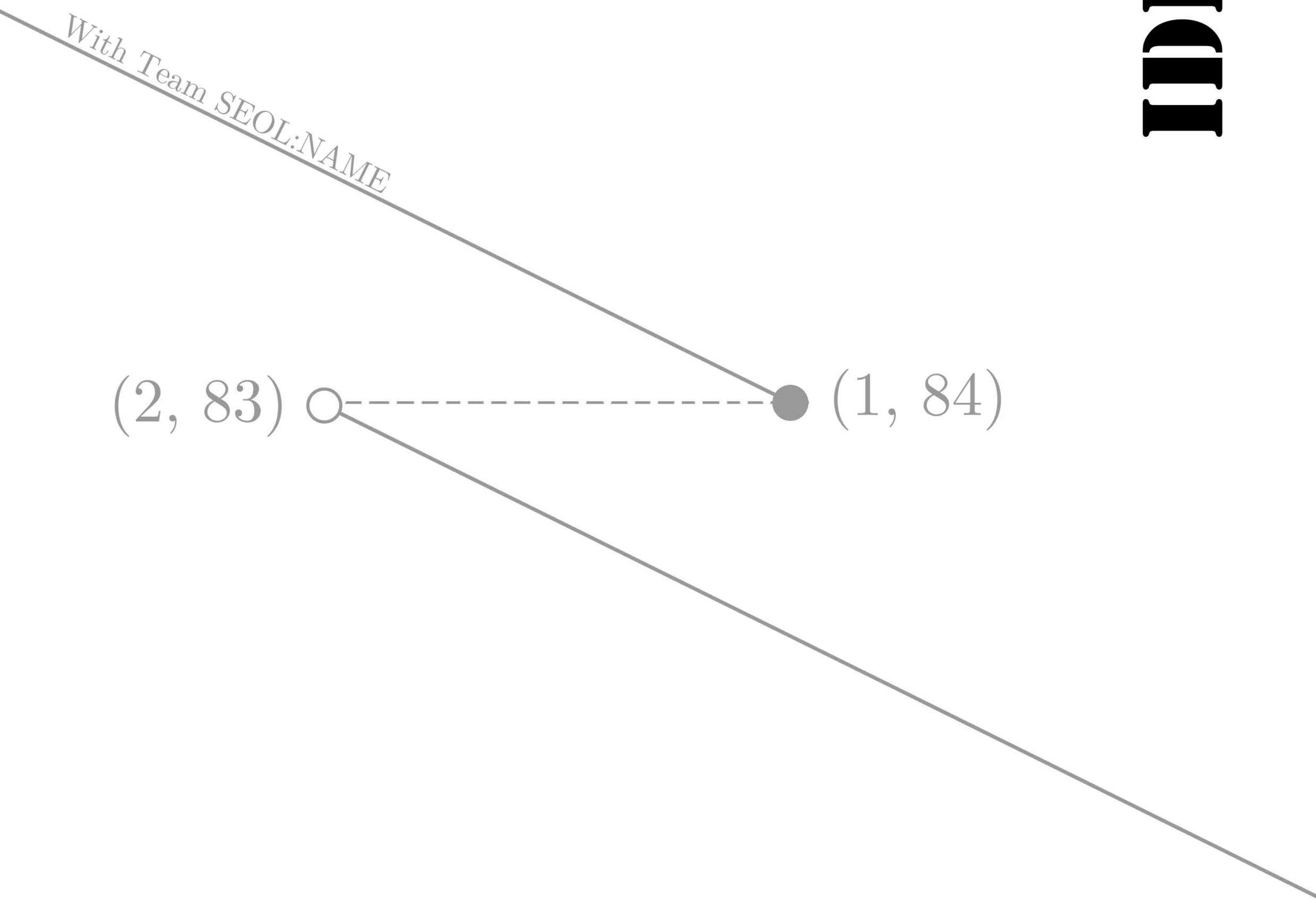
2025학년도 수능 대비를 위한

# IDEA PACK




## 24 수능 분석

문항별 IDEA + 기조 분석 + 유사 기출

설레임 모의고사
Team SeolName

# 활용 방법 총소개!

**[누가 쓰면 좋나요?]**

- 기출문제를 처음 푸는 학생들!
- 기출문제를 풀었으나 제대로 된 아이디어나 발상을 캐치하고 가고 싶은 학생!
- 최근 기조를 통해 앞으로의 공부 방향성을 잡고 싶은 학생

**[1단계] 24 수능 풀어보기**

제공된 8페이지에는 24 수능 공통과목 문항들이 수록되어 있습니다.
단! 각 문항들에 힌트들이 있어, 처음 푸는 학생들은 이 힌트들을 참조해서 풀면 됩니다.
자신이 만약 사고력을 기르려는 목적으로 힌트 없이 문제를 풀고 싶다면,
평가원 사이트에서 공식 기출문제를 푼 다음 2회독 때 참조하는 방향으로 활용해도 좋습니다.

**[2단계] 최신 기조 살펴보기**

문제지 다음 섹션에는 칼럼 형태의 최신 기조를 분석한 글이 있습니다.
이 글을 읽으면서 중요한 문제들, 공부법, 앞으로의 방향성 등을 스스로 생각해볼 수 있을 것입니다.

**[3단계] 복제품으로 훈련하기**

4점 및 주요 3점 문항에 대한 풀이 전략과 해설을 상세하게 적어 놓았고,
[왜 틀렸니?] 라는 파트에서 주요 오답이 발생할만한 부분에 대한 피드백(ADVICE)을 제공하였습니다.
틀리지 않았더라도 한 번쯤 보면 좋은 학습이 될 것입니다.
또한, 이와 유사한 형태, 또는 비슷한 아이디어를 활용하는 문제를 2개씩 제공하여
더욱 해당 개념에 익숙해질 수 있도록 하였습니다.

**Team SEOL:NAME이 여러분과 함께합니다.**

서울대 수학교육과 설레임팀 드림

SECTION 01

# 24수능 실전 훈련

## STUDY PLAN

다음 페이지부터 24 수능 1~22번 문항이 담겨있습니다.
단, 약간의 HINT와 실전팁과 함께!
자신의 실력이 약하다고 판단되면 이 힌트들을 이용하면서
문제를 풀어보고, 사고력을 기르고 싶다면 힌트 없는 버전으로
문제를 푼 뒤 이쪽으로 다시 돌아오는 것도 방법일 것입니다.

제 2 교시

# 수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 $\theta$ 에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & (x<2) \\ x^2+a & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

IDEA

오랜만에 그래프가 없는 형태의 극한이 나왔지만, 익숙한 형태니 PASS!

**5.** 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

**6.** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, $a_1+a_2$의 값은? [3점]

① 27　② 24　③ 21　④ 18　⑤ 15

**7.** 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $\alpha$와 $\beta$는 상수이다.) [3점]

① $-4$　② $-1$　③ 2　④ 5　⑤ 8

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

IDEA

⇒ 수험생의 심리 : 어.. 왜 굳이 좌변을 인수분해 안 된 형태를 줬지..?
설마 트릭 같은 거 거는건가?

f(x)가 삼차함수라고 줬으니까 괜히 트릭 거는 문제 아닌가 당황할 필요 없다!
항등식 풀어서 f(x) 구하는 거 여러 번 해봤잖수~

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, $4^m$의 값은? (단, $m$은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

IDEA

⇒ 수험생의 심리 : 나 내분점 공식 까먹었는데..? 망했다.

내분점 공식은 물론 기억해 두긴 하자..!
A(x)와 B(y)를 m:n으로 내분하는 점의 좌표는 $\frac{nx+my}{m+n}$ 이다!

실전팁 **내분점 공식을 까먹었을 때의 대처법?**

적어도 '내분'이 선분을 m:n으로 나눈다는 사실은 알고 있지? 그러면
'1에서 $\log_5 3$을 뺀 것'과 '$\log_5 12$에서 1을 뺀 것'의 비가 m:(1-m)이겠다!

$$m:(1-m)=(1-\log_5 3):(\log_5 12-1)$$

으로 쓸 수는 있겠다!

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 $t$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

IDEA

위치 차가 아니라 '거리'를 물어보고 있다는 점! 함정에 속지 않도록 하자.
'거리' 개념은 항상 절댓값을 포함한다!
즉, 움직인 거리를 구할 때도 무엇을 생각해야 하나? ⇒ 절댓값!

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

**IDEA**

첫 번째 조건 : 공차가 0이 아니려면 $a_8 = -a_6$ 겠지?

등차수열에서 항 두 개가 주어지면 어떻게 해야 할까?

두 번째 조건 : '분수 형태의 합' + '분모가 두 일차식의 곱' ⇒ '부분분수분해'

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

**IDEA**

일단 함수 f(x)를 알고 있으니까 이 친구 정도는 그려볼 수 있지 않겠어?

g(x)라는 친구가 어떤 친구인지 모르니까 t의 값을 적절히 변화시켜가면서

g(x)라는 함수에 익숙해져야겠다!

**실전팁** **일차함수를 분석하는 방법**

일차함수를 보는 자세는 '지나는 한 점'과 '기울기' 그저 이 두 가지이야.

즉, -(x-t)+f(t)라는 함수도 결국은 점 (t, f(t))를 지나고 기울기가 -1인

일차함수라는 점 뿐이지.

