2016학년도 KUME FINAL 모의평가
정답 및 해설 (A형)

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	④	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	②	7	②	8	③	9	④	10	②
11	①	12	②	13	④	14	③	15	⑤
16	③	17	⑤	18	①	19	②	20	③
21	②	22	5	23	12	24	36	25	2
26	254	27	13	28	39	29	43	30	820

14) 정답 ③

점 P의 좌표는 $\left(\frac{n}{2}, 3^{\frac{n}{2}}\right)$, 점 Q의 좌표는 $(0, 1)$, 점 R의 좌표는 $(0, 3^n)$이므로, 삼각형 PQR의 넓이 a_n은 $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot(3^n-1)$ 이다. 따라서

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{\frac{2n}{4}(3^{2n}-1)}{\frac{n}{4}(3^n-1)} = 2\cdot(3^n+1) \le 100$$

$3^n \le 49$을 만족하는 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 이렇게 총 3개다.

15) 정답 ⑤

ㄱ. $A^2+2AB=-E$
$A(A+2B)=-E$
$A(-A-2B)=E$
그러므로 A의 역행렬이 존재한다.(참)

ㄴ. $A(A+2B)=-E=(A+2B)A$ 이므로
$A^2+2AB=A^2+2BA$
$AB=BA$(참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 $2AB^2=E-B$
$2AB^2+B=E$
$(2AB+E)B=E$
주어진 식에 의하여 $2AB+E=-A^2$ 이므로
$-A^2B=E$
$A^2B=-E$(참)

16) 정답 ③

$S_n+na_n=2(n-1)(n+2)\quad(n\ge 2)$에서
$S_{n+1}+(n+1)a_{n+1}=2n(n+3)$ 이므로
$S_{n+1}-S_n+(n+1)a_{n+1}-na_n=\boxed{4(n+1)}$
$\therefore$ $\boxed{(가)}=4(n+1)$
이다. 식을 정리하면
$(n+2)a_{n+1}-na_n=\boxed{4(n+1)}\quad(n\ge 2)$
이다.
양변에 $(n+1)$을 곱해주면,
$(n+1)(n+2)a_{n+1}-n(n+1)a_n=(n+1)\times\boxed{4(n+1)}$이다.
$b_n=(n+1)\times\boxed{4(n+1)}$이라 하면
$n(n+1)a_n=6a_2+\sum_{k=2}^{n-1}b_k=20+4\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2$
$(\because a_2=\frac{10}{3})=20+4\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}-20$
$\therefore\quad =k^2$
$=4\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}=\boxed{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}$
$(n\ge 3)\quad\therefore\quad =\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
$n=2$일 때에도 이 식을 만족시키므로
$a_n=\frac{2}{3}(2n+1)\quad(n\ge 2)$이다.

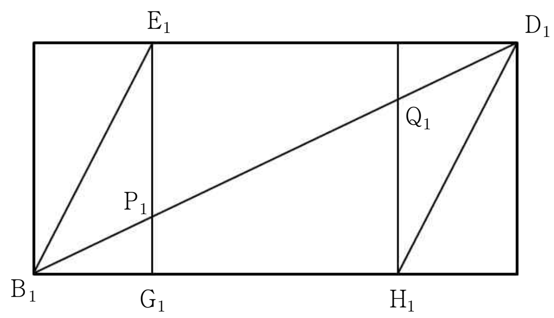
17) 정답 ⑤

ㄱ. t를 $-s$라고 하자.
$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{s\to\infty}f\left(-\frac{1}{s}\right)$ 는 $x=0$에서의 좌극한
$\therefore\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=-1$ (참)

ㄴ. $x=0$에서의 우극한
$\lim_{x\to+0}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to+0}f(x)\lim_{x\to+0}f(x-1)$
$=1\times0=0$
$x=0$에서의 좌극한
$\lim_{x\to-0}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to-0}f(x)\lim_{x\to-0}f(x-1)$
$=-1\times0=0$
좌극한과 우극한의 값이 일치하므로 극한값이 존재한다. (참)

