2025학년도
본체만채! 3월 모의고사 빠른 정답

공통과목

1번	2번	3번	4번	5번
1	1	3	2	3
6번	7번	8번	9번	10번
4	5	3	2	4
11번	12번	13번	14번	15번
5	4	4	4	3
16번	17번	18번	19번	20번
5	21	10	3	376
21번	22번			
30	132			

선택과목 (확률과 통계)

23번	24번	25번	26번	27번
4	3	1	1	1
28번	29번	30번		
5	90	210		

선택과목 (미적분)

23번	24번	25번	26번	27번
4	2	3	5	1
28번	29번	30번		
2	1	35		

선택과목 (기하)

23번	24번	25번	26번	27번
3	1	5	5	4
28번	29번	30번		
2	36	8		

1. $3^{\sqrt{2}-1}\times 3^{-\sqrt{2}-1}=\frac{1}{9}$

2. $f(x)=(x-1)(x-2)$, $f'(2)=1$

3. $a_7-a_5=9, a_5-a_3=3$, $r^2=3,\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_3=\frac{3}{2}$

4. $\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=3+1=4$

5. $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\frac{12}{5}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$\therefore \sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{17}{13}$

6. $f'(t)=-2t+4$ $f(t)=-t^2+4t+c$

$f(2)=5$

$\therefore c=1$, $f(3)=4$

7. $a_1=5$, $a_2=9$, $a_3=2$

$a_4=6$, $a_5=10$, $a_6=3$

$a_7=7$, $a_8=0$, $a_9=4$

$a_{10}=8$, $a_{11}=1$, $a_{12}=5.....$

$\therefore a_n=a_{n+11}$

$\{a_k \mid k$는 자연수$\}$의 모든 원소의 합 $=55$

8. 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

$$=\left|\int_0^3 (4t^3-12t)\,dt\right|=27$$

별해 : $\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$ 넓이 공식을 사용하면

$\frac{81}{3}=27$

9.

$f(x)$와 $y=mx$가 만나는 점을 각각 α,β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$) $S_1=S_2$이므로, $\int_0^\beta \{f(x)-mx\}dx=0$ 이 성립한다. $f(x)$와 $y=mx$이 만나므로 $m\beta=\beta^2-4\beta+12$이 성립하고, 적분 조건에서

$$\int_0^\beta \{x^2-(m+4)x+12\}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(m+4)}{2}x^2+12x\right]_0^\beta=0$$

이 성립한다. 위의 두 식을 연립하면, $\beta=0, m=4$임을 알 수 있다.

$\sin\theta+\cos\theta$

[별해]

$f(x)-mx$를 부정적분한 어떤 식을 $F(x)$라고 하자.

$\int_0^\beta \{f(x)-mx\}dx=0$이므로 $F(\beta)=F(0)$이 성립해야 한다. $F(x)$가 $x=\alpha,\beta$에서 극값을 가지므로, 방정식 $F(x)-F(0)=0$의 두 실근은 각각 $0,\beta$가 되어야 하고, 방정식은 $x=\beta$에서 접해야 한다. 삼차함수의 비율 관계에 의하여, $\beta=3\alpha$가 성립해야 한다. 즉, 방정식 $f(x)-mx=0$의 두 근은 각각 $\alpha,3\alpha$가 되어야 한다. 이차함수의 근과 계수의 관계에 의하여, $3\alpha^2=12$가 성립하고, $\alpha=2$이 되어야 한다. 두 근의 합은 $m+4=\alpha+\beta=8$이 되어야 하고 $m=4$가 됨을 알 수 있다.

삼차함수의 비율관계가 이차함수의 넓이 관계에서 성립할 수 있음을 인지하자.

10.

조건 (가)에서 $f(x), g(x)$가 다항함수이므로, 두 함수를 합성한 함수 $f(g(x))$가 $y=x$가 되려면 두 함수가 모두 일차함수임을 알 수 있다.
$f(x)=ax+b$ 라고 가정하면, $f(g(x))=ag(x)+b=x$가 성립해야 하므로 $g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$라고 둘 수 있다.

