제 2 교시

왕왕털 공통 모의고사 2회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

쉬마렵다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지 넘기기 ㄴㄴ염.

오르비 왕왕털

수학 영역

제 2 교시

홀수형

5지선다형

1. $2^{-3}\times\dfrac{8^2}{\log_8 2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

$2^{-3}\times(2^3)^2\times\log_2 8$

$=2^3\times 3$

2. 정수 k와 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=kx+2$이고, $f(2)=f'(2)=4$일 때, $f(0)$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$f'(2)=2k+2=4$

$\therefore k=1$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

$f(2)=6+C=4$

$\therefore C=-2$

$f(0)=-2$

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4=-8a_7,\quad a_8=1$$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

일 때, a_6a_9의 값은? [3점]

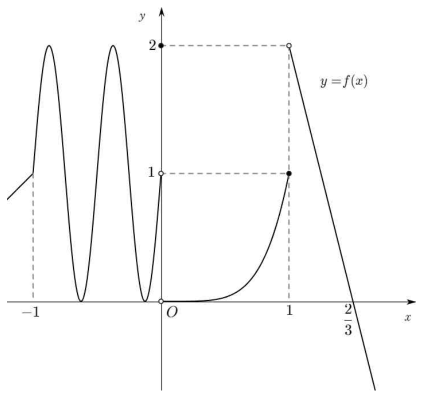
① 4 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -4

$a_6=a_8\div r^2$

$a_9=a_8\times r$

$\therefore 4\times-\frac{1}{2}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)$의 값은? [3점]

$1+2+1$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이고, $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\tan\theta =$

$\cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

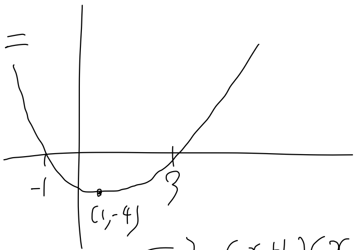
$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

6. 이차함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)$를 $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ 라고 정의하자. $F(x)$가 $x=-1$에서 극대이고 $x=3$에서 극소이다. $f(x)$가 점 $(1,-4)$에서 극값을 가질 때, $F(3)$의 값은? [3점]

최고차항 양수

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{10}{3}$ ③ $-\frac{13}{3}$ ④ $-\frac{16}{3}$ ⑤ $-\frac{19}{3}$

$f(x)=$



$\Rightarrow (x+1)(x-3)$

$F(x) = \int_1^x t^2-2t-3\,dt$

$\therefore \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{1}{3} + 1 + 3$

$F(3) = -5 - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음과 같다.

$$S_n=\begin{cases} n^2-7n & (n<5) \\ n^2-7n-4 & (n\geq 5) \end{cases}$$

글 설명란에 부가설명 참고!

$a_2+a_3+a_5+a_6$의 값을 구하시오. [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$S_6 = a_1+a_2+\cdots\cdots a_6 = 2$

$S_1 = a_1 = -6$

$\therefore a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = -4$

$a_4 = S_4 - S_3 = 16-28-9+21 = 0$

$\therefore a_2+a_3+a_5+a_6 = -4$

8. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\ v_2(t)=(t-2)^2-4$$

이다. 시각 $t=k$에서 두 점의 가속도가 같아질 때, $t=0$부터 $t=6k$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

$6t-6=2t-4$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$k=\frac{1}{2}$

$\int_0^3 |3t^2-6t|\,dt=$

$\int_0^2 -3t^2+6t\,dt+\int_2^3 3t^2-6t\,dt$

$=4+4$

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 가능한 S_n의 값의 집합을 A라고 할 때, $A=\{2,5\}$이다.

$a_k=-3$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 가능한 a_{k-1}의 값의 합을 구하시오. [4점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$S_1=a_1$

a_1 a_2 a_3

2 — 0 — 0, 3 . . .

3 — 0, −3

$0+3+5$

0 — 0, −3

5 — −3 — 0, 3 . . .

