2016학년도 KUME FINAL 모의평가
정답 및 해설 (B형)

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	⑤	2	①	3	④	4	④	5	⑤
6	③	7	①	8	③	9	③	10	①
11	②	12	②	13	③	14	⑤	15	①
16	②	17	③	18	⑤	19	②	20	②
21	①	22	18	23	9	24	20	25	5
26	66	27	32	28	8	29	20	30	7

14) 정답 ⑤

$p=\frac{k}{100}$, $q=1-\frac{k}{100}$ 이고 신뢰구간의 길이가 0.112 이므로 $\sqrt{\frac{pq}{n}}\times 1.96\times 2=0.112$ 이다.

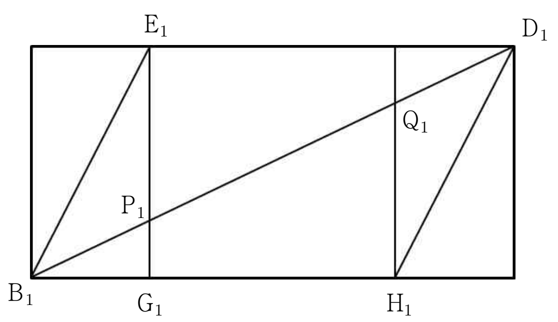
식을 정리하면 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\frac{1}{35}$ 이다.

$n=4.9k=490p$ 를 식에 대입하여 정리하면

$\frac{1-p}{490}=\frac{1}{35^2}$ 이고 $p=\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $k=60$

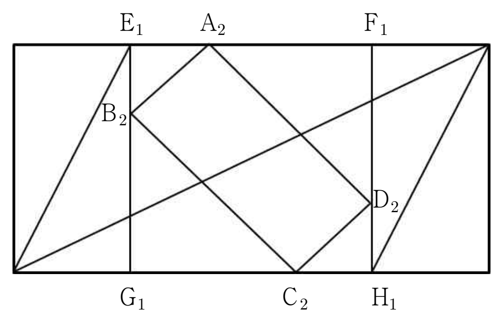
15) 정답 ①



삼각형 $E_1P_1D_1$ 과 삼각형 $G_1P_1B_1$ 은 $3:1$ 닮음이므로 $\overline{E_1P_1}:\overline{P_1G_1}=3:1$ 이다. $\overline{E_1G_1}=2$ 이므로 $\overline{E_1P_1}=\frac{3}{2}$ 이다.

삼각형 $E_1B_1P_1$ 은 밑변의 길이가 $\frac{3}{2}$이고 높이가 1인 삼각형 이므로 넓이는 $\frac{3}{4}$이다. 삼각형 $Q_1D_1H_1$ 도 삼각형 $E_1B_1P_1$ 과 합동이므로 R_1에 색칠된 두 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

∴ $S_1=\frac{3}{2}$



두 번 째 직사각형의 넓이 한 변의 길이를 구해보자.

$\overline{G_1C_2}=a$ 라고 하면 $\overline{C_2H_1}=2-a$ 이다.

삼각형 $B_2G_1C_2$ 와 삼각형 $C_2H_1D_2$ 는 $2:1$ 닮음 이므로

$\overline{B_2G_1}=\overline{C_2H_1}\times 2=4-2a$ 이고

$\overline{D_2H_1}=\frac{a}{2}$ 인데 $\overline{B_2E_1}=\overline{D_2H_1}$ 이므로 $\overline{B_2E_1}=\frac{a}{2}$ 이다.

$2=\overline{E_1G_1}=\overline{B_2G_1}+\overline{B_2E_1}=4-\frac{3}{2}a$ 이므로

$a=\frac{4}{3}$ 이고 $\overline{C_2D_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

따라서 닮음비는 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 이고 공비는 $\frac{2}{9}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{27}{14}$$

16) 정답 ②

세 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우는

검-검-검
검-흰-검
흰-검-검
흰-흰-검

이렇게 총 네 가지의 경우가 있다. 각 경우의 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$
$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$
$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$
$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{15}$

이므로, 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공일 때, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{2}{5}$$

이다.