다시 말해 함수 g(x)는 x=t에서 연속이므로 x=t 전까지는 y=f(x)를 따라가다가

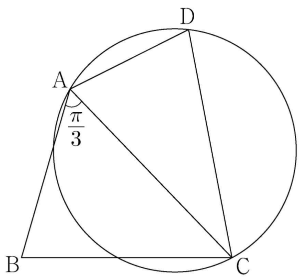
x=t 이후부터는 -1인 직선을 따라가는 연속함수라고 볼 수 있겠어!

**13.** 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD 가 있다. 삼각형 ABC 의 넓이를 $S_1$, 삼각형 ACD 의 넓이를 $S_2$ 라 하고, 삼각형 ACD 의 외접원의 반지름의 길이를 $R$ 이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$ 일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ 의 값은? [4점]




① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

**IDEA**

삼각함수 도형 문제는 보통 시작부터 사인법칙 or 코사인법칙 등을 쓸 수 있는 곳을 남겨두는 곳이 많아.
이 문제에서는 삼각형 ABC의 변 또는 각도에 대한 정보가 3개 주어져 있으니까 이 정보만으로도 충분히 삼각형 ABC를 확정시킬 수 있어.

**실전팁** **도형 문제의 기본**

기본적인 구성 요소는 '코사인법칙', '사인법칙', '삼각형의 넓이'라는 점에 주목!
① 우선 도형을 보자마자 코사인법칙이나 사인법칙, 삼각형의 넓이와 관련하여 정보를 찾을 수 있는 곳이 있는지 주목하기
② 안 쓴 조건들을 중심으로 어떻게 사용할지 머리 굴리기!

**14.** 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

**IDEA**

f(x)라는 함수는 x=2 이전의 부분은 이미 전부 결정되었고, $x>2$인 부분도 어느 정도 형태는 정해진다는 거 알겠니?
물론 b의 값이 2 이하인지, 2보다 큰 지에 따라 f(x)의 $x>2$에서의 모양이 조금 다르긴 할 거야! 하지만, 기껏 해봐야 b=1, b=2 이 두 개잖아?
두 경우에 f(x)를 살펴보면서 주어진 조건을 만족할 수 있는지 살펴보자.

**실전팁** **만나는 점의 개수로 정의된 함수**

정말 자주 나오는 함수이기 때문에 꼭 주목!
어떤 함수 f(x)의 그래프와 직선 y=t가 만나는 점의 개수를 g(t)라 하는 경우가 정말 많다! 이때, g(t)가 불연속이 되는 후보는 어디?

첫 번째! 직선 y=t가 y=f(x)의 점근선일 때
두 번째! 직선 y=t가 y=f(x)의 접선이 될 때
세 번째! y=t가 f(x)의 불연속점을 지날 때

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

**IDEA**

$a_6$, $a_7$은 이웃한 항이기 때문에 $a_6$이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어
$a_6+a_7$의 값을 하나의 문자에 대해 나타낼 수 있어!
⇒ 잘 하면 $a_6$의 값을 하나로 정할 수 있다는 뜻!

그럼 $a_6$ 앞쪽의 항은 어떻게 구할까?
⇒ 마찬가지로 바로 앞 항이 홀수이냐, 짝수이냐에 따라 경우 나누면서
$a_1$까지 추적해나가기!

**실전팁 정추적과 역추적**

귀납적으로 정의된 수열 문제에서 특정한 몇 개의 항이 주어지면,
그때부터는 그 앞의 항 또는 그 뒤의 항을 추적하는 것이 관건이야.

앞쪽에서 뒤쪽으로 항을 추적해나가는 것을 '정추적'
뒤쪽에서 앞쪽으로 항을 추적해나가는 것을 '역추적'

이라고 하는데, 이 문제의 경우 역추적에 해당하지.
물론 이러한 추적을 해야 할 때는 시험지에 쓸 수 있을 정도로 항의 개수가 적을 때에 해당해. 다시 말해, $a_{20}$에서 $a_1$을 추적해야 하는 상황처럼 추적할 게 엄청 많은 경우는 다른 방향을 모색해 봐야겠지. (규칙성 찾기, 대입 etc.)

**단답형**

16. 방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 $x$의 값의 합을 구하시오. [3점]

**실전팁** **부등식을 만족하는 삼각함수**

단순히 식을 풀려고 하면 머릿속이 잘 안 돌아갈거야.
그럴 때는 그래프를 그리거나 단위원을 그리고 주어진 부등식에 해당하는 범위가 어디인지 찾기!

그래프를 그린다면 원하는 부등식의 해에 해당하는 부분을 표시하는 방법!
단위원을 그린다면 x좌표가 cos, y좌표가 sin임을 이용해서 푸는 방법!

어떤 것이든 좋으니 조금 더 직관적으로 풀 수 있는 방법에 익숙해져 봐!
이건 3점 문항 뿐만 아니라 4점 문항을 효율적으로 풀 때에 있어서도 중요해.

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 $\mathrm{O}$가 아닌 점을 $\mathrm{A}$라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 $\mathrm{B}$라 하자. 점 $\mathrm{A}$가 선분 $\mathrm{OB}$를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

**IDEA**

'원', '지름' 두 키워드가 나오면 뭐가 빠질 수 없다?
직각이 빠질 수 없지! 다시 말해, ∠OAB=90°라는 사실을 캐치!
어떤 각이 수직이라는 것을 좌표나 직선의 관점으로 해석하려면 어떻게 하지?

**21.** 양수 $a$에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 $t$에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 $a$의 최솟값을 구하시오. [4점]

**IDEA**

앞의 14번 문제와 동일해. x=-1부터 x=6까지는 함수가 모두 정해져 있고,
x=6부터는 a의 값에 따라 아주 살짝씩만 모양이 달라지지.
그렇다면 우리는 t의 값에 따라 g(t)라는 함수가 어떻게 변화하는지 알 수 있지 않을까?

**실전팁** **지수/로그함수의 최근 기조**

기존의 지수/로그함수 문제는 보통 그래프를 모두 그려주고 기하학적 성질을 이용하여 문제를 풀리는 형태가 많이 나왔어.
하지만 최근 들어서는 지수함수나 로그함수의 점근선을 이용하는 형태의 문제도 자주 출제되고 있지. 이 문제가 그러한 형태의 대표적인 문제야.
핵심은 '그래프가 안 그려져 있는' 문제라는 것이지.

**22.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 $k$는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

**IDEA**

두 값을 곱했을 때 0보다 작다는 의미는 두 값의 부호가 다르다는 뜻!
그런데, 삼차함수를 아무렇게나 그려봐도 f(k-1)f(k+1)<0인 k가 하나쯤은 존재할 것 같지 않아? 하지만 주어진 조건을 만족시키도록 하는 케이스가 분명히 존재해.
위의 부등식이 '≤'가 아니라 '<'라는 점에 잘 집중해보자.

**실전팁** **다항함수의 추론 문제**

어떤 함수가 주어진 조건을 만족시키도록 하는 경우를 찾으려면
일단 죽이 되든 밥이 되든 아무 함수나 넣어본 다음 생각해보는 것도 전략이야.
아무 함수나 넣고 어떤 조건을 만족시키지 않는지 살펴봐.
그러면 '그 조건'을 만족시키기 위해 어떤 KEY가 필요할 지를 이제 고민해보는 거지.

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

SECTION 02

# 최신 수능 기조 예측

## STUDY PLAN

다음 페이지부터 2024학년도 수능을 총평한 내용이 담겨 있습니다.
단순히 신문 읽듯이 읽는 것이 아니라 현재의 기조로 하여금 자신이 수학 과목을 어떻게 학습해야 할지에 대한 길을 찾기 바랍니다.
특히, 기출문제의 중요성이나 취약한 부분들에 대한 출제 기조 등에 대해 직접 체감하고 가시길 바랍니다.

최근 경향 예측 1

## 고1 개념 융합형 문항이 많다!

2024 수능은 전반적으로 고1 개념이 직접적으로 융합된 문항이 많이 출제되었다.
다음은 이번 시험 **공통과목**에서만 관찰된 고1 개념 융합 문항들이다.
기존의 기조에 비해 눈에 띌 정도로 고1 개념 융합 문제들이 늘어났다.

**2024학년도 수능 8번** 항등식 개념 융합

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\underline{xf(x)-f(x)=3x^4-3x}$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ 의 값은? [3점]

**2024학년도 수능 9번** 내분 개념 융합

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$ **으로 내분**하는 점의 좌표가 $1$일 때, $4^m$의 값은? (단, $m$은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

**2024학년도 수능 14번** 이차함수 개념 융합

두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 $1$이 되도록 하는 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

**2024학년도 수능 21번** 이차함수 개념 융합

양수 $a$에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 $t$에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 $5$가 되도록 하는 양수 $a$의 최솟값을 구하시오. [4점]

그렇다면 이러한 문항들을 풀기 위해 고1 개념을 모두 다시 풀어봐야 할까?

위의 문항들에서는 분명 고1 개념들이 융합되어 있지만 그것을 메인으로 하여 묻고 있지는 않다. 다시 말해, 우리가 굳이 고1 심화 개념들을 공부하면서까지 이 문제들을 풀 필요는 없다는 의미이다. 그럼에도 불구하고 개념들을 까먹었을 그대들을 위해 공부해야 할 몇 개의 단원을 추천하면

① **나머지정리 :** 어떤 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면 그 다항식은 $x-a$를 인수로 가진다.