조건 (나)를 통해,
$\int_{-1}^{2}\{f'(t)+g'(t)\}dt=[f(t)+g(t)]_{-1}^{2}=6$, 식을 정리하여
$f(2)+g(2)-f(-1)-g(-1)=6$임을
얻을 수 있으므로, $3(a+\frac{1}{a})=6$이 성립한다. 따라서 $a=1$이 된다.
또, $f(1)=2$이므로 $a+b=2$가 되어 $b=1$이 되어야 한다.

따라서 $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$ 이므로
$f(3)+g(5)=4+4=8$이 된다.

11.

조건 (가)와 (나)를 통해, a_{10}, a_{13}, a_{18}을 모두 a_1에 대해 나타낼 수 있다.
$a_{10}=2a_5=2(\frac{1}{2}a_3+1)=2\left\{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a_2+1)+1\right\}$
$=2\left\{\frac{1}{2}(a_1+1)+1\right\}=a_1+3$가 되어야 한다. 같은 방식으로 a_{13}과 a_{18}을 a_1에 대하여 나타낸다면,
$a_{18}=\frac{1}{2}a_1+\frac{7}{2}$, $a_{13}=a_1+\frac{3}{2}$이 되어야 함을 알 수 있다.
따라서 $2a_1+3=\frac{3}{2}a_1+\frac{13}{2}$, $\therefore a_1=7$이 된다.
구하는 값인 a_{24}와 a_{25}는 위의 a_{10}을 구한 방식과 마찬가지로 구해본다면, $a_{24}=8a_3=8a_1+8$이 되고,
$a_{25}=\frac{1}{2}a_{13}+1=\frac{1}{2}a_1+\frac{7}{4}$가 된다.
a_1=7을 대입하면, $a_{24}=64$, $a_{25}=\frac{21}{4}$가 된다.
따라서 $a_{24}\times a_{25}=336$가 된다.

12.

(가) 조건을 통해, x=k는 점근선이 되어야 하고,
$f(-\frac{2}{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되어야 함을 알 수 있다.
한편, (나) 조건을 통해서도 마찬가지로 $x=k$는 점근선이 되어야 하고, $f(2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되어야 함을 알 수 있다.

k에 대하여 주어진 조건을 고려해볼 때,
$-\frac{2}{3}a+b=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{\pi}{6}$
$2a+b=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$이 성립해야 함을 알 수 있다.
따라서 $a=\frac{9}{16}\pi$, $b=\frac{5}{24}\pi$가 되어야 하고,
$k=\frac{\pi-2b}{2a}=\frac{14}{27}$이 됨을 알 수 있다.

13.

점 E가 $\overline{AC}$를 이등분하므로 $\overline{AE}=\overline{EC}=5$이다. $\triangle ABE$에서 코사인 법칙을 사용하면
$\cos\theta=\frac{(5)^2+(\overline{BE})^2-(10)^2}{2\times5\times\overline{BE}}$ 가 되어야 하고, $\overline{BE}=2$이다.
$\triangle BEC$에서 코사인 법칙을 사용하면
$\cos(\pi-\theta)=\frac{(5)^2+(5)^2-(\overline{BC})^2}{2\times5\times2}$가 되어야 하므로,
$\overline{BC}=3\sqrt{5}$이다.
마찬가지로 $\triangle ADE$에서 코사인 법칙을 사용하면
$\cos(\pi-\theta)=\frac{(5)^2+(\overline{DE})^2-(10)^2}{2\times5\times\overline{DE}}$이 되어야 하고,
$\overline{DE}=-4+\sqrt{91}$이다. $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로 사각형 $ABCD$의 넓이$=\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta\times\frac{1}{2}$가 되어야 하고, 이를 계산하면
$(-2+\sqrt{91})\times10\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=-6+3\sqrt{91}$. $q-p=9$

14.