17) 정답 ③

$S_n+na_n=2(n-1)(n+2)$ $(n\geq 2)$ 에서
$S_{n+1}+(n+1)a_{n+1}=2n(n+3)$ 이므로
$S_{n+1}-S_n+(n+1)a_{n+1}-na_n=\boxed{4(n+1)}$
∴ $\boxed{(가)}=4(n+1)$
이다. 식을 정리하면
$(n+2)a_{n+1}-na_n=\boxed{4(n+1)}$ $(n\geq 2)$
이다.
양변에 $(n+1)$ 을 곱해주면,
$(n+1)(n+2)a_{n+1}-n(n+1)a_n=(n+1)\times\boxed{4(n+1)}$이다.
$b_n=(n+1)\times\boxed{4(n+1)}$이라 하면
$n(n+1)a_n=6a_2+\sum_{k=2}^{n-1}b_k=20+4\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2$
$(\because a_2=\frac{10}{3})=20+4\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}-20$
∴ $=k^2$
$=4\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}=\boxed{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}$
$(n\geq 3)$ ∴ $=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
$n=2$ 일 때에도 이 식을 만족시키므로
$a_n=\frac{2}{3}(2n+1)$ $(n\geq 2)$ 이다.

18) 정답 ⑤

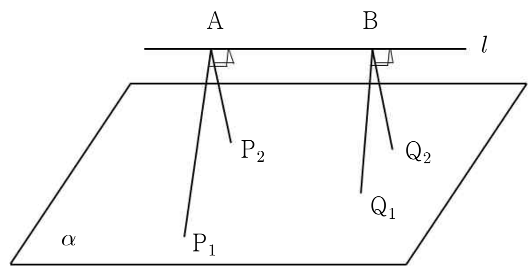
ㄱ. 첫 번째 식에서 $AB=-B$이므로 두 번째식에 대입하면 $A+B=E$이다. $AB=BA$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $B-E=-A$ 이므로 A의 역행렬이 존재하면 $B-E$의 역행렬이 존재한다. 그런데 두 번째 식에서 A로 묶어내면 $A(AB+2B-E)=-E$ 이므로 A의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A+B=E$를 한 문자로 정리하여 첫 번째식에 다시 대입하면 $A^2=E$이고 $B^2=2B$이다.

$(A-B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$
$=(A+B)(A-B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)=A^8-B^8$
$=E-128B$ (참)

19) 정답 ②

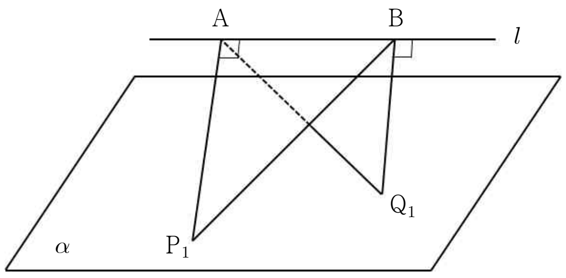


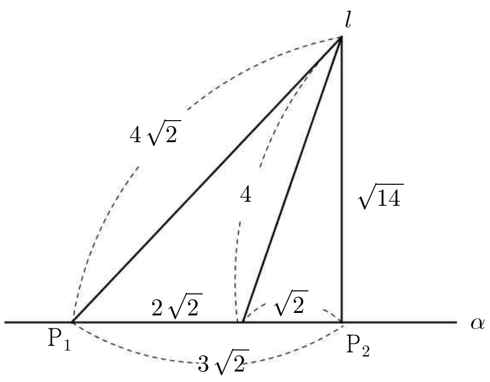
$\overline{AP}=4\sqrt{2}$ 인 점 P는 평면 α위에 두 개 존재하고, 마찬가지로 $\overline{BQ}=4$를 만족하는 점 Q도 평면 α위에 두 개 존재한다. 각 점을 P_1, P_2, Q_1, Q_2라고 하자.

삼각형 ABP의 넓이는 항상 $8\sqrt{2}$ 이므로 평면 ABP와 평면 ABQ가 이루는 이면각을 알면 정사영의 넓이를 구할 수 있다. 따라서 이면각의 크기에 따라 정사영의 넓이의 값이 달라진다.

두 평면의 위치관계는 다음과 같이 크게 두 가지 경우로 나누어 볼 수 있다.

