } g(x)=t,\ x\text{는 실수}\}$$

의 모든 원소의 합을 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$의 치역의 모든 원소의 합이 19일 때, m의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{6}$



$x^2+2x=x^2-2mx+m^2+m$

$2(m+1)x=m(m+1)$

$x=\frac{m}{2}$ $P\left(\frac{m}{2},\ \frac{m^2}{4}+m\right)$

$(x-m)^2+m=\frac{m^2}{4}+m$, $x-m=\pm\frac{m}{2}$

$x=\frac{m}{2},\ \frac{3}{2}m$ $Q\left(\frac{3}{2}m,\ \frac{m^2}{4}+m\right)$

$h(t)=0+(-2)+(-2+m)+(-2+2m)+(-2+\frac{3}{2}m)$

$=-8+\frac{9}{2}m=19$, $\frac{9}{2}m=27$, $m=6$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.