② **이차함수 :** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 직선 $x=-\frac{b}{2a}$에 대하여 대칭이고,
동시에 $x=-\frac{b}{2a}$에서 극값을 가진다.

③ **내분과 외분 :**
$\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(y)$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\frac{nx+my}{m+n}$이고,
$m:n$으로 외분하는 점의 좌표는 $\frac{nx-my}{m-n}$이다.
특히, 외분 개념은 아직 출제된 바가 적은 만큼 까먹지 않도록 주의하자.
외분 개념은 공식으로 외우기보다는 다음과 같이 기억하자.

| 점 P가 두 점 A, B를 $m:n$으로 외분하면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BP}}=m-n:n$이다. |
|---|

그림으로 그려서 기억하는 편이 효율적일 것이다.

④ **연립방정식/부등식 :** 이 부분은 기출문제를 풀다보면 자연스럽게 익숙해진다.

⑤ **절대부등식 :** $a, b, x, y$가 음이 아닌 실수이면
[산술-기하평균 부등식] $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$이고, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.
[코시-슈바르츠 부등식] $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$이고, 등호는 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$일 때 성립한다.

⑥ **집합의 포함관계 :** $A \subset B$이면 집합 $B$는 집합 $A$를 포함한다는 의미이고,
$n(A)$는 집합 $A$의 원소의 개수이다.

⑦ **역함수 :** 미분 가능한 함수 $f(x)$가 역함수가 존재하면 $f'(x) \geq 0$이고,
$f^{-1}(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

최근 경향 예측 2

## 그래프 추론이 약해졌다나 뭐라나

예전 기출문제들은 보통 다항함수를 직접적으로 추론하는 형태의 문제가 자주 출제되곤 하였다. 예를 들어, 삼차함수 $f(x)$에 대한 정보를 몇 개 주고 그것을 바탕으로 $f(x)$를 추론하는 방식을 의미한다.
하지만 최근의 경향성은 $f(x)$라는 함수에 대한 정보를 거의 주고, 일부 미지수를 주거나 $f(x)$로부터 새로운 함수를 만드는 방식으로 변별을 주고 있다. 즉, $f(x)$의 그래프를 직접적으로 추론하는 형태의 문항은 지양하고 있다.

**Q. 왜 이런 식으로 바뀌는가?**

함수의 그래프 추론하면서 '스킬적인 요소'를 배제하기가 정말 어렵다.
미적분에서 흔히 배우는 '변곡점' 개념부터 시작해서 '삼차함수의 대칭성', '삼차함수의 2:1 비율 관계' 등으로 알려진 여러 스킬적인 요소들이 있는데 이것들을 배제하면서 문제를 출제하기란 정말 어려운 것이 현실이다.

다음 문항들이 이러한 점을 대변해주는 문제들이다.

**2024학년도 수능 12번** 함수 f(x)의 식을 모두 제공

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

**2024학년도 수능 14번** f(x) 중 삼차함수 부분은 이미 모두 제공

두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 $1$이 되도록 하는 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

**2024학년도 수능 20번** a의 값은 추론해야 하지만, f(x)를 모두 그리지 않아도 풀림

$a>\sqrt{2}$ 인 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\,0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

**2024학년도 수능 22번** f(x)의 그래프를 그리긴 하지만 극값을 이용하는 형태는 아님

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여 $f(k-1)f(k+1)<0$을 만족시키는 정수 $k$는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

이 문제들은 모두 그래프를 추론하는 것이 아닌 어떤 특정 상황을 만족하는 삼차/사차함수 위의 점을 구하거나, 삼차함수가 아닌 다른 요소에서 변별을 줌으로써 그래프 추론의 변별도를 확 떨어뜨렸다는 특징을 가지고 있다.

물론 이것이 그래프 추론 문제가 아예 안 나올 것임을 암시하는 것은 아니다. 다만, 이전과는 다르게 그래프 추론을 **'의식적으로 안 내려고 한 것'이 관찰되는 만큼**, 학생들은 기출문제 뿐만 아니라 N제, EBS, 실모 등 시중에 나와있는 다양한 자료를 이용하여 연습을 꾸준히 할 필요가 있다.

잠깐 홍보 들어갈게여!

SCAN ME

**Team SEOL:NAME과 PIOTICS가 함께 만든 25수능실전 자문훈련서!**

단순히 N제만을 푸는 것이 아닌 기출문제의 빈출 유형들을 아이디어를 떠올리는 방법부터 실전에 적용시키는 방법까지 학습하면서 기출 학습을 더욱 효율적으로 할 수 있는 책입니다.

네, 굉장히 힘들게 만들었고 좋은 내용 많이 넣었으니까 사달라는 몸부림이었습니다ㅠㅠ

**다시 칼럼 들어갈게영>_<**

최근 경향 예측 3

## 기출문제와의 연계성이 짙어졌다

이번 수능 뿐만 아니라 6월, 9월, 수능 전반에 걸쳐서 나타나는 변화로 기출문제와의 유사성이 높은 문제들이 출제되고 있다는 점이다.
이에 대한 연습 파트는 다음 장에 나와 있으니 우선 지금은 기출문제의 중요성을 깨닫는 시간을 갖도록 하자.

### CASE 1. 2106가06

**009**

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, $4^m$의 값은? (단, $m$은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

**9-2** [2021년 6월 가형 6번]

두 양수 $a$, $b$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

왼쪽은 본 수능의 9번 문항이고, 오른쪽은 [2021학년도 6월 가형 6번] 문항이다.
물론 수능 문제는 완전히 겹치면 안 되기 때문에 문제가 똑같을 수는 없지만, 두 점의 좌표를 주고 이를 변형하여 원하는 식을 얻어낸다는 점에 있어서 공통점을 가진다.
실제로 위의 오른쪽 문제도 표현이 다를 뿐 두 점을 2:3으로 외분하는 점이 원점이라는 사실을 이용하는 문제이기 때문에 표현만 다른 쌍둥이 문제라 볼 수도 있다.

### CASE 2. 1904나14

**011**

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8,\quad \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

**11-1** [2019학년도 4월 나형 14번]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_9 = |S_3| = 27$일 때, $a_{10}$의 값은? [4점]

왼쪽은 본 수능의 11번 문항이고, 오른쪽은 [2019학년도 4월 나형 14번] 문항이다.
이 문제는 비록 교육청 문항이긴 하지만 쓰이는 아이디어가 매우 유사하다.
절댓값이 같다는 점을 통해 절댓값 기호 내부의 값의 부호를 판단하는 형태는 기출에서도 많이 빈출되었고, 이 외에 실모 등에서도 많이 보인다.
또한, 등차수열을 부분분수로 분해하는 형태의 패턴은 이제 지루할 정도로 많이 보이는 패턴이다.

CASE 3. 231115

**015**

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

**15-2** [2023학년도 수능 15번]

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$
(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수}\times) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수}) \end{cases}$$

이다.

마지막은 전형적인 귀납적으로 정의된 수열 소재이다.
왼쪽은 본수능 15번 문항이며, 오른쪽은 [2023학년도 수능 15번]이다.
두 문항 모두 특정한 항을 주어지게 하고 ‘역추적’을 하는 데에 목적을 두고 있다.
정의된 방법이 조금 다르긴 하지만, 결국 왼쪽은 홀짝(2의 배수), 오른쪽도 3의 배수를 기준으로 관찰하고 있다는 점에서 정수론적인 특성도 보이고 있다.
또한, 문제의 가정 전반적으로도 ‘모든 값의 합’ 등을 물어보는 등 형태적 측면에서도 유사한 모습이 많이 관찰된다.

이러한 형태의 수열 문제가 자주 출제되는 이유는 하나이다.

**학생들이 많이 못 맞춘다. ⇒ 아직 평가 목표를 달성하지 못했다.**

학생들이 충분히 이러한 형태의 문제를 많이 맞춘다면 평가 목표를 달성했다 판단하고 평가원도 다른 문제를 출제할 명분히 충분할 것이다. 하지만, 학생들은 이러한 형태의 문제가 계속 출제됨에도 불구하고 계속해서 오답을 기록하고 있다.
**그렇다면 평가원은 학생들이 이러한 형태의 문항의 정답률이 충분히 높아질 때까지 출제를 하는 것이 합리적이다. 출제자도 사람이라 굳이 아무런 하자가 없으면서 학생들이 잘 틀려주는 유형을 없애면서 새로운 문제를 만들고 싶어하지는 않기 때문이다.**

그렇다면 학생들의 입장에서는 이러한 형태의 문제를 맞출 수 있도록 충분히 노력해야 할 것이다.

최근 경향 예측 4

## 3점 문항의 난이도가 4점보다는 확실히 쉽게 나온다

예전 기출들을 보면 3점 문항과 4점 문항 사이 애매한 3.5점 정도의 문항들이 자주 출제되었다. 특히, 8번, 19번 문항들의 경우 이러한 경향이 매우 짙었는데, 최근 들어서는 3점 문항의 난이도가 쉽게 출제되고 있는 편이다.