조건 (가)의 $|(x^2-1)|g(x)=(x^2-1)(|f(x)|-3)$이라는 식을 x의 범위에 따라 정리해보면,
$x>1$이거나 $x<-1$일 때, $g(x)=|f(x)|-3$이 되어야 하고,
$-1\le x\le1$일 때 $g(x)=-|f(x)|+3$이 되어야 함을 알 수 있다.
따라서 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되려면, $x=\pm1$일 때 $|f(x)|=3$이 되어야 한다.
또, 문제 조건에 의하여 $f(-1)f(1)>0$이 성립해야 하므

로, $f(1)=f(-1)=3$ 또는 $f(1)=f(-1)=-3$이 성립해야 한다.

조건 (나)에 의하여 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 2개가 되어야 하는데, $g(x)$가 미분가능하지 않은 점들의 후보는 $x=\pm 1$이 되어 $g(x)$의 식이 변하는 경우, 그리고 $f(x)$의 부호가 변하는 경우이다.

$x=\pm 1$이 되어 $g(x)$의 식이 변할 때, 함수 $g(x)$가 미분가능하려면 $f'(x)=0$이 되어야 한다. 그러나 삼차함수 $f(x)$는 $x=\pm 1$ 중 적어도 하나의 점에서 반드시 접하지 않고 지나가므로, $x=\pm 1$일 때 $g(x)$는 하나 이상의 미분 불가능한 점을 가지게 된다.

한편, $f(x)$의 부호가 변하는 경우에는 삼차함수가 삼중근을 가지지 않는다면, 반드시 하나 이상의 미분 불가능한 점을 가지게 된다.

따라서 가능한 경우는 $g(x)$가 $x=\pm 1$에서 각각 미분 불가능한 점을 가지며 $f(x)=0$을 만족시키는 x가 삼중근이 되거나, $g(x)$가 $x=\pm 1$ 중 하나에서 미분 불가능한 점을 가지며 $f(x)=0$이 될 때 하나의 미분 불가능한 점을 가지는 경우이다. 전자의 경우는, $g(x)$가 $x=\pm 1$에서 각각 미분 불가능한 점을 가지면 반드시 다른 한 점에서 미분 불가능한 점이 발생해야하기 때문에 불가능하다. 따라서 정답이 되는 케이스는 후자의 경우이다.

이 경우를 만족시키는 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-1)(x+1)^2+3$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2+3$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2-3$
$f(x)=(x-1)(x+1)^2-3$

의 네 가지의 경우가 존재한다.

이 중 $g(2)$가 최댓값을 $f(x)=(x+1)^2(x-1)+3$이 되는 경우로, 이때 $g(2)=9$가 된다.

15.

$g(n)=1$이 되려면, $f(|a_n|-k)$의 값이 음수가 되어야 한다.
이외의 경우에는 모두 $g(n)=0$이 된다.

조건 (가)를 통해 $f(|a_n|-k)$가 음수가 되는 n이 존재함을 알 수 있다. $|a_1|-k$은 0이므로 $g(1)=0$이 된다. 또, 4 이상의 모든 자연수 m에 대해서 $\sum_{n=2}^{m} g(2n-1)=2$이여야 하므로, 5 이상의 모든 자연수 m에 대해서 $g(2m-1)=0$, 즉 $f(|a_m|-k)\ge 0$가 되어야 함을 알 수 있다. 이를 만족시키기 위해서 $f(x)$의 최고차항의 계수 t는 양수가 되어야 한다.
따라서 $-3<|a_n|-k<0$일 때 $g(n)=1$이 된다.

이를 만족시키는 2개의 홀수 $2m-1$은 $|a_1|-k$=0 이여야 함을 고려할 때, 3과 5가 되어야 한다는 것을 알 수 있다.

(나)를 통하여, $f(|a_n|-k)=0$을 만족시키는 실근의 개수가 3개임을 알 수 있고, 해당 방정식이 실근을 가지도록 하는 자연수 n은 $|a_n|-k=0$ 또는 $|a_n|-k=-3$을 만족시켜야 함을 알 수 있다.

해당 조건을 만족시키기 위해서는 $|a_n|-k=0$과 $|a_n|-k=-3$의 근 중 하나가 두 개 존재해야 하는데, 만약 $|a_n|-k=-3$의 근이 두 개 존재하게 되면 등차수열 a_n이 0이 되는 지점이 존재하게 되어, $a_r=p$가 되는 자연수 r의 값이 존재할 때 $a_t=-p$가 되는 자연수 t의 값도 존재해야 한다.
따라서 $|a_n|-k=0$의 근이 반드시 두 개 존재해야 한다. 따라서 이 경우는 $f(|a_n|-k)=0$의 실근의 개수가 4개가 되기에 모순이 된다.