① 점 P가 $\mathrm{P_1}$에 위치하고 점 Q가 $\mathrm{Q_1}$에 위치할 때





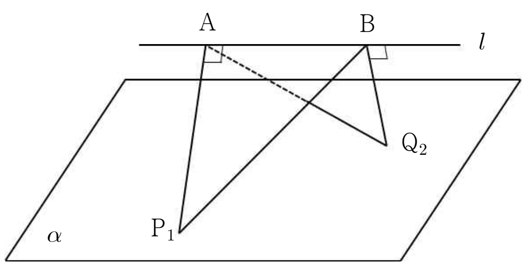
이면각의 크기를 θ_1라고 하면

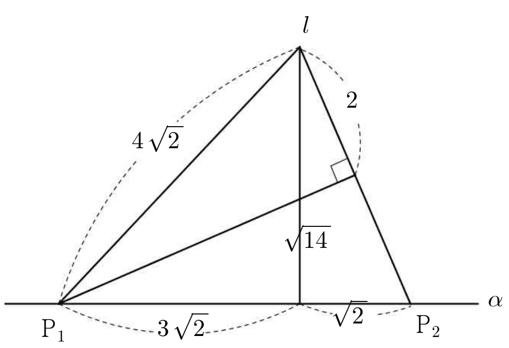
$\cos\theta_1 = \dfrac{4^2+(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4\sqrt{2}} = \dfrac{5}{4\sqrt{2}}$ 이다.

($\because$ 제 2코사인 정리)

따라서 $S_1 = 8\sqrt{2}\times\cos\theta_1 = 10$ 이다.

② 점 P가 $\mathrm{P_1}$에 점 P가 $\mathrm{Q_2}$에 있을 때





이면각의 크기를 θ_2라고 하면

$\cos\theta_2 = \dfrac{2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 이다.

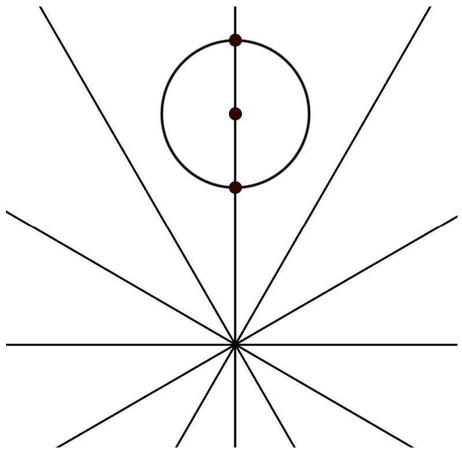
따라서 $S_2 = 8\sqrt{2}\times\cos\theta_2 = 4$ 이다.

$\therefore$ 서로 다른 a값의 합은 14

20) 정답 ②

주어진 일차변환은 시계 반대방향으로 30° 만큼 회전하는 회전변환이다.

점 $\mathrm{A}(0,1)$를 30° 만큼씩 계속 회전하면 다음 그림과 같이 6개의 직선이 그려진다.



주어진 원의 중심은 y축 위에 있기 때문에 항상 2개의 교점을 갖는다.

1) 예를 들어 생각해보자.

위 그림처럼 y축 이외의 직선과 교점이 없을 때 a_n을 조사해본다.

(0, 0, 0, 0, 0, 2), (0, 0, 0, 0, 0, 2) ⋯

주기가 6인 수열임을 알 수 있다.

따라서 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 에서 6개 항을 주기로 2씩 커지게 되고 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$2\times\left[\frac{n}{6}\right] \le S_n < 2\times\left(\left[\frac{n}{6}\right]+1\right)$$

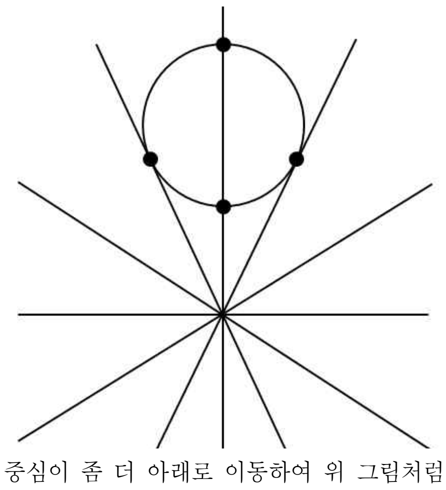
n으로 나누면

$2\times\left[\dfrac{n}{6}\right]\times\dfrac{1}{n} \le \dfrac{S_n}{n} < 2\times\left(\left[\dfrac{n}{6}\right]+1\right)\times\dfrac{1}{n}$ 이다.