ㄷ. $x=0$에서의 우극한
$\lim_{x\to+0}f(g(x))=\lim_{x\to+0}f(x)=1$
$x=0$에서의 좌극한
$\lim_{x\to-0}f(g(x))=\lim_{x\to+0}f(x)=1$
$x=0$에서의 함숫값
$f(g(0))=f(0)=1$
극한값과 함숫값이 일치하므로 $x=0$에서 연속 (참)

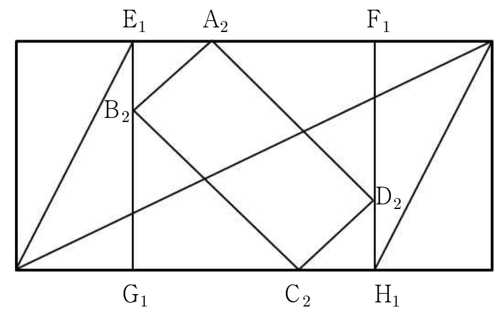
18) 정답 ①



삼각형 $E_1P_1D_1$과 삼각형 $G_1P_1B_1$은 $3:1$닮음이므로 $\overline{E_1P_1}:\overline{P_1G_1}=3:1$ 이다. $\overline{E_1G_1}=2$ 이므로 $\overline{E_1P_1}=\frac{3}{2}$ 이다.

삼각형 $E_1B_1P_1$은 밑변의 길이가 $\frac{3}{2}$이고 높이가 1인 삼각형 이므로 넓이는 $\frac{3}{4}$이다. 삼각형 $Q_1D_1H_1$도 삼각형 $E_1B_1P_1$과 합동이므로 R_1에 색칠된 두 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

$\therefore\ S_1=\frac{3}{2}$



두 번 째 직사각형의 넓이 한 변의 길이를 구해보자.
$\overline{G_1C_2}=a$ 라고 하면 $\overline{C_2H_1}=2-a$ 이다.
삼각형 $B_2G_1C_2$와 삼각형 $C_2H_1D_2$는 $2:1$닮음 이므로
$\overline{B_2G_1}=\overline{C_2H_1}\times2=4-2a$ 이고
$\overline{D_2H_1}=\frac{a}{2}$ 인데 $\overline{B_2E_1}=\overline{D_2H_1}$ 이므로 $\overline{B_2E_1}=\frac{a}{2}$ 이다.
$2=\overline{E_1G_1}=\overline{B_2G_1}+\overline{B_2E_1}=4-\frac{3}{2}a$ 이므로
$a=\frac{4}{3}$ 이고 $\overline{C_2D_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

따라서 닮음비는 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 이고 공비는 $\frac{2}{9}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{27}{14}$$

19) 정답 ②

세 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우는

검-검-검
검-흰-검
흰-검-검
흰-흰-검

이렇게 총 네 가지의 경우가 있다. 각 경우의 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{15}$$

이므로, 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공일 때, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{2}{5}$$

이다.

20) 정답 ③

(가) 조건에 의해 n^k의 자릿수가 n의 자릿수보다 커야한다. (나) 조건에서 9 이하의 자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{n}\right)=1-\log n=\log\frac{10}{n}$이다. 따라서 (나) 조건은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