물론 19번 문항의 정답률이 3점 치고 매우 낮았던만큼 이에 동의하기 어려운 학생들도 있겠지만 우선 다음 문항들을 살펴보자.

**2024학년도 수능 7번** 개인 소감으로는 4번 정도에 들어가도 위화감이 없을 것 같은..

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $\alpha$와 $\beta$는 상수이다.) [3점]

**2024학년도 수능 8번** 이건 사실 진짜 계산 문제이죠

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

**2024학년도 수능 19번** 어려워 보이지만 생각보다 쉽습니다.

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 자연수 $x$의 값의 합을 구하시오. [3점]

7~8번이 매우 쉬운 문제였다는 점에는 동의할 것이다. 4점 처음 문항이 내분점을 활용하는 다소 무거운 문제였다는 점과 10번 문항의 계산량을 고려하면 7, 8번은 애교 수준으로 쉬운 문항이다. 하지만, 19번에 대해서는 어려운 문제라는 점에 모두 동의를 할 것이다.

실제 정답률도 낮은 편이었으니 말이다.

그렇다면 3점이 쉬워지고 있다는 주장은 그릇된 주장일까? 그것은 단정하기 어렵다.

다음 페이지에서 20번 문항을 살펴보자.

**2024학년도 수능 20번** a의 값은 추론해야 하지만, f(x)를 모두 그리지 않아도 풀림

$a>\sqrt{2}$ 인 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\,0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$ 의 값을 구하시오. [4점]

다음은 EBS에서 발표한 공식 정답률 표이다.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 84.7 | 4 | 25 | 주관식 | | | | |
| 6 | 14 | 84.5 | 4 | 1 | 15.5 | 11.6 | 36.6 | 15.9 | 20.4 |
| 7 | 21 | 78.1 | 4 | 10 | 주관식 | | | | |
| 8 | 27 | 76.6 | 3 | 1 | 23.4 | 12.8 | 20.2 | 12.4 | 31.3 |
| 9 | 19 | 75.2 | 3 | 32 | 주관식 | | | | |

위를 보면 알 수 있듯 20번이 21번보다도 어렵게 출제되었다. 그렇다면 19번은 ‘상대적인’ 난이도 밸런스를 맞추기 위해 어느 정도 어렵게 출제되는 것이 당연한 이치이다.
**갑자기 훅 급발진하는 느낌을 최소화하기 위함이다.**

즉, 평가원이 목표로 하고 있는 것은 모든 3점 문항이 그 다음으로 오는 ‘첫 4점 문항’보다는 꽤 쉽게 출제하는 것을 목표로 하고 있다는 것이다.

정리하면 중위권, 그리고 중상위권 학생들에게 당부하고 싶은 말은 다음 하나이다.

**3점짜리는 무조건 다 맞도록 하자.**

실수도 되도록 용납하지 않는 편이 좋다. 3점짜리가 쉽게 나오는 만큼 3점을 틀리는 것은 수능 전체에 있어 꽤 손해가 크다.
그러니 현재의 수준이 애매하다 판단되는 학생들은 4점 킬러만 공략하는 것이 아니라 3점 문항들도 완벽하게 소화할 수 있도록 노력할 필요가 있다.

SECTION 03

# 복제품과 함께하는 훈련

## STUDY PLAN

다음 페이지부터 앞에서 푼 수능 문제들에 대한 전략, 주요 오답 피드백 등이 담겨 있으며, 이와 관련된 쌍둥이 문항이 담겨 있습니다.
문제를 풀고 자신이 틀린 이유가 있다면 왜 틀렸는지 다시 한 번 확인하는 기회를 가지기 바랍니다.
또한, 유사 유형의 문항을 풀면서 해당 유형에 익숙해지시기 바랍니다.

복제품 풀어보기

## 유사 기출문제 풀이

### 009

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 $1$일 때, $4^m$의 값은? (단, $m$은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

**전략**

내분점의 좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{(1-m)\log_5 3+m\log_5 12}{m+(1-m)}=1$$

$$(1-m)\log_5 3+m\log_5 12=1$$

식을 정리하면

$$\log_5 3+m(\log_5 12-\log_5 3)=1$$

$$m\log_5 4=\log_5 \frac{5}{3}$$

$$m=\log_4 \frac{5}{3}$$

따라서 $4^m=\frac{5}{3}$이다.

**왜 틀렸니?**

**[대표 오답 원인]** 내분점의 공식을 기억하지 못했어요...

ADVICE :

내분점 공식을 외우는 것도 좋은 방법이고,

아니면 내분을 비례식 형태로 생각하는 것도 좋아.

$$1-\log_5 3 : \log_5 12-1=m : 1-m$$

이렇게 말이야.

기억을 잘 못하는 친구들을 위한 방법이지.

다만, 이 비례식에서 $1-\log_5 3$과 $\log_5 3-1$ 중 하필 앞의 것을 쓴 이유는 내분은 **'거리를 나누는'** 개념이기 때문에 항상 $0$보다 큰 값이 와야 하기 때문이야.

$\log_5 12-1$을 쓴 것도 같은 원리이지.

## 9-1 [2018학년도 6월 나형 13번]

좌표평면 위의 두 점 $(1, \log_2 5), (2, \log_2 10)$ 을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

## 9-2 [2021학년도 6월 가형 6번]

두 양수 $a, b$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

## 010

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5, \quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 $t$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

**전략**

두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+5t$$

$$x_2(t)=t^2-7t$$

이다. 두 점 사이의 거리는

**'두 점 사이의 위치 차이의 절댓값'**

이므로 $f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$이다.

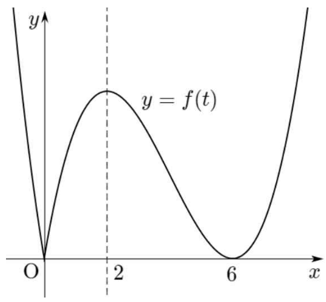
식을 정리하면

$$f(t)=\left|\frac{t^3}{3}-4t^2+12t\right|$$

인데, 이 함수는 곡선 $y=\frac{t^3}{3}-4t^2+12t$를 그린 뒤 $x$축 아래의 부분을 접어올린 것과 같다.

$y'=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$

이므로 곡선 $y=f(t)$를 그리면 다음과 같다.




다행히도(?) $t=2$부터 $t=6$까지 뒤집히거나 하는 상황은 없으니 $a=2$, $b=6$으로 결론짓고 생각하면 된다.

구하는 값은 점 Q가 $t=2$부터 $t=6$까지 움직인 거리이므로

$$\int_2^6 |2t-7|\,dt=-\int_2^{\frac{7}{2}}(2t-7)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$

$$=-\left[t^2-7t\right]_2^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$

$$=\frac{17}{2}$$

왜 틀렸니?

**[대표 오답 원인 1]** ‘점 Q’의 이동거리인데 딴 걸 구했어요..

ADVICE :

사람의 심리는 문제가 거의 다 풀렸을 때 가장 느슨해져.
‘다 풀었으니까 이것만 하면 맞겠지’하는 마음과 함께 마무리를 지으려 하는데 이상하게 답이 안 나왔니?

그것은 자신이 **마지막까지 긴장의 끈을 붙들지 못했기 때문**이라 볼 수 있어.

지금은 실수이겠지만 나중에는 점수 4점을 맞바꾸는 무서운 결과가 생길 수도 있으니 문제에서 물어보는 것을 다시 한 번 살펴보는 섬세함을 갖도록 하자!

**[대표 오답 원인 2]** 거리 개념이 나오면 자꾸 헷갈려요..

ADVICE :

거리는 항상 절댓값이라는 점만 기억해.

두 점 사이의 거리는 $|x_1(t)-x_2(t)|$이고,

어떤 점이 이동한 거리는 $\int_{t_0}^{t_1}|v(t)|dt$라는 점은 기본!

특히, 헷갈리기 쉬운 것이 두 점 사이의 거리를 가끔 $|x_1(t)|-|x_2(t)|$로 쓰는 친구..?

또한, 이동거리를 가끔 $\left|\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt\right|$로 쓰는 친구..?

두 점 사이의 거리라는 말의 뜻은 한국어(韓國語)로 생각하면

**‘두 점의 위치 차이의 크기’**

로 생각할 수 있어.

두 점의 위치 차이가 $x_1(t)-x_2(t)$니까 거기에 절댓값을 씌워서 $|x_1(t)-x_2(t)|$가 나오는거야.

마찬가지로, 이동거리를 $\left|\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt\right|$로 쓰는 친구들..?

우리는 $\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt$를 위치 변화량이라고 배웠는데, 그럼 이 식은 위치 변화량의 절댓값이겠지?

어떤 점이 원점을 출발해서 점 $\mathrm{A}(3)$을 지나 다시 원점으로 오면 위치변화량은 $0$, 이동거리는 $3+3=6$이잖아!

**위치변화량에 절댓값을 씌운다고 이동거리가 되는 게 아니야!**

## 10-1 [2024학년도 9월 13번]

두 실수 $a$, $b$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

## 10-2 [2022학년도 10월 22번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 $t$에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $m_1$이라 하고, 구간 $[t,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $m_2$라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 $k$와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 $t$의 값의 집합은 $\{t\mid 0\leq t\leq 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

## 011

공차가 $0$이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

**전략**

$|a_6| = a_8$이면 $a_8 = -a_6$이거나 $a_8 = a_6$이다.