10. 실수 k와 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$와 $f'(x)$는 점 $(3,0)$과 $(-1,k)$에서 교점을 가진다. ① ②
(나) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x-3}=-28$

k의 값을 구하시오. [4점]

① 0 ② 8 ③ 16 ④ 24 ⑤ 32

① $f(x)=a(x-3)^2(x-b)$

② $f'(-1)=f(-1)=k$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{f(x)}-f'(x)}{x-3}=-28$

($(x-3)^2$을 인수로 가지므로 0으로 감)

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2a\cancel{(x-3)}(x-b)+\cancel{a(x-3)^2}\ (\text{0으로 감})}{\cancel{x-3}}=28$

$\cancel{2}a(3-b)=\cancel{28}\ 14$

$\frac{14}{3}a=14$

$a=3$

$b=-\frac{5}{3}$

$\therefore 16\cancel{a}(-1-b)=-8\cancel{a}(-1-b)+16\cancel{a}$

$-16-16b=8+8b+16$

$-24b=40$

$b=-\frac{5}{3}$

$\therefore f(x)=3(x-3)^2(x+\frac{5}{3})$

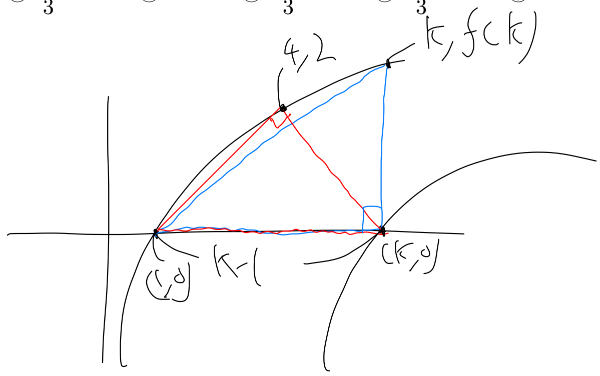
$f(-1)=\cancel{3}\cdot 16\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=32$

$=\log_2 x - \log_2 k$

11. 함수 $f(x)=\log_2 x$와 $g(x)=\log_2\frac{x}{k}$ 의 각각의 근과, $f(x)$를 지나는 점 $A(a,f(a))$을 연결한 삼각형이 직각삼각형이 되게하는 모든 a값은 4, α $(4<\alpha)$이다. k값을 구하시오. [4점]

$\alpha = k$

① $\frac{8}{3}$ ② 4 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ 8



$$\left(\frac{2}{4-1}\right)\times\left(\frac{-2}{k-4}\right)=-1$$

$$\frac{2}{k-4}=\frac{3}{2}$$

$$k=\frac{16}{3}$$

12. $x \ge 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$와

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$ $\Rightarrow$ $g(x)$는 미분 가능

가 다음 조건을 만족시킨다.

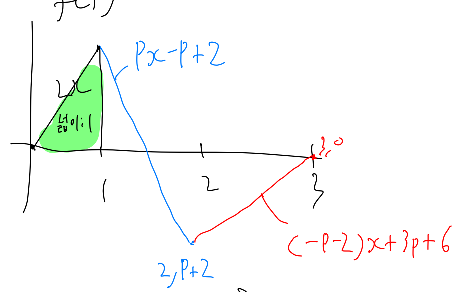
(가) 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[n-1,n]$에서 $f(x)$는 일차함수이다.
(나) $g(x)$는 $(3,0)$에서 극값을 가진다. $\Rightarrow$ $g(3)=0$, $g'(3)=0$
(다) $f(0)=0$, $f(1)=2$

$\therefore f(3)=0$ (뚫어야됨)