따라서 $\dfrac{1}{3} \le \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n} \le \dfrac{1}{3}$ 이고 극한값은 $\dfrac{1}{3}$이 된다.

이 때 극한값에 영향을 주는 것은 주기가 6인 수열에서 한 주기내의 수열의 합이다. 극한값이 1이 되려면 한 주기내의 수열의 합이 6이 되어야 한다.

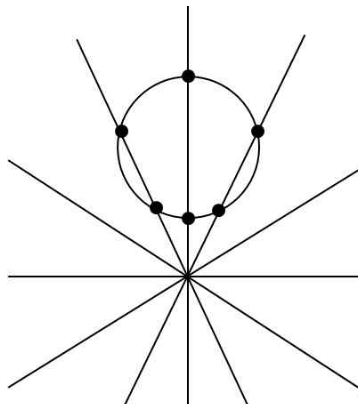
즉, 직선들과의 교점의 개수가 6개가 되어야한다는 의미이다.



원의 중심이 좀 더 아래로 이동하여 위 그림처럼 두 직선 $y=\sqrt{3}x$ 와 $y=-\sqrt{3}x$ 와 접하게 되면

(1, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 0, 0, 0, 1, 2) ⋯

이므로 합이 4가 되어 극한값이 1이 될 수 없다.



위 그림과 같이 두 직선 $y=\sqrt{3}x$ 와 $y=-\sqrt{3}x$ 와 각각 두 점에서 만나게 되면

(2, 0, 0, 0, 2, 2), (2, 0, 0, 0, 2, 2) ⋯

이므로 극한값이 1이 될 수 있다.

그러나 두 직선 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 와 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 와는 만나선 안된다.

점과 직선사이 거리 공식에 의해

$\dfrac{|k|}{2}<4$ (원의 중심으로부터 $y=\sqrt{3}x$ 까지의 거리가 반지름보다 작아야함)

$\dfrac{|\sqrt{3}k|}{2}>4$ (원의 중심으로부터 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 까지의 거리가 반지름보다 커야함)

정리하면

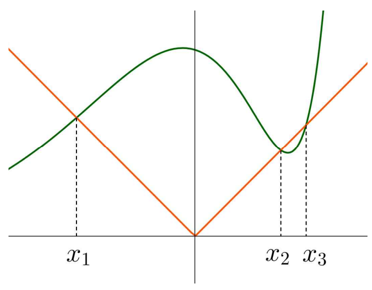
$-8<k<-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ 또는 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}<k<8$

$\therefore$ 만족하는 정수 k는 $-7, -6, -5, 5, 6, 7$ 로 6개

21) 정답 ①

1) A집합은 함수 $g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|$ 의 그래프의 교점의 x좌표들의 집합니다. 집합 B는 집합 A의 각각의 원소에 대응하는 함숫값 $g(x)$들의 집합이다.

예를 들어

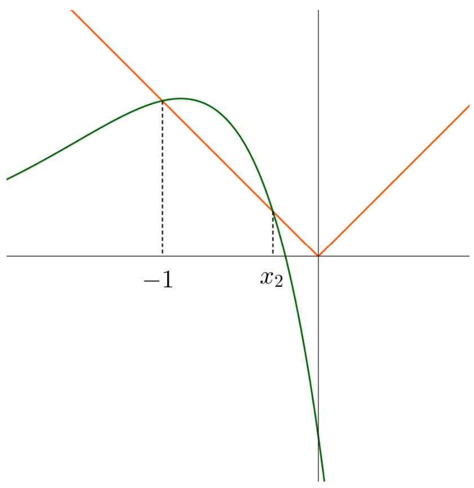


위 그래프와 같은 개형이라면

$A=\{x_1, x_2, x_3\}$, $B=\{g(x_1), g(x_2), g(x_3)\}$ 이다.

이 때, (나) 조건에서 $A-B=\{-1\}$ 이므로 $-1\in A$ 이고 따라서 $g(x)$는 $(-1,1)$을 반드시 지난다.