이 중 공차가 $0$이 아닌 케이스는 $a_8 = -a_6$이다.

등차수열에서 항 두 개의 관계가 나오면 이것은 정리가 가능할 가능성이 매우 높다.

$a_6 + a_8 = 0$이므로 **등차중항의 성질**에 의해 $a_7 = 0$

곧, $a_n = d(n-7)$로 둘 수 있다. ($d$는 공차)

또한, $a_8 \ge 0$이기 때문에 $d > 0$이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{d^2(k-7)(k-6)} \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{5} \left( \frac{1}{k-6} - \frac{1}{k-7} \right) \text{ (부분분수분해)} \\ &= \frac{1}{d^2} \left( \frac{1}{-6} - \frac{1}{-1} \right) \\ &= \frac{5}{6d^2} = \frac{5}{96}\end{aligned}$$

이고, $d > 0$이므로 $d = 4$이다. 합을 계산하면

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 15a_8 = 15d = 60$$

### * 등차중항의 성질(심화)

자연수 $m, n$에 대하여 $a_m + a_n = K$이면,

$$a_{\frac{m+n}{2}} = \frac{K}{2}$$

이다. 이때, $m+n$이 홀수이면 $a_{3.5} = ??$ 이런 값이 나올 수도 있는데, 여기서 ‘$x.5$항’은 실제로 존재하지는 않지만 가상의 항처럼 생각할 수 있다.

예를 들어, $a_1 = 1$, 공차가 $2$인 등차수열에서는

$$a_{3.5} = a_1 + 2.5d = 1 + 2.5 \times 2 = 6$$

으로 생각할 수 있는 것이다.

**왜 틀렸니?**

**[대표 오답 원인]** $a_8 > 0$이라는 사실을 캐치하지 못했어요.

ADVICE :

절댓값이 나오면 그것은 절댓값 안의 부호만을 알려주는 것이 아니라는 점을 명심해야 해. 예를 들어,

$$|A| + B = C$$

라는 꼴의 식이 있다면 그것은 $A = C - B$ 또는 $A = B - C$라는 사실을 알려주지. 이건 아마 익숙할거야.

그런데, 절댓값은 항상 $0$ 이상이라는 사실에서

$$C - B > 0$$

라는 점도 캐치할 수 있어야 해.

## 11-1 [2019학년도 4월 나형 14번]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_9=|S_3|=27$일 때, $a_{10}$의 값은? [4점]

① 23　② 24　③ 25　④ 26　⑤ 27

## 11-2 [2022학년도 3월 13번]

첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자.

$$|S_3|=|S_6|=|S_{11}|-3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$　② $\frac{33}{5}$　③ 7　④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{39}{5}$

# 012

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 와 실수 $t\,(0<t<6)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

## 전략

우선 우리는 $f(x)$ 라는 함수 전체를 알고 있다.

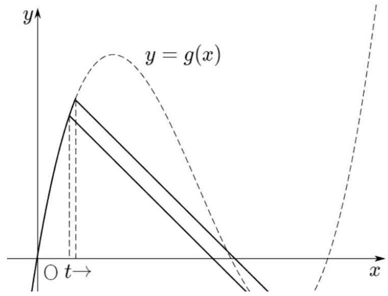
이를 바탕으로 $g(x)$ 라는 함수가 무엇인지를 분석해야 한다.

$x<t$ 에서는 $f(x)$ 를 그대로 그리면 되고,

$x\geq t$ 에서는 기울기가 $-1$ 이며 점 $(t,\,f(t))$ 를 지나는 직선을 그리면 된다.

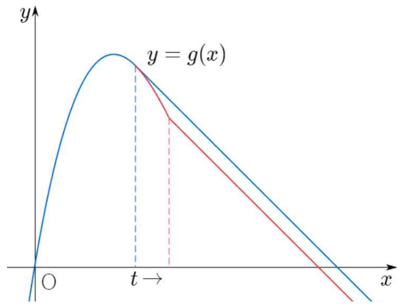
**$t$ 의 값을 0부터 키우면서 넓이를 관찰해보자.**

구하는 넓이가 최대가 되는 지점이 분명 존재할 것이다.




**특히나, 의심이 갈만한 지점 주변에서 구하는 넓이가 어떻게 변화하는지 더욱 유의깊게 살펴보아야 한다.**

($f(x)$ 가 $x=t$ 에서 극대, $f'(x)=-1$ 이 되는 지점 등)




실제로 정확히 $f'(x)=-1$ 이 되도록 하는 $x=t$ 까지, 구하고자 하는 넓이의 값은 커졌다가 $x=t$ 이후부터는 다시 작아진다.

곧, $f'(t)=-1$ 인 $t$ 를 먼저 구해야 한다.

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-10x+18)$$

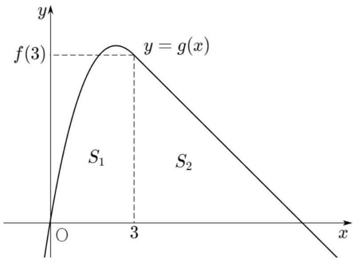
에서 $f'(t)=-1$ 이면

$t^2-10t+21=(t-3)(t-7)=0$

$0<t<6$ 이므로 $t=3$

따라서 구하는 넓이는 그림에서 볼 수 있듯

$\int_0^3 f(x)dx$ 의 값$(=S_1)$과 한 변의 길이가 $f(3)$ 인 직각이등변삼각형의 넓이$(=S_2)$의 합이다.




$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{9}(x^3 - 15x^2 + 54x)dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4} - 5x^3 + 27x^2\right]_0^3 = \frac{57}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times f(3) \times f(3) = \frac{1}{2} \times 6^2 = 18$$

$$\therefore\ \frac{57}{4} + 18 = \frac{129}{4}$$

**왜 틀렸니?**

**[대표 오답 원인 1]** $g(x)$라는 함수 자체를 해석하지 못했어요

ADVICE :

해석을 못했다면 아마 $x > t$인 부분에서의 $g(x)$를 말하는 거겠지? 이 함수는 일차함수야.

결국 모든 일차함수는 기울기와 지나는 점 하나가 결정되면 모두 끝난다는 사실을 명심해.

$x > t$에서 $g(x)$의 기울기는 $-1$이고, 이 직선은 점 $(t, f(t))$를 지나.

다시 말해, $g(x)$는 $x = t$에서 연속이 되도록 기울기가 $-1$인 직선을 이어붙인 것이라 할 수 있지.

이와 같은 방식으로 직선이 나왔을 때는 다음 두 가지

① **기울기**

② **지나는 한 점**

에 주목하여 문제를 해결할 수 있도록 하자.

**[대표 오답 원인 2]** 구하는 최대가 되는 때가 언제인지 모르겠어요

ADVICE :

대수적으로 해석이 어렵다면 직접 $t$의 값을 변화시켜가며 양상을 관찰해야 하지.

어떤 함수의 최대, 최솟값을 알아보려면 변수의 값을 변화시켜가며 어디에서 최대, 어디에서 최소가 될 지를 직관적으로 이해하는 방법이 효과적이야.

이 방법을 잘 이용하면 21번 문항도 정답에 이를 수 있어.

12, 14, 21번 모두 비슷한 논리라는 점! 기억해두기!

## 12-1 [2020학년도 7월 나형 28번]

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2} \{f(x)+x^2-1\}^2 dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[4점]

## 12-2 [2023학년도 9월 14번]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 $k$가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

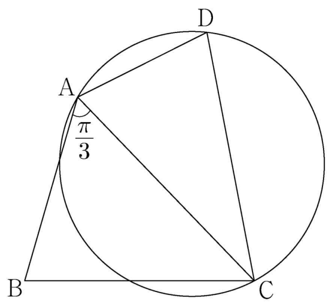
① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 013

그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=\sqrt{13},$$
$$\overline{AD}\times\overline{CD}=9,\ \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD 가 있다. 삼각형 ABC 의 넓이를 $S_1$, 삼각형 ACD 의 넓이를 $S_2$라 하고, 삼각형 ACD 의 외접원의 반지름의 길이를 $R$이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ 의 값은? [4점]




① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

**전략**

삼각함수 도형 문제의 핵심은

① **사인법칙**

② **코사인법칙**

③ **삼각형의 넓이**

이렇게 3가지라 볼 수 있다. 문제를 처음 보자마자 이러한 요소들을 바로 쓸 수 있는 곳을 우선 찾아보자.

**삼각형은 두 변과 한 각의 정보가 주어지면 코사인법칙**
**두 각의 정보가 주어지면 사인법칙**

을 쓰기 좋다는 점을 명심하며..

삼각형 ABC를 보면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\angle BAC$에 대한 정보가 주어져 있다. **곧, 두 변과 한 각의 정보가 주어져 있으니 여기서는 코사인법칙을 사용하면**

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\,\overline{AC}\cos(\angle BAC)$$
$$=3^2+\overline{AC}^2-2\times3\times\overline{AC}\times\frac{1}{2}$$
$$=13$$

이 방정식을 풀면 $\overline{AC}=4$이다.