따라서, $|a_n|-k=0$의 근이 두 개가 되면서 $|a_n|-k=-3$의 근이 하나가 되는 경우가 가능한 경우임을 알 수 있다.
$|a_n|-k=0$의 근이 두 개 존재한다면 등차수열 a_n이 0이 되는 지점이 존재하게 되고, 이때 $|a_n|-k=-3$이 되는 n이 유일하기 위해서는 $k=3$이 되어야 함을 알 수 있다.

따라서 등차수열 a_n은 임의의 자연수 q에 대하여 $a_q=0$을 만족시키고, 수열 $|a_n|-k$을 n의 값을 x축으로 하는 그래프로 표현하면 $x=p$에 대하여 대칭인 형태의 그래프가 나옴을 알 수 있다.

위의 내용들을 종합해보면, n이 3이나 5가 될 때 $-3<|a_n|-k<0$이 성립해야 하므로 가능한 경우는 $a_1=k$일 때 $a_7=-k$인 경우가 되어야 한다. (만약, $a_6=-k$가 되면 $a_q=0$이 되는 자연수 q가 존재하지 않고, $f(|a_7|-k)\ge 0$이 성립해야 한다.

$a_1=3,\ a_7=-3$에서
수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $-n+4$가 되어야 하고,

$k\times a_7\times a_8=3\times -3\times -4=36$이다.

16. $a^2-5a+2=1$

$\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}=a$, $a^2-5a+2>0$ 므로

$\therefore a+\frac{1}{a}=5$

17. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2, \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서

$f(x)$의 최고차항의 계수가 2인 이차함수이고
일차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

$\therefore f(x)=2x^2+x$, $f(3)=21$

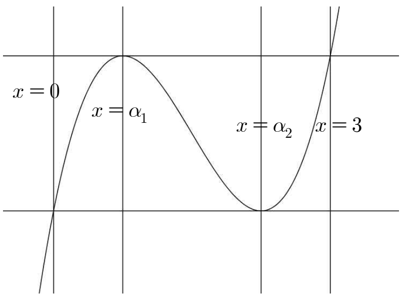
18. $\sum_{k=1}^{10}(a_k+k)=60$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=30$ 에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=A$, $\sum_{K=1}^{10}(a_k)=B$ 라 하자

$A+2B=20$, $B=5$ 므로

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=A=10$

19.



$\therefore 3+0=\alpha_1+\alpha_2$

20.

조건 (가)에서 분자의 값이 0으로 가고, 극한값이 0이 아닌 상수 k로 수렴하므로 분모의 값도 0으로 가야한다. 따라서 $f(0)=0$이 되어야 한다.

(가)의 분모와 분자를 x로 나누어 극한을 취하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{f(x)}{x}+1}=k$ 가 되어야 하는데, 해당 식에서도 분자가 0으로 가므로 분모의 값이 0으로 가야한다. 따라서 $f'(0)=-1$이 되어야 한다. $f(0)=0$, $f'(0)=-1$이므로 $f(x)=x^3+ax^2-x$라고 둘 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{f(x)+x}=k$ 의 $f(x)$자리에 $f(x)=x^3+ax^2-x$를 대입하면, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+ax-1)}{x^2(x+a)}=k$이 되어야 하므로,

$k=-\frac{1}{a}(a<0)$이다. ······㉠

조건 (나)와 ㉠을 통해 $f(x)-2x=x(x^2+ax-3)$는 $a<0$이면서 $x=-3, -1, 1, 3$ 중에서만 근을 가져야 함을 알 수 있다. 이차함수의 근과 계수의 관계를 통하여, $f(x)-2x=0$의 두 근의 곱이 -3이 되고, 두 근의 합이 $-a$, 즉 양수가 되어야 하므로 $x=3, -1$이 되어야 한다.