(가) 조건에서 $f(0)<0$ 이므로 $g(0)<0$ 이고 $g(x)$는 다음과 같은 개형을 갖을 수 있다.



만약 위 그림과 같이 함수 $y=-x\ (x<0)$ 의 그래프와 $x=-1$ 이외의 다른 곳에서 교점이 발생하면 집합 $A-B$의 원소가 -1로 유일하다는 것에 모순이다. 따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 $y=-x$ 의 그래프에 접해야 한다.

$\therefore\ g(-1)=1\ \cdots①\ ,\quad g'(-1)=-1\ \cdots②$

2) $B-A=\varnothing$ 조건

앞에서 $x<0$일 때, $x=-1$을 제외하고는 교점이 생기지 않는다. 함수 $g(x)$의 그래프가 $y=x\ (x>0)$ 의 그래프와 만나서 생기는 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이라고 해보자.

$A=\{-1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$
$B=\{g(-1),\ g(x_1),\ g(x_2),\ \cdots,g(x_n)\}$

$g(-1)=1\ ,g(x_1)=x_1\ ,g(x_2)=x_2,\ \cdots,\ g(x_n)=x_n$ 이므로

$A=\{-1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$
$B=\{1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n\}$ 이다.

$B-A=\varnothing$ 이므로 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$ 중에 1이 있어야 한다. 따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 반드시 지나야 한다.

$\therefore\ g(1)=1\ \cdots③$

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면
$g(-1)=1\ \Leftrightarrow e^{-1}(a-b+c)=1\quad\cdots①$
$g'(-1)=-1\ \Leftrightarrow e^{-1}(-a+c)=-1\quad\cdots②$
$g(1)=1 \Leftrightarrow e(a+b+c)=1\quad\cdots③$

$\therefore\ a=\dfrac{3e}{4}+\dfrac{1}{4e}\ ,\ b=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{e}{2}\ ,\ c=-\dfrac{e}{4}+\dfrac{1}{4e}$

$\therefore\ 4f(0)=4c=e^{-1}-e$

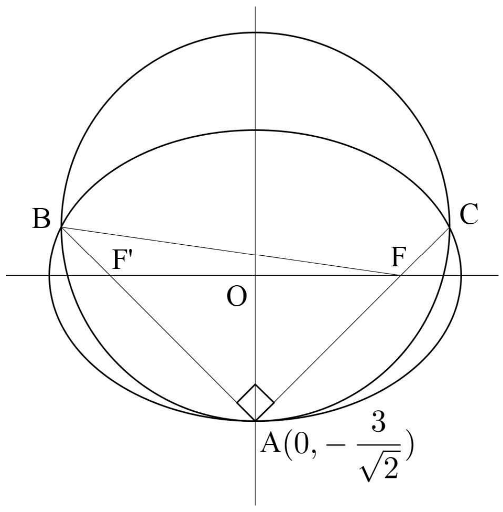
26) 정답 : 66

$a+b+c=11$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수는 ${}_3H_{11}={}_{13}C_2=78$ 이다.
조건 $ab\neq c, bc\neq a, ca\neq b$ 이 성립하지 않는 경우의 수를 전체 경우에서 빼면 된다.
$ab\neq c, bc\neq a, ca\neq b$ 의 부정은 $ab=c$ or $bc=a$ or $ca=b$

$ab=c$ 이고, $a\leq b$인 경우에 대해 생각해보자.
$a+b+c=a+b+ab=11$ 이므로,
$(a+1)(b+1)=12$ 이다. $12=2^2\times3$ 이므로,
$(a+1,\ b+1)=(1,\ 12)$ or $(2,\ 6)$ or $(3,\ 4)$ 이다.
그러므로, $(a,\ b)=(0,\ 11),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3)$ 이고 그에 따른 c의 값은 각각 $0,\ 5,\ 6$이므로, 가능한 순서쌍은 $(0,\ 11,\ 0),\ (1,\ 5,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)$ 의 세 종류이다.