이제 삼각형 ABC 의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

$S_2=\frac{5}{6}S_1$ 이므로 $S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

이때, $S_2$에 대한 식

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$$
$$=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

에서 $\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$이므로 삼각형 ACD에서 **변 AC, 이에 마주보는 각인 ADC에 대한 정보를 알고 있기 때문에 사인법칙**을 쓸 수 있다.

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$$

정리하면 $R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$ 이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{54}{25}$$

## 왜 틀렸니?

**[대표 오답 원인]** 사인법칙과 코사인법칙을 어디서 어떻게 써야 할지 모르겠어요

ADVICE :

삼각형에서 사인법칙, 코사인법칙을 쓰는 신호는 다음과 같이 정리할 수 있어. 대부분의 경우 맞아 떨어지는 신호니까 기억해두도록 하자.

**① 두 각의 크기에 대한 정보가 주어진 경우**

사인법칙을 이용하면 마주보는 두 변의 길이비를 알 수 있어.

**② 두 변의 길이와 한 각을 아는 경우**

이건 빼박 코사인법칙을 이용하라는 의미이지.

**③ 두 변의 길이의 곱이 주어진 경우**

두 변의 길이와 관련된 요소가 어디에서 발견될까?
보통 코사인법칙의 막바지 부분에서 자주 보이고, 그 외에도 삼각형의 넓이를 구할 때도 많이 쓰여.

**④ 외접원의 넓이/반지름 등이 주어진 경우**

이건 사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$을 쓰라고 대놓고 말하는거야.

**또, 사인법칙을 쓰는 각도에 대해서는 일부러 사인값으로 주고, 코사인법칙을 쓰는 각도에 대해서는 일부러 코사인값을 줘서 학생들이 원하는 풀이로 유도하게끔도 하지.**

예를 들어, 이 문제에서는 지금 각 ADC의 사인값을 물어보고 있잖아? 그렇다면 각 ADC에 대하여 사인법칙을 쓸 대비를 해 두는 편이 좋겠지?

## 다시 들어온 홍보 시간~

Team SEOL:NAME과 PIOTICS가 함께 만든

**25수능 대비 자문훈련서!**

SCAN ME

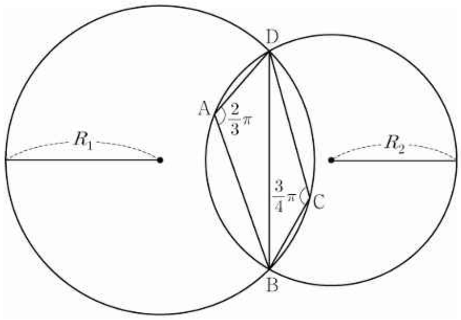
단순히 N제만을 푸는 것이 아닌 기출문제의 빈출 유형들을 아이디어를 떠올리는 방법부터 실전에 적용시키는 방법까지 학습하면서 기출 학습을 더욱 효율적으로 할 수 있는 책입니다.
지금까지 정리된 이러한 내용들을 테마별로 학습할 수 있는 좋은 교재이니, 많은 관심 부탁합니다!
굉장히 힘들게 만들었고 좋은 내용 많이 넣었으니까 사달라는 몸부림이었습니다ㅠㅠ

## 13-1 [2024학년도 9월 20번 - 빈칸 제거]

그림과 같이

$\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 $R_1$, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 $R_2$라 하자.

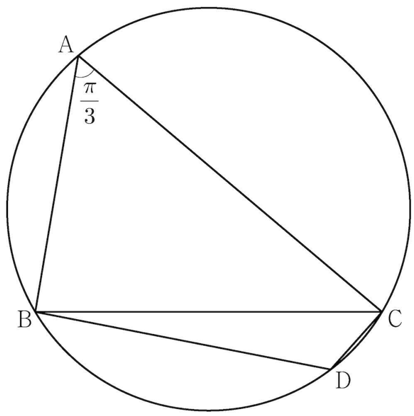



$72\times(R_1\times R_2)^2$의 값을 구하시오. [4점]

## 13-2 [2022학년도 9월 12번]

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



## 014

두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

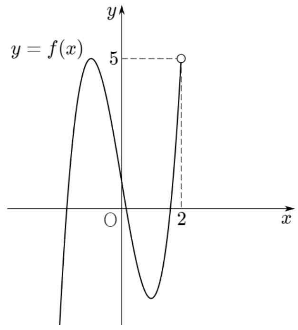
$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 $1$이 되도록 하는 두 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

**전략**

우선 $f(x)$의 $x \le 2$ 부분의 개형을 알고 있으니 이 구간을 먼저 그리고 생각하자.




다음으로 $x>2$에서의 개형을 결정해야 하는데,

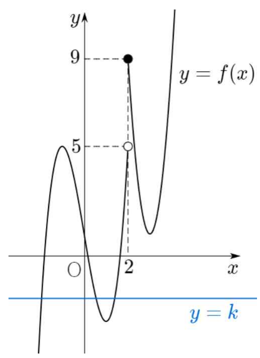
[발상의 방법]

**$b=1, 2$일 때만 아니면, $x>2$인 부분에서의 개형도 어느 정도 확정이 된다는 사실을 생각해보자.**

$b=1, 2$일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(2, \infty)$에서 증가하므로 $k$의 값이 함수 $y=2x^3-6x+1$의 극댓값보다 작고 극솟값보다만 크면 무조건

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$이다.

따라서 $b \ge 3$이고, 함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$는 $x>2$에서 최솟값을 가진다.




$g(t)$라는 함수는 **$x$축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수**와 관련되어 있다.

즉, 함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$가 좌우로 길고 짧은 것은 중요한 것이 아니고,

**오직 $f(x)$의 최솟값만이 $g(t)$의 운명을 결정**시킨다.

그러면 그 최솟값이란 어떤 값이어야 할까?

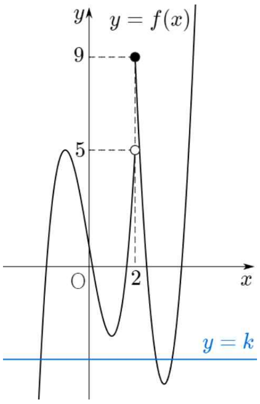
위의 상황처럼 ⓐ$\underline{y=a(x-2)(x-b)+9\text{의 최솟값}}$이 ⓑ$\underline{y=2x^3-6x+1\text{의 극솟값}}$보다 크면,

즉, ⓑ$<$ⓐ이면 ⓑ$<k<$ⓐ일 때 모두

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$이 되어 이러한 $k$가

무수히 많이 존재하게 된다.

마찬가지로 ⓐ$<$ⓑ일 때는 그림이 다음과 같다.




이 경우는 ⓐ$<k<$ⓑ일 때,

항상 $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$이 되어

마찬가지로 $k$의 개수가 무수히 많으므로 모순이다.

**우리는 위에서 ⓑ$<$ⓐ일 때, ⓐ$<$ⓑ일 때 모두 조건을 만족할 수 없음을 보였다.**

그러면 남은 경우는 ⓐ$=$ⓑ일 때이다.

정리하면

$y=2x^3-6x+1$의 극솟값은 $x=1$일 때 $-3$이므로

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 최솟값과 같다.

이것까지만 만족하면 이제 충분하다.

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$는 $x=\frac{b+2}{2}$에서

최솟값을 가지므로 대입하면

$$-a\times\left(\frac{b-2}{2}\right)^2+9=-3$$

$$a(b-2)^2=48$$

이를 만족하는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$ $(b\geq 3)$은

$(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$

이므로 이 중 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$

왜 틀렸니?

**[대표 오답 원인 1]** 케이스 구분을 하는 기준을 모르겠어요

ADVICE :

평가원은 불필요하게 많은 케이스 구분을 하지 않아.

그렇기 때문에 4~5개씩 케이스 구분을 하는 경우가 생기면 내가 푸는 이 풀이가 맞는지에 대해 생각해보아야 하지.

이 글을 쓰는 나의 기준으로는 다음과 같이 판단하곤 해.

1) **케이스 2개 나누기 :** 이 정도는 OK
2) **케이스 3개 나누기 :** 가능성 보이면 OK
3) **케이스 4개 이상 나누기 :** 확실히 풀리는 거 아니면 NO

이 문제에서 $b$의 값도 $1$, $2$인 경우와 아닌 경우로 나눈 것도 같은 심리야.

각 케이스들이 별로 살펴볼 게 얼마 없으므로 충분히 해볼만 하다고 생각한 것이지.

**[대표 오답 원인 2]** 주어진 극한식의 의미를 해석하지 못했어요...

ADVICE :

$g(t)$의 의미 정도는 해석이 가능하지?

말 그대로 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수인데, 그것들의 좌극한과 우극한은 무엇일까?

극한의 직관적인 의미를 해석할 때, 좌극한은 $t-$, 우극한은 $t+$라고 쓰는 편이 이해하기 쉬워.

예를 들어 이 문제는 $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$를

$$g(k)+g(k-)+g(k+)=9$$

이렇게 쓰면 이해하기 쉬울거야.

$y=f(x)$와 세 직선 $y=k$, $y=k-$, $y=k+$가 만나는 점의 개수를 살펴보면 되는 것이야.