(나) $g(n^k)\ge\log\frac{10}{n}$

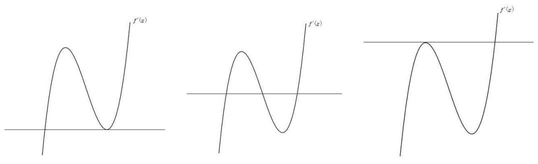
예를 들어, $n=2$일 때 2^k의 자릿수가 2의 자릿수보다 커지는 k는 $k\ge4$이다. 또 $g(2^k)\ge\log5$를 만족하는 k는 3, 6, 9이고 (가) 조건에서 k는 4 이상이어야 하므로 $a_2=6$이다. 마찬가지로 $n=3$일 때 (가) 조건을 만족시키는 k는 $k\ge3$이고, (나) 조건을 만족시키는 k=2, 4이다. 따라서 a_3=4이다. $n\ge4$인 n에 대하여 (가) 조건을 만족시키는 k는 $k\ge2$이다. ($\because$ 4이상의 자연수는 제곱을 하면 자릿수가 커진다.) $n=4$일 때, (나) 조건 $g(4^k)+\log4\ge1\Leftrightarrow g(4^k)\ge\log2.5$을 만족시키는 k는 $k=1$, 3이므로 $a_4=3$이다. $n\ge5$인 n에 대하여 (나) 조건을 만족시키는 k의 최솟값은 2이다. 따라서 a_5, a_6, a_7, a_8, a_9는 모두 2이다. $n=10$일 때, (나) 조건에서 k의 값에 관계없이 양변이 모두 0이므로 (가) 조건을 만족시키는 k의 최솟값이 a_{10}이 된다.

$\therefore a_{10}=2$

따라서 $\sum_{k=2}^{10}a_k=6+4+3+2+2+2+2+2+2=25$

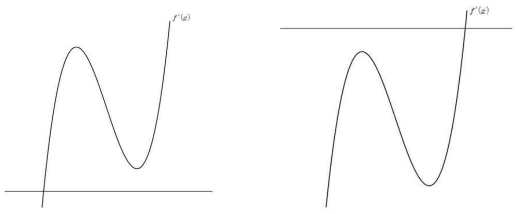
21) 정답 ②

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로, (가) 조건에서 $f'(x)$는 삼차함수이고 서로 다른 두 극값의 곱은 0보다 작거나 같아야하므로 가능한 $f'(x)$의 개형은 다음과 같다.



(나)조건에서 $(x+1)f'(x)=0$은 서로 다른 두 개의 실근을 가지고, $x=-1$이 이미 근이므로, $f'(x)=0$이 $x\neq-1$인 실근 한 개를 가지거나, $x=-1$과 $x\neq-1$인 서로 다른 실근 2개를 가지면 된다.

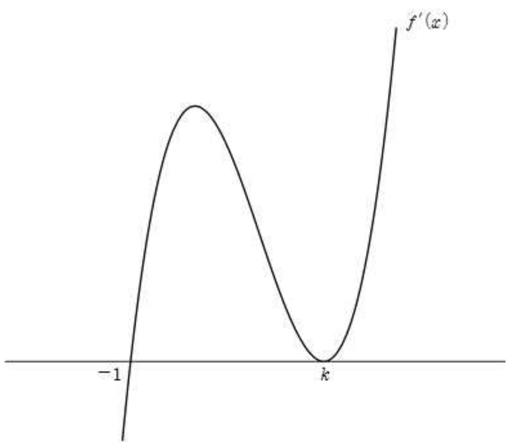
i) $f'(x)=0$이 $x\neq-1$인 실근 한 개를 가질 때. 가능한 $f'(x)$의 그래프 개형은 아래와 같고,



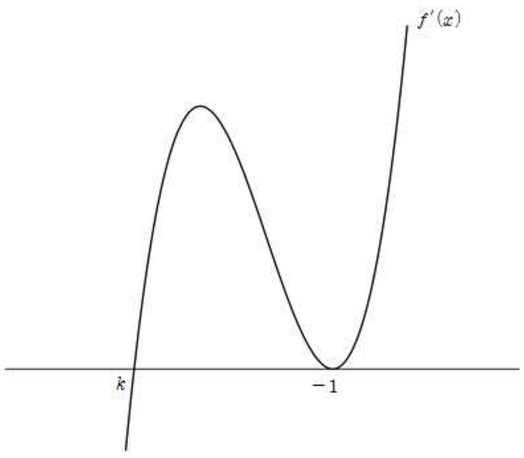
두 가지 모두 (가)조건에 위배된다.

ii) $f'(x)=0$이 $x=-1$, $x=k\,(k\neq-1)$의 서로 다른 실근 두 개를 가지는 경우 가능한 그래프의 개형은 아래 4가지와 같다.