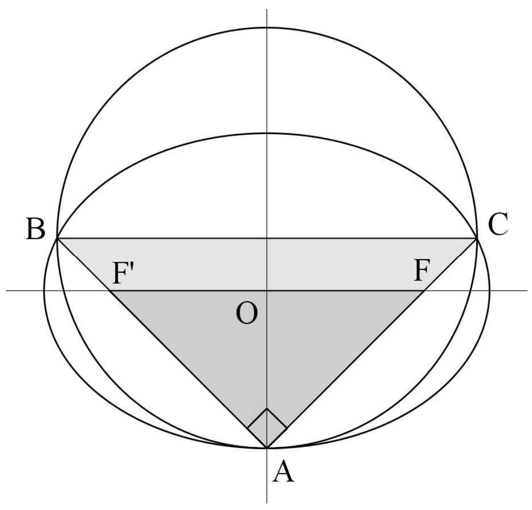
그 중 $(0,\ 11,\ 0)$과 $(1,\ 5,\ 5)$은 $a,\ b,\ c$가 바뀜에 따라 3개씩의 경우가 있고, $(2,\ 3,\ 6)$은 6가지 경우가 있다.
그러므로 $a+b+c=11$ 와 $ab\neq c, bc\neq a, ca\neq b$ 를 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수는 $78-3-3-6=66$ 총 66개이다.

27) 정답 : 32



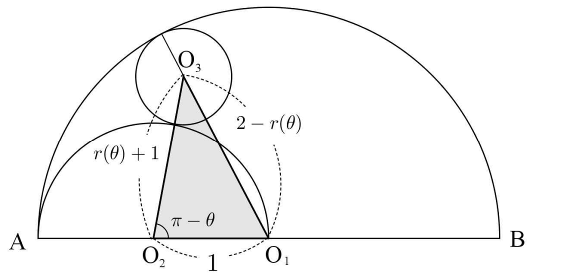
타원의 방정식으로부터 $\mathrm{F}(\dfrac{3}{\sqrt{2}},0)$, $\mathrm{F'}(-\dfrac{3}{\sqrt{2}},0)$, $\mathrm{A}(0,\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}})$를 알 수 있다. 삼각형 OAF는 직각 이등변 삼각형이므로 $\angle \mathrm{F'OF}=90^\circ$ 이다. 따라서 선분 BC가 원의 지름이 된다.

먼저 $\overline{\mathrm{BF'}}=a,\ \overline{\mathrm{BF}}=6-a$라고 하자.
$\overline{\mathrm{F'A}}=3,\ \overline{\mathrm{FA}}=3$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$(3+a)^2+3^2=(6-a)^2$
정리하면
$a=1$



삼가형 $\mathrm{AF'F}$와 삼각형 ABC는 $3:4$닮음이고
$\overline{\mathrm{F'F}}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{2}$ 이다.
따라서 원의 지름은 $4\sqrt{2}$ 이고 원의 둘레는 $4\sqrt{2}\pi$
$\therefore k^2=32$

28) 정답 : 8



각 반원과 원의 중심을 모두 이어보면 위 그림과 같다.
삼각형 $\mathrm{O_1O_2O_3}$의 모든 변의 길이를 구할 수 있고
($r(\theta)+1$, $2-r(\theta)$, 1) $\angle \mathrm{O_3O_2O_1}=\pi-\theta$ 이므로
제 2코사인정리를 이용하면

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{(r(\theta)+1)^2+1^2-(2-r(\theta))^2}{2\times1\times\{r(\theta)+1\}}$$

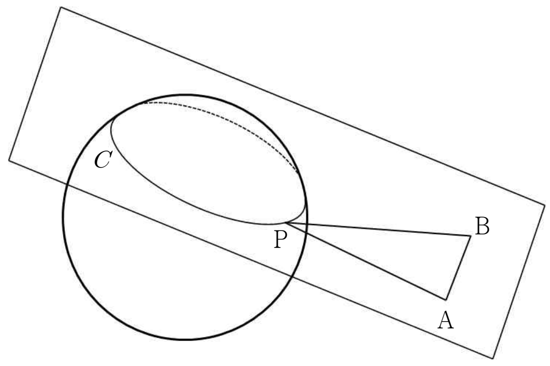
$$-\cos\theta=\frac{3r(\theta)-1}{r(\theta)+1}$$

정리하면

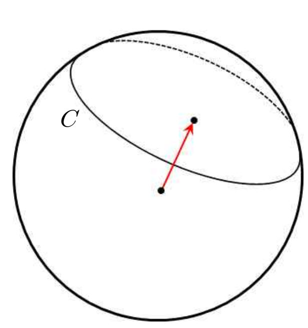
$$r(\theta)=\frac{1-\cos\theta}{3+\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{r(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{\dfrac{1-\cos\theta}{3+\cos\theta}}=8$$