## 14-1 [2022학년도 4월 20번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 양수 $t$에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t, 0)$, $(0, 2t)$, $(-t, 0)$, $(0, -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불]연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha$는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

## 14-2 [2020학년도 10월 나형 30번]

함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\left|\lim_{t \to a+} h(t) - \lim_{t \to a-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 모든 실수 $a$에 대하여 $|a|$의 값의 합을 $S$라 할 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

# 015

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

① 139　② 146　③ 153　④ 160　⑤ 167

## 전략

귀납적으로 정의된 수열 문제는 하나의 항만 완전히 정해지면 굉장히 문제가 쉬워진다.

따라서 우리의 첫 전략도 아무 항이나 정확한 값을 구해보는 것이다. 이때, 우리가 알고 있는 항에 대한 정보는

$$a_6+a_7=3$$

이것이 유일하다.

우선 $a_n$과 $a_{n+1}$의 관계를 보면 알겠지만 모든 항은 무조건 자연수이다. $a_n$이 홀수이든, 짝수이든 다음 항이 자연수이기 때문이다.

그럼 위에서 가능한 경우는

$$(a_6, a_7)=(1, 2) \text{ 또는 } (a_6, a_7)=(2, 1)$$

일테고 두 경우 모두 위의 귀납적 정의를 만족한다.

( i ) $a_6=1$일 때, 가능한 경우를 역추적해나가면

<table>
<tr><th>$a_6$</th><th>$a_5$</th><th>$a_4$</th><th>$a_3$</th><th>$a_2$</th><th>$a_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">8</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>16</td><td>32</td></tr>
</table>

( ii ) $a_6=2$일 때, 가능한 경우를 역추적해나가면

<table>
<tr><th>$a_6$</th><th>$a_5$</th><th>$a_4$</th><th>$a_3$</th><th>$a_2$</th><th>$a_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="7">2</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">8</td><td>3</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16</td><td rowspan="2">32</td><td>5</td></tr>
<tr><td>64</td></tr>
</table>

위에서 가능한 모든 $a_1$의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+8+12+16+32+64=153$

## 왜 틀렸니?

**[대표 오답 원인]** 역추적하면서 일부 케이스를 놓쳤어요

**ADVICE :**

케이스를 놓치지 않기 위해서는 역추적을 하다가도 다시 정추적을 하면서 내가 바르게 계산했는지, 또는 그 외의 경우가 정말 불가능할지 항상 의심할 필요가 있어.

중요한 것은 자기 자신에 대해 항상 의심을 해야 한다는 것이야.

'모든', '가능한 ~~의 값' 등의 발문이 나왔을 때는 항상 내가 판단한 것이 정말 엄밀하고, 확실하며, 모든 경우인지를 항상 검증하기 위해 스스로를 의심할 필요가 있어.

## 15-1 [2020학년도 7월 나형 28번]

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

## 15-2 [2023학년도 수능 15번]

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수}\times) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

## 019

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ 라 할 때, $0<x<16$ 에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 $x$ 의 값의 합을 구하시오. [3점]

**전략**

$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

이렇게 바꾸면 주어진 부등식은

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$$

으로 바뀐다.

$0<x<4$ 에서 주어진 부등식의 해가 $\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 이므로

삼각함수의 대칭성에 의해

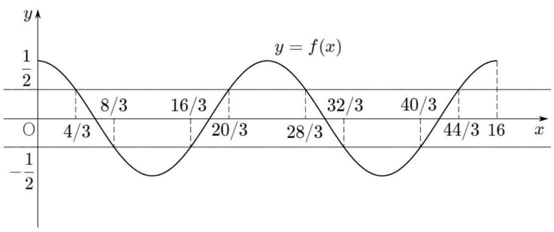
$4<x<8$ 에서 부등식의 해는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$

$f(x)$ 의 주기가 $8$ 이므로

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 가 해이면 $\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$ 도 해이고,

$\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 가 해이면 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$ 도 해이다.

$0<x<16$ 에서 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 의 그래프를 그리면




따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $x$ 의 합은

$2+6+10+14=32$

**왜 틀렸니?**

**[대표 오답 원인]** 계산 실수

**ADVICE :**

3점이라고 방심하면 큰일난다는 것을 알려준 문제.

이 문제는 20번이 어렵기 때문에 상대적으로 3점치고도 어렵게 나왔어.

이런 상황에 대비하여 반복되고 지루한 계산에도 익숙해질 수 있는 연습이 필요해.

## 19-1 [2020학년도 4월 가형 9번]

$0 < x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$와 부등식 $\sin x > \cos x$를 동시에 만족시키는 모든 $x$의 값의 합은? [3점]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $2\pi$ ④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

## 19-2 [2020학년도 7월 나형 27번]

자연수 $n$에 대하여 $0 \le x < 2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 $x$의 개수를 $a_n$이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

# 020

$a > \sqrt{2}$ 인 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

**전략**

일단 $f(x)$의 그래프를 그리는 것은 지금으로썬 불가능하니 문제의 흐름을 그대로 따라가보자.

원점에서의 접선은 이미 알고 있다.

$$y = f'(0)x + f(0) = 2x$$

이므로 $f(x) = 2x$로 연립하면 $-x^3 + ax^2 = 0$

$x \neq 0$이므로 $\mathrm{A}(a, 2a)$이다.

점 A에서의 접선은

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

이고, $f'(a) = -3a^2 + 2a^2 + 2 = -a^2 + 2$이므로 구하는 접선, 곧, 직선 AB는 $y = (-a^2+2)(x-a) + 2a$

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이라는 사실은 어떻게 쓸까?

원의 방정식을 직접 구하는 건 아닐테니, 기하적 성질을 활용해볼 수 있겠다.

**"지름에 대한 원주각은 90도이다."**

곧, $\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$이므로 직선 OA와 직선 AB의 기울기의 곱이 $-1$이다.

직선 OA의 기울기가 2였으므로 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

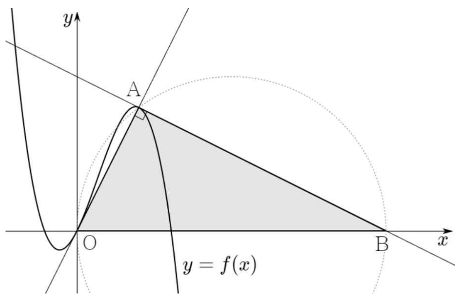
$-a^2 + 2 = -\frac{1}{2}$이므로 $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$이다. $(\because\ a > \sqrt{2})$

따라서 $\mathrm{A}\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\ \sqrt{10}\right)$이므로 점 A에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼각형 OAB가 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{OH}} \times \overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{AH}}^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}} \times \overline{\mathrm{BH}} = 10$$

곧, $\overline{\mathrm{BH}} = 2\sqrt{10}$이므로 점 B의 $x$좌표는

$\overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{10} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$




따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2} = 5\sqrt{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 5\sqrt{2} = 25$$

## 20-1 [2016학년도 6월 나형 21번]

자연수 $n$에 대하여 최고차항의 계수가 $1$이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 $a_n$이라 하자.

(가) $f(n)=0$
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$이다.

$a_n$이 자연수가 되도록 하는 $n$의 최솟값은? [4점]

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

## 20-2 [2024학년도 9월 10번]

최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

# 021

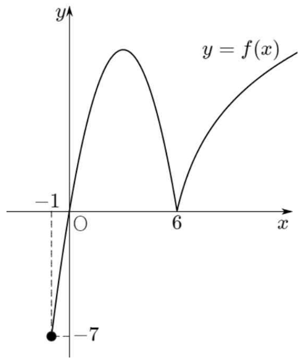
양수 $a$에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

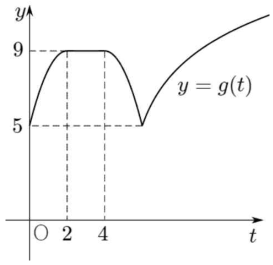
이다. $t \geq 0$인 실수 $t$에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 $5$가 되도록 하는 양수 $a$의 최솟값을 구하시오. [4점]

**전략**

$a$의 값과 관계없이 $f(x)$ 전체의 개형이 정해진다는 점을 주목하자.




위 그림에서 $t$의 값을 $0$부터 증가시키면 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.




위의 그림에서 $g(t)$가 $t=\alpha(\alpha \geq 5)$에서 최솟값을 가지면 $f(\alpha-1)=f(\alpha+1)$이고, **이미 $t=0$에서 $g(t)$가 $5$를 함숫값으로 갖기 때문에** $g(t)$의 최솟값이 $5$이려면

$$f(\alpha-1)=f(\alpha+1) \geq 5$$

$f(\alpha-1)=-(\alpha-1)^2+6(\alpha-1) \geq 5$에서

$(\alpha-1)^2-6(\alpha-1)+5=(\alpha-2)(\alpha-6) \geq 0$

정리하면 $5 \leq \alpha \leq 6$이다.

한편, $f(\alpha-1)=f(\alpha+1) \geq 5$에서

$$f(\alpha-1)=a\log_4(\alpha-4)$$

$\alpha$의 값이 커질수록 $f(\alpha-1)$의 값이 작아지고, 반면 $\log_4(\alpha-4)$의 값은 커진다.