$g\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$f(1)$

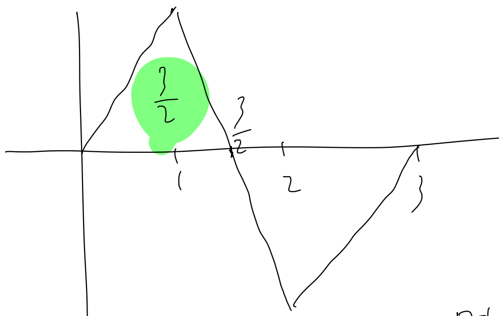


$$\therefore \int_1^2 px-p+2\,dx+\int_2^3 (-p-2)x+3p+6\,dx=-1$$

$$\left[\frac{1}{2}px^2-px+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}(-p-2)x^2+3px+6x\right]_2^3=-1$$

$$2+\frac{1}{2}p \quad + \quad \frac{1}{2}p+1$$

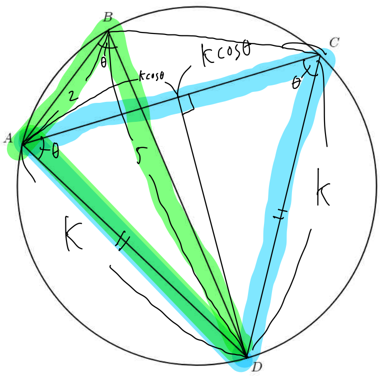
$$p=-4$$



감각적인 직관이 있으면 바로 보일지도?

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=5$인 삼각형 ABD를 외접하는 원의 반지름을 R이라 하고, 외접하는 원 위의 점 C를 $\overline{AC}:R=\sqrt{3}:1$, $\widehat{AD}=\widehat{DC}$가 되도록 잡을 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하자. $\dfrac{S}{\cos\angle ADC}$를 구하시오.

(단, $\dfrac{\pi}{4}<\angle CAD<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

$k^2=29-20\cos\theta$

$AC=2k\cos\theta$

$R=\dfrac{k}{2\sin\theta}$

$\dfrac{k}{2\sin\theta}:2k\cos\theta=1:\sqrt{3}$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \triangle ADC$는 정삼각형

$k=\sqrt{19}$

$\angle ABC=\dfrac{2}{3}\pi$

$AC=\sqrt{19}$

$\therefore BC=3$ (코사인 법칙)

$S=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

$\dfrac{S}{\cos\angle ADC}=3\sqrt{3}$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 세 부분집합

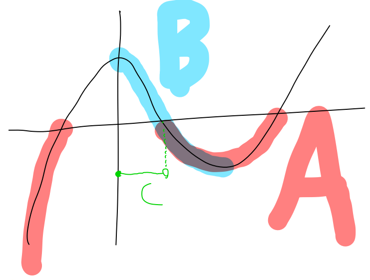
$A=\{x \mid f(x)\le 0\}$, $B=\{x \mid f'(x)\le 0\}$, $C=B-A\ne\varnothing$

이 다음 조건을 만족시킨다.

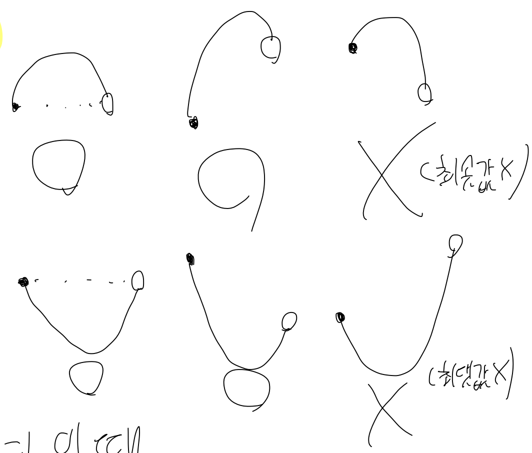
> $f(x-t)$의 정의역을 집합 C의 원소들이라고 할 때,
> 이때의 $f(x-t)$는 ≤과 < 구분 중요!!
> $\dfrac{\sqrt{141}-9}{6}\le t<1$, $\dfrac{-\sqrt{141}-9}{6}\le t<-3$
> 에서만 최댓값과 최솟값을 모두 가진다. (a)

$f(6)$의 값을 구하시오.