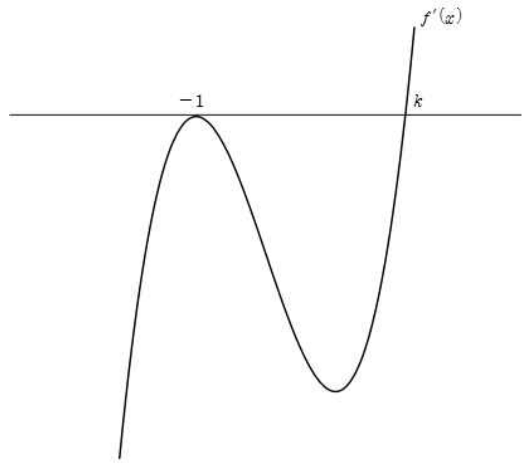
①



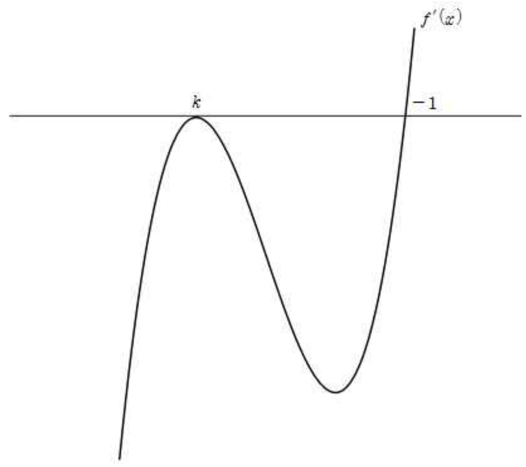
②



③



④



(다)조건에서 $x\le0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이므로, 가능한 경우는 (나) ii) 의 ③ 뿐이다.
따라서 $f(x)=(x+1)^3(x-a)+b$ 로 둘 수 있고, 원점을 지나므로, $b=a$ 이다.
또한, $f'(x)=3(x+1)^2(x-a)+(x+1)^3$ 에서 $f'(0)\le0$ 이므로, $\frac{1}{3}\le a$ 이다.

따라서 $f(1)=8\times(1-a)+a\le\frac{17}{3}$ 이므로

최댓값은 $\frac{17}{3}$이다.

26) 정답 : 254

이항분포 $B(n,p)$를 따르고,
$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ 이므로

$np=8$, $np(1-p)=6$ 이고,

$8(1-p)=6$ 이므로 $p=\frac{1}{4}$, $n=32$ 이다.

$E(nX-8p)=E(32X-2)=32E(X)-2$ 이고,

$E(X)=8$ 이므로 $32E(X)-2=254$

$\therefore E(nX-8p)=254$

27) 정답 : 13

상수함수 $y=5$는 접선의 기울기가 항상 0이므로 함수 $f(x)$와의 교점에서 함수 $f(x)$의 접선의 기울기가 0이어야 주어진 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $f'(x)=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$ 이므로, $x=-2$에서 함수 $f(x)$의 접선의 기울기가 0이 된다. 그러므로 상수함수 $y=5$와 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 교점을 가져야 하므로, $f(-2)=k-8=5$ 이다. 그러므로, $k=13$이다.

28) 정답 : 39

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면
또한, $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d$가 된다.
$a_1^2+a_2^2=a_3^2$에 두 식을 대입하면,
$a_1^2+(a_1+d)^2=(a_1+2d)^2$ 정리하면,
$a_1^2-2a_1d-3d^2=(a_1+d)(a_1-3d)=0$ 이므로,
$a_1=-d$이거나 $a_1=3d$이다.
만약 $a_1=-d$라면, $a_5=21=a_1+4d=3d$ 가 되어
$d=7$, $a_1=-7$이 된다.
그러나 $a_1>0$이므로 이 경우는 성립하지 않는다.
만약 $a_1=3d$라면, $a_5=21=a_1+4d=7d$ 가 되어
$d=3$, $a_1=9>0$이므로 이 경우에 성립한다.
그러므로, $a_1=9$, $d=3$이다.
$a_{11}=a_1+10d=39$ 가 되므로 답은 39이다.