따라서 $\alpha$의 값이 최대일 때 $a$가 최소이다.

$$\alpha=6 \text{일 때, } a=\frac{f(5)}{\log_4 2}=10$$

## 21-1 [2024학년도 9월 14번]

두 자연수 $a$, $b$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 $2$가 되도록 하는 모든 실수 $k$의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

## 21-2 [2023학년도 수능 21번]

자연수 $n$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x < 0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 $t$에 대하여 $x$에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 $4$가 되도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. [4점]

## 022

최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
> 을 만족시키는 정수 $k$는 **존재하지 않는다.**

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

**전략**

$f(x)$에 대한 힌트가 굉장히 적게 주어져 있는데 그럼에도 불구하고 $f(x)$가 정해지고 있다.

**그 말은 즉슨, 박스 안의 조건이 굉장히 강력하게 활용된다는 의미이다.**

한편, $f(k-1)f(k+1)<0$이면 $f(k-1)$와 $f(k+1)$의 부호가 반대라는 건데, $f(x)$가 삼차함수라는 것을 고려하면 이런 $k$는 당연히 존재할 것 같지 않은가?

$x$가 증가하면서 언젠가는 $f(x)$의 부호가 (−)에서 (+)로 바뀌는 순간이 올테니 말이다. *사잇값의 정리

그러면 이 문제는 오류일까?

**아니다. 이 상황을 잘 회피하는 방법이 있다. 부호가 바로 바뀌는 것이 아니라 '0을 거쳐서' 바뀌는 것이다.**

[발상의 방법]

**박스 안의 조건은 결국 '부호'와 관련한 논의를 진행하고 있다. 우리가 조건이 바로 안 해석되고 있는 이유는 부호를 (+), (−)에 한정해서만 생각하고 있기 때문이다.**

**'0'이라는 존재는 부호를 무효화시키는 능력을 가지기 때문에 0을 도입하면서 박스 조건을 어떻게 만족시킬지 생각한다.**

$f(n-1)<0$일 때, 부호가 바뀌려면 $f(n+1)>0$로 바로 넘어갈 수 있는 것이 아니라

$$f(n+1)=0,\ f(n+3)>0$$

이런 순서대로 넘어가야 한다는 것이다.

그래야 $f(k-1)f(k+1)\geq 0$이 되어 조건을 만족하기 때문!

일반성을 유지하면서 문제를 풀기 위해

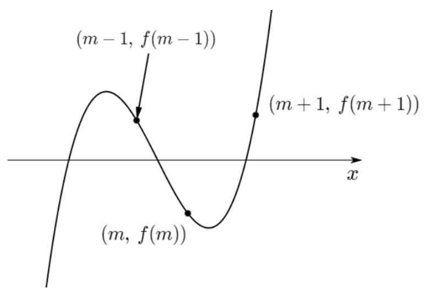
$f(x)<0$이 되는 정수 $x$의 최댓값을 $m$이라 하자.

그러면 $f(m)<0$이므로 앞선 논의에서 $f(m+2)=0$이다.

가정에 의해 $f(m+1)\geq 0$이기 때문에 이 값이 $0$이 아니면

$f(m-1)f(m+1)\geq 0$에서 $f(m-1)\geq 0$이 되고,

**$f(m+2)=0$라는 점을 제외하고 그래프를 그리면 다음과 같이 된다.**



개형을 보면 알겠지만 어떻게 해도 $f(m+2)=0$이 될 수 없는 상황이다.

그렇다면 우리의 가정이 뭔가 잘못되었다는 뜻이다.

바로 $f(m+1)\neq 0$이라 가정한 점이 모순이라는 것이다.

따라서 $f(m+1)=0$임을 얻는다.

그러면 우리는 $f(x)$의 그래프를 다음 후보로 추릴 수 있다.

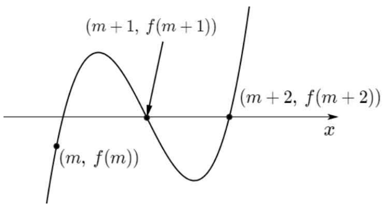
추리는 기준은 $m+1$, $m+2$의 위치 기준이다.

[발상의 방법]

**$f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $f'(0)<0$이어야 한다.**

**정수 $0$이 들어갈 자리를 잡으면 된다.**

**[Case 1]**




$f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$인 점에서 그래프 위에

$x=-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$의 위치를 잡으면 $m+1=0$이어야 한다.

따라서 $m=-1$이고, $f(x)=x(x-1)(x-\alpha)$라 두자.

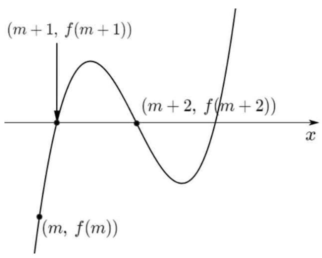
$f'(x)=3x^2-2(1+\alpha)x+\alpha$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}+\frac{1+\alpha}{2}+\alpha=-\frac{1}{4}$

방정식을 풀면 $\alpha=-\frac{5}{8}$인데, **$-1<\alpha<0$이 되어 처음 가정했던 $f(x)<0$이 되는 정수 $x$의 최솟값이 $m$이라는 사실에도 일치하므로 OK**

따라서 $f(x)=x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$이므로 $f(8)=483$

**[Case 2]**




$(x-m-1)(x-m-2)(x-\alpha)$라 두면,

$f(x)<0$인 정수 $x$의 최댓값이 $m$이기 위해 $f(m+3)\geq 0$,

곧, $m+2<\alpha\leq m+3$이다.

따라서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$인 점에서 그래프 위에

$x=-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$의 위치를 잡으면 $m+2=0$이어야 한다.

곧, $m=-2$, $0<\alpha\leq 1$이다.

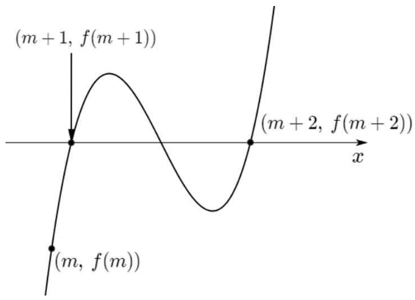
$f(x)=x(x+1)(x-\alpha)$라 두면

$f'(x)=3x^2+2(1-\alpha)x-\alpha$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}-\frac{1-\alpha}{2}-\alpha=-\frac{1}{4}$

$\alpha=-\frac{1}{8}$이므로 $0<\alpha\leq 1$이 아니기 때문에 모순.

**[Case 3]**




$f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $f'(0)<0$이어야 하는데

이를 만족하도록 $x=0$의 위치를 잡을 수가 없다.

(부연 설명 : $m+1$과 $m+2$ 사이에 정수가 없기 때문)

따라서 위의 케이스 분류에서 결론을 얻은 것은 $f(8)=483$

왜 틀렸니?

**[대표 오답 원인]** 마지막 케이스 분류까지 이어가질 못했어요

ADVICE :

답이 나올 것 같으면 죽이 되든 밥이 되든 일단 덤비자.

특히, 이 문제는 **'정수'라는 강력한 조건**이 있기 때문에 사소한 값들 하나하나도 중요하게 쓰일 가능성이 있어.

$x=0$에서의 미분계수를 기준으로 $m$의 값을 찾을 줄 누가 알기나 했겠어?

**'정수' 조건이 나오면 사소한 값들 하나하나에도 의미를 부여하는 습관을 들이도록 하자.**

## 22-1 [2022학년도 수능 22번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 $t$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $a$에 대하여
$\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

## 22-2 [2024학년도 6월 22번]

정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 $k$의 값의 곱이 $-12$가 되도록 하는 $a$에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}\right\} < 0$$

을 만족시키는 세 실수 $x_1$, $x_2$, $x_3$이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

2025학년도 대학수학능력시험 대비

# SEOL:NAME 특강 정답표

## ( 24수능 )

| 2024 수능 | | | | | | 유사 문항 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 문항번호 | 정답 | 배점 | 문항번호 | 정답 | 배점 | 문항번호 | 정답 | 배점 | 문항번호 | 정답 | 배점 |
| 1 | ① | 2 | 12 | ③ | 4 | 9-1 | ① | 3 | 9-2 | ③ | 3 |
| 2 | ④ | 2 | 13 | ① | 4 | 10-1 | ③ | 4 | 10-2 | 82 | 4 |
| 3 | ② | 3 | 14 | ① | 4 | 11-1 | ① | 4 | 11-2 | ① | 4 |
| 4 | ① | 3 | 15 | ③ | 4 | 12-1 | 12 | 4 | 12-2 | ⑤ | 4 |
| 5 | ④ | 3 | 16 | 2 | 3 | 13-1 | 588 | 4 | 13-2 | ② | 4 |
| 6 | ④ | 3 | 17 | 8 | 3 | 14-1 | 240 | 4 | 14-2 | 80 | 4 |
| 7 | ⑤ | 3 | 18 | 9 | 3 | 15-1 | 142 | 4 | 15-2 | ⑤ | 4 |
| 8 | ② | 3 | 19 | 32 | 3 | 19-1 | ① | 3 | 19-2 | 169 | 4 |
| 9 | ④ | 4 | 20 | 25 | 4 | 20-1 | ③ | 4 | 20-2 | ③ | 4 |
| 10 | ② | 4 | 21 | 10 | 4 | 21-1 | ② | 4 | 21-2 | 33 | 4 |
| 11 | ① | 4 | 22 | 483 | 4 | 22-1 | 9 | 4 | 22-2 | 380 | 4 |