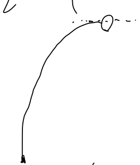
① 2 ② 5 ③ 8 ④ 11 ⑤ 14



(a)

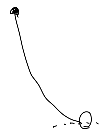


$t=1$ 일 때



모양이 되므로 $f(1)=0$

$t=-3$ 일 때



모양이 되므로 $f'(4)=0$

$f'(0)=f'(4)=0$ 이므로

$f'(x)=3x(x-4)$, $f(1)=0$

$f(x)=x^3-6x^2+5$

$\therefore f(6)=5$

15. 두 실수 a, b와 $x \le 3$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}4^x+a & (x<1)\\ -2^{x-b}+2 & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

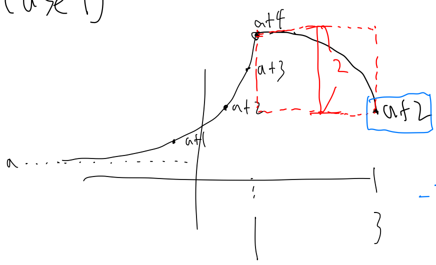
x<1 에선
최댓값 X
최솟값 X

(가) $f(x)$는 최댓값과 최솟값 중 하나만을 가진다.
(나) $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 할 때, $g(t)$의 최댓값은 2이고, 모든 불연속점들의 t좌표가 등차수열을 이룬다.

가능한 $\log_2(-a)$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

case 1)



불연속점: a+4, a+2, a

$-2^{1-b}+\cancel{2}=-2^{3-b}+\cancel{2}+2$

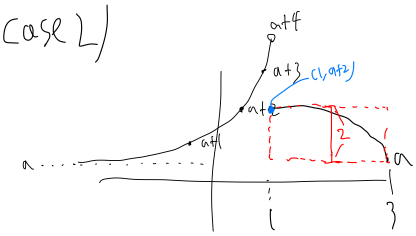
$2^{3-b}-2^{1-b}=2$ $2^{-b}(2^3-2)=2$

$b=\log_2 3$

$-2^{3-b}+\cancel{2}=a+\cancel{2}$

$-a=2^{3-b}$ $\log_2(-a)=3-\log_2 3$

case 2)



불연속점: a+4, a+2, a

$b=\log_2 3$ (case 1)과 동일)

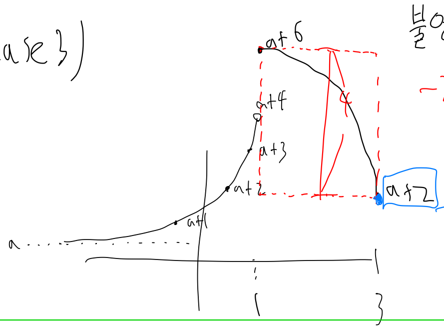
$-2^{1-b}+\cancel{2}=a+\cancel{2}$

$-a=2^{1-b}$

m

$\log_2(-a)=1-\log_2 3$

case 3)



불연속점: a+6, a+4, a+2, a

$-2^{1-b}+\cancel{2}=-2^{3-b}+\cancel{2}+4$

$2^{-b}(2^3-2)=4$ $b=\log_2 3-1$

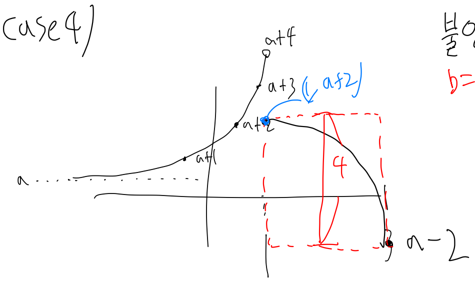
$-2^{3-b}+\cancel{2}=a+\cancel{2}$

$-a=2^{3-b}$

M

$\log_2(-a)=4-\log_2 3$

case 4)



불연속점: a+4, a+2, a, a−2

$b=\log_2 3-1$ (case 3)과 동일)