29) 정답 : 20

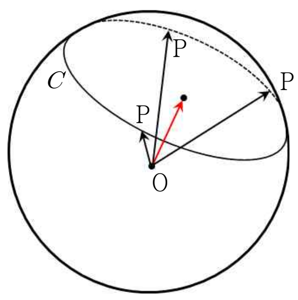


직선 AB를 포함하고 구의 중심으로부터 거리가 1인 평면이 구와 만나서 생기는 원이 C이다. 원 C위의 한 점 P에 대하여 삼각형 ABP는 평면에 포함되어 있다.

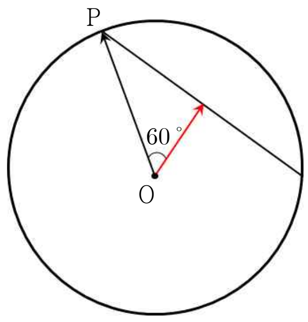


따라서 삼각형 ABP를 포함하는 평면의 법선벡터는

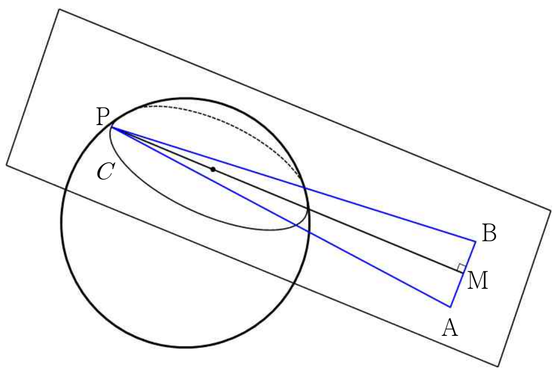
위 그림과 같다. (붉은색 벡터)



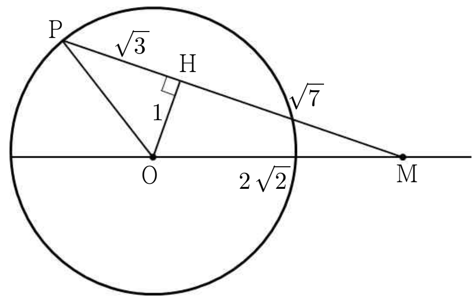
이 때, 평면 α는 점 P에서 구에 접하는 평면이기 때문에 정의에 따라 평면 α의 법선벡터가 곧 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$이다. (검정색 벡터)



두 벡터가 이루는 각은 항상 60°이기 때문에 삼각형 ABP와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다.
따라서 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되어야한다.



삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 커져야 한다. 선분 AB의 중점과 원 C의 중심을 통과해 지나갈 때 높이가 최대가 된다.



(단면화한 그림)

$\overline{\mathrm{OM}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{OH}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{7}$ 이다.
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{MP}}=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 가 높이의 최댓값이다.

정사영의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{MP}}\times\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{7})\times\frac{1}{2}$

$=\sqrt{14}+\sqrt{6}$

$\therefore\ p+q=20$

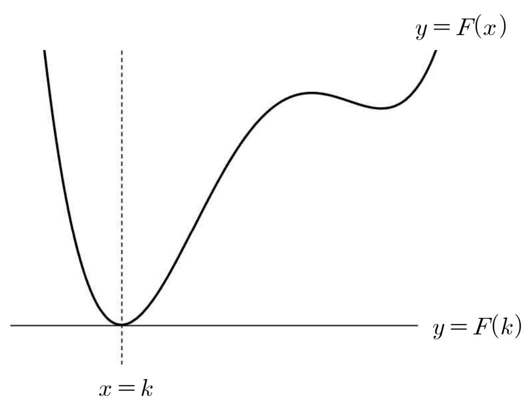
30) 정답 7

$f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 하자.

$\int_k^x f(t)dt=F(x)-F(k)$ 이고 주어진 조건에 따라 $x\neq k$인 모든 실수 x에 대하여 $F(x)>F(k)$인 k가 존재하지 않아야 한다.