29) 정답 : 43

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(0)=6$이므로 $f(x)=x^2+ax+6$ 이다.

$\int_0^5 f(x)dx=\int_{-1}^4 f(x)dx$ 는

$\int_0^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx$ 이다.

정리해주면 $\int_4^5 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$

이차함수의 대칭성을 이용하여 $f(x)$가 $x=2$에 대칭이란 것을 알 수 있다.

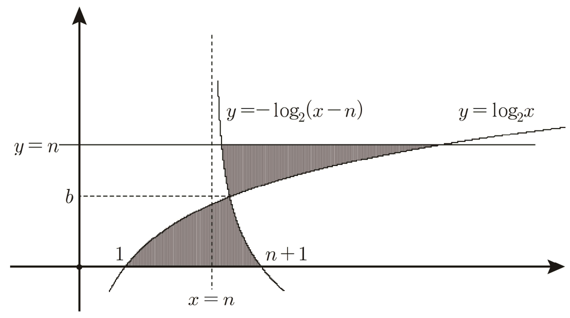
따라서 $f(x)=(x-2)^2+2$

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 (x^2-4x+6)dx=\frac{40}{3}$

$p=3, q=40$ 이므로 $p+q=43$ 이다.

30) 정답 : 820

주어진 조건을 만족하는 영역을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



또한 두 곡선의 교점의 x좌표가 n과 $n+1$ 사이에 존재하므로, 교점의 y좌표를 b라고 할 때, b는 다음 부등식을 만족한다.

$$\log_2 n \le b < \log_2(n+1)$$

ⅰ) 두 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 내부와 그 경계에 포함되고 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수

$y=0$일 때, $1\le x\le n+1$ $\therefore n+1$ 개
$y=1$일 때, $2^1\le x\le n$ $\therefore n+1-2^1$ 개
$y=2$일 때, $2^2\le x\le n$ $\therefore n+1-2^2$ 개

⋮ ⋮

$y=[b]-1$ 일 때, $2^{[b]-1}\le x\le n$ $\therefore n+1-2^{[b]-1}$ 개
$y=[b]$ 일 때, $2^{[b]}\le x\le n$ $\therefore n+1-2^{[b]}$ 개

이므로, ⅰ)조건을 만족하는 점의 총 개수는

$$n+1+\sum_{k=1}^{[b]}(n+1-2^k)=([b]+1)(n+1)-2^{[b]+1}+2$$

이다.

ⅱ) 두 곡선과 $y=n$으로 둘러싸인 영역의 내부와 그 경계에 포함되고 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수

$y=[b]+1$ 일 때, $n+1\le x\le 2^{[b]+1}$ $\therefore 2^{[b]+1}-n$ 개
$y=[b]+2$ 일 때, $n+1\le x\le 2^{[b]+2}$ $\therefore 2^{[b]+2}-n$ 개

⋮ ⋮

$y=n-1$ 일 때, $n+1\le x\le 2^{n-1}$ $\therefore 2^{n-1}-n$ 개
$y=n$일 때, $n+1\le x\le 2^n$ $\therefore 2^n-n$ 개

이므로, ⅱ)조건을 만족하는 점의 총 개수는

$$\sum_{k=[b]+1}^{n}(2^k-n)=2^{n+1}-2^{[b]+1}-(n-[b])n$$

이다.

ⅰ)과 ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 점의 총 개수 $f(n)$은

$$f(n)=2^{n+1}-2^{[b]+2}-n^2+2n[b]+n+[b]+3$$

이 된다.

$n=6$일 때, $\log_2 6\le b<\log_2 7$ 이므로, $[b]=2$
$n=7$일 때, $\log_2 7\le b<\log_2 8$ 이므로, $[b]=2$
$n=8$일 때, $\log_2 8\le b<\log_2 9$ 이므로, $[b]=3$

위에서의 각각의 n과 $[b]$의 값을 $f(n)$에 대입하면

$$f(6)=111,\ f(7)=231,\ f(8)=478$$

이 되어

$$f(6)+f(7)+f(8)=820$$

이다.