$-2^{1-b}+\cancel{2}=a+\cancel{2}$

$-a=2^{1-b}$

$\log_2(-a)=2-\log_2 3$

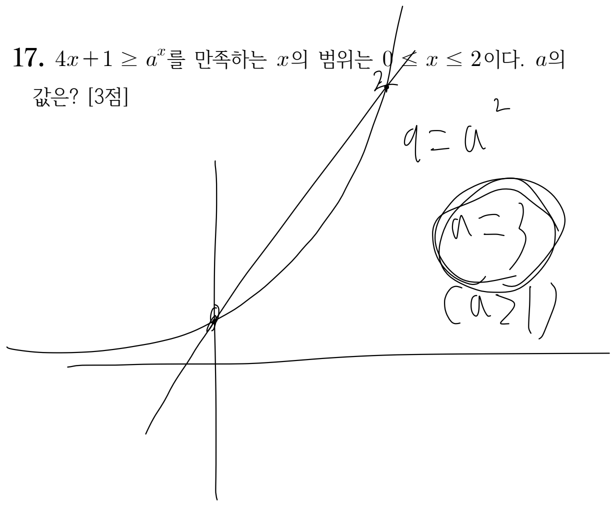
단답형

16. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$의 값은? [3점]

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x+6)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$

2

17. $4x+1 \ge a^x$를 만족하는 x의 범위는 $0 \le x \le 2$이다. a의 값은? [3점]



$9=a^2$

$a=3$

$(a>1)$

18. 두 상수 a, b에 대하여 $f(x)=(ax+b)(x^2+a)$는 $f'(1)=f'(2)=-9$이다. $-f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=a(x^2+a)+2x(ax+b)$

$a+a^2+2a+2b=4a+a^2+8a+4b=-9$

$3a+2b=12a+4b$

$-2b=9a$

$a^2-6a=-9$

$a=3$

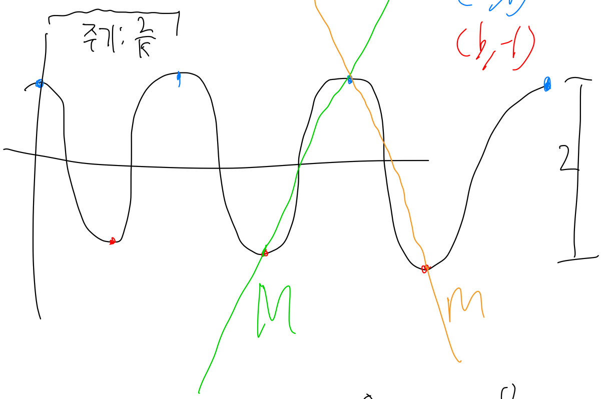
$b=-\frac{27}{2}$

$f(x)=(3x-\frac{27}{2})(x^2+3)$

$-f(1)=4\cdot\frac{21}{2}$

$=42$

19. $f(x)=\cos k\pi x$를 지나는 두 점 $(a,1)$, $(b,-1)$이 있다. 기울기 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $Mm=-64$이다. 자연수 k의 값을 구하시오. [3점]



$M=8$ $m=-8$

$\frac{2}{k}=\frac{1}{2}$

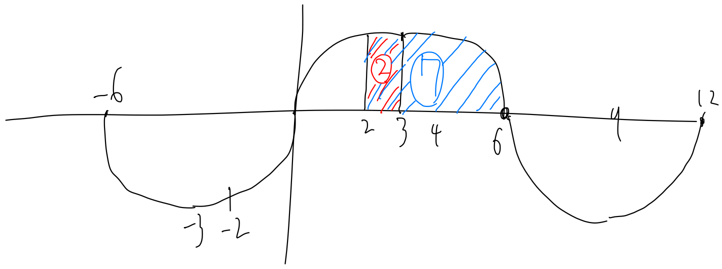
$k=4$

20. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이다. → $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)=f(3-x)$이다.
(다) $\int_2^9 f(x)dx=2$, $\int_{-2}^6 f(x)dx=7$ $=\int_2^6 f(x)dx=7$

$\int_2^3 f(x)dx=2$

$\int_0^4 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



$\therefore \int_4^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=3$

$\int_0^4 f(x)dx=7$

21. 어떤 자연수 k가 존재하고, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n < k) \rightarrow b_\alpha = 0 \\ -a_n + 8 & (n \ge k) \rightarrow b_{\alpha+4} = 0 \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

$b_m = 0$을 만족시키는 자연수 m의 값은 α와 $\alpha+4$이다.