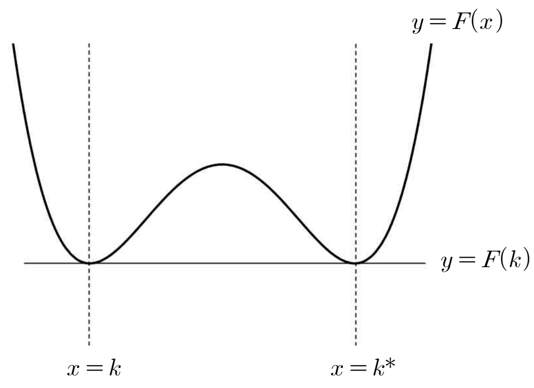
만약 주어진 조건을 만족시키는 k가 존재한다면 $F(k)$는 $F(x)$의 최솟값이다. 그러나 이런 k가 존재 하지 않기 위해서는 $x=k$에서 유일한 최솟값이 되어선 안된다.

예를 들어 $y=F(x)$ (4차함수)의 개형이 다음과 같다고 생각해 보자.



함수 $y=F(x)$가 최솟값을 갖는 x를 k라고 하면 위 그림과 같이 $F(x)>F(k)$인 k가 존재하게 된다.

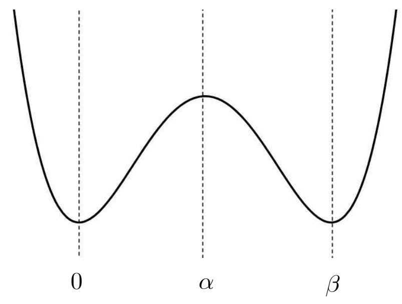
이런 k가 존재하지 않기 위해서는 $F(x)$의 최솟값을 만드는 x가 두 개 이상이 되어야 한다. 그런데 함수 $F(x)$는 4차함수이므로 다음과 같은 개형만 가능하다.



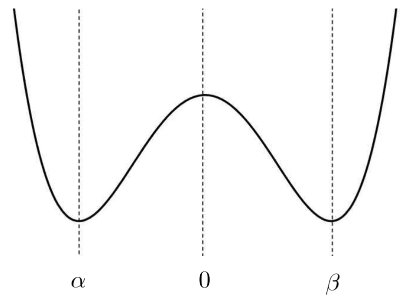
위 그림같이 극솟값이 두 개이며 그 값이 같은 경우 k^*에 대하여 $F(k^*)>F(k)$가 성립하지 않는다.
따라서 $x\neq k$인 모든 x(k^*를 포함)에 대하여 $F(x)>F(k)$를 만족시키지 못한다.

(나) 조건을 만족시키는 그래프는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

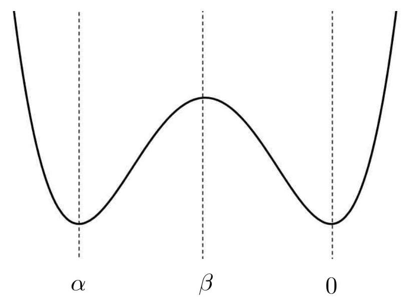
① $0<\alpha<\beta$



② $\alpha<0<\beta$



③ $\alpha<\beta<0$



이 때, $F'(x)=f(x)=x(x^2+mx+n)$ 이고 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=-m<0$, $\alpha\beta=n>0$ 이므로 가능한 그래프의 개형은 ③ 이다.

$F(x)-p=\frac{1}{4}(x-\alpha)^2x^2$

$F(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)^2x^2+p$

양변을 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)x^2+\frac{1}{2}(x-\alpha)^2x$

$f(\beta)=0$ 이므로

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\beta^2+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\beta=0$

$\frac{1}{2}\beta(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)=0$

$\therefore\ \alpha=2\beta$ ($\because \alpha\neq\beta,\ \beta\neq 0$)

$\alpha+\beta=-m$ 와 $\alpha\beta=n$에 대입하면

$m=-3\beta$, $n=2\beta^2$

$\therefore$ m, n은 자연수이므로 $\beta=-1, -2, \cdots, -7$ 일 때, $(3, 2)$, $(6, 8)$, $(9, 18)$, $(12, 32)$, $(15, 50)$, $(18, 72)$, $(21, 98)$로 7개다.