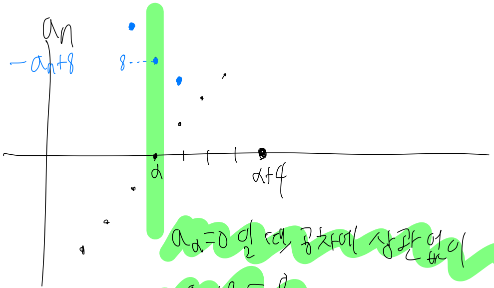
$b_6 = 6$이고, $b_9 < 0$일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=10}^{15} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

i) a_n이 감소수열

⇒ $b_m=0$을 만족시키는 m이 많아도 1개가 최대 ⇒ 모순

∴ a_n은 증가수열

k와 관계없이 a_n과 $-a_n+8$을 동시에 나타내 보자



$a_\alpha=0$일 때 공차에 상관없이 $-a_\alpha+8=8$

이 때, $b_{\alpha+4}=0$이 되려면

$-a_\alpha+8=8$, $-a_{\alpha+4}+8=0$ 이므로

$-a_n+8$의 공차는 -2 이므로

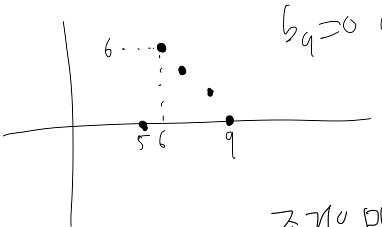
a_n의 공차는 2이다.

이때, $b_\alpha=0$, $b_{\alpha+4}=0$을 만족하려면

k가 $\alpha<k\le\alpha+4$에 존재해야하고,

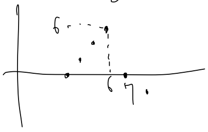
$b_6=6$ 이므로 $k\ne\alpha+2$

i) $k=\alpha+1$일 때



$b_9=0$ 이므로 모순

ii) $k=\alpha+4$ 일 때



조건을 만족하므로 $a_n=2n-6$

$k=7$

$\sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=10}^{15} a_k = -6+114 = 108$

22. 원점을 지나는 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 t에 대하여 $f(t) \le f(2t)$를 만족하는 t의 범위는 $t \le 2$이다.

$\{f'(3)\}^2 = 9$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

$t<0$ 일 땐 $x=2t$ 보다 $x=t$가 더 오른쪽에 있고,

$t>0$ 일 땐 $x=t$ 보다 $x=2t$가 더 오른쪽에 있다.

ex)

이때 $f(2t)\ge f(t)$ 이므로 $x<0$에서 감소한다

$0\le t\le 2$ 에서만 $f(2t)\ge f(t)$ 이므로 $x=0$부터는 x가 커질수록 증가하다가 감소한다.

∴ 최고차항계수 음수, $f(0)=f'(0)=0$, $f(2)=f(4)$

$f(x)=ax^2(x-b)$

$(a<0)$

$\cancel{4a}(2-b)=\cancel{16a}(4-b)$ → 4

$2-b=16-4b$

$b=\frac{14}{3}$

$f'(3)=3$ or -3 이므로

$f'(x)=2ax(x-b)+ax^2$

$f'(3)=-10a+9a=3$ or -3

$a=-3$ $(a<0)$

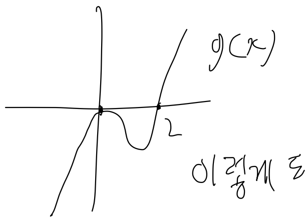
∴ $f(x)=-3x^2(x-\frac{14}{3})$ ⇒ 11

다른풀이 $f(t)\le f(2t)$ ⇒ $f(t)-f(2t)\le 0$

$g(t)$로 치환하면?

$f(0)=0$ 이므로 $g(0)=0$.

$g(x)$가 $x\le0$ 에서 음수이므로 그래프는



이렇게 되므로 $g(2)=0$ $g'(0)=0$

나머진 위와 동일