$\therefore a=-2$, $k=\frac{1}{2}$가 되어야 한다. 따라서

$f(x)=x^3-2x^2-x$가 되어야 하고, $f(\frac{4}{k})=f(8)=376$이 된다.

21.

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=40$이다.
한편, $a_{k+3}+a_{k+4}=40+4d$가 되어야 하고, S_{k+4}는 32의 배수이기에 $80+4d$가 32의 배수가 되어야 함을 알 수있다.

그런데 공차가 자연수임을 활용하면 다음과 같은 경우들을 생각해볼 수 있다.

$i)$ $80+4d=96$이 되는 경우
$d=4$가 되어야 하고, 이 경우 $a_{k+1}=18, a_{k+2}=22$가 되어야 한다. 이 경우 $S_k=0$이 되는 k=8이 되어 존재하므로, $k+a_{k+2}$=30이다.

$ii)$ $80+4d=128$이 되는 경우
$d=12$가 되어야 하고, 이 경우 $a_{k+1}=14, a_{k+2}=26$가 되어야 한다. 이 경우 $S_k=0$이 되는 k가 존재하지 않는다.

$iii)$ $80+4d=160$이 되는 경우
$d=20$가 되어야 하고, 이 경우 $a_{k+1}=10, a_{k+2}=20$가 되어야 한다. 그러나 이 경우 $a_k=0$이 되어 모순이다.

$iv)$ $80+4d>160$이 되는 경우
이 경우들에는, $a_k<0$이므로 $S_k=0$이 될 수 없어 모순이다.

따라서 수열 a_k의 공차는 4가 되어야 하고, 구하는 값은 $k+a_{k+2}$=8+22=30이 된다.

22.

합성함수의 방정식으로 조건이 제시되어 있다.
$f(2x+f'(x))=t$라는 방정식을, 겉함수와 속함수로 나누어 해석을 해보면 $2x+f'(x)=u$가 될 때 $f(u)=t$가 만족되어야 한다.

따라서 함수 $g(t)$는 t가 주어질 때마다 $f(u)=t$를 만족시

키는 u에 대하여 ($y=t$의 위치에 따라, 가능한 u의 개수가 달라진다.) $f'(x)=-2x+u$를 만족시키는 실수 x의 개수로 정의할 수 있다. ($y=-2x+u$의 위치에 따라, 가능한 x의 개수가 달라진다.)
따라서 $g(t)$의 최댓값은 6이 되고, $g(t)$가 불연속이 될 수 있는 t의 값의 후보는 $f(x)=t$의 실근의 개수가 달라지는 t가 주어질 때, 그리고 $f'(x)=-2x+u$의 실근의 개수가 달라지는 u가 주어질 때임을 알 수 있다.

$f'(x)=-2x+u$를 만족시키는 u를 s라고 두자.

조건 (가)를 만족시키려면, $g(t)$의 값이 0에서 6이 되어야 하므로 $f(u)=t$의 실근의 개수가 달라지는 t를 가지는 동시에 $f'(x)=-2x+u$의 실근의 개수가 달라지는 u가 주어져야 한다. 이때 함수 $f(x)$가 될 수 있는 경우는 아래와 같다.

1) $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

해당 경우 조건을 만족시키는 $f(x)$는 $f(x)=t$의 실근의 개수가 p보다 작을 땐 1개가 되고, p보다 클 땐 3개가 되며 $f(x)=p$의 실근 중 작은 것이 s가 되는 경우이다. 즉 $f(x)$의 극솟값이 p가 되고, $f(s)=p$가 되어야 한다.

2) $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우

해당 경우에는 조건을 만족시키는 $f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다. $f(x)$의 극댓값을 q라고 하면, $g(t)$는 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} g(t) &= 0\,(y<p) \\ &= 3(y=p) \\ &= 6(p<y<q) \\ &= 4(y=q) \\ &= 2(y>q) \end{aligned}$$

이를 바탕으로 조건 (나)를 살펴보면, $s=3$이 되고, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라고 할 때
$f(x)=a(x-3)(x-6)^2+3$이 됨을 알 수 있다.

이때 (가)를 만족시키기 위하여, $t=p$를 기준으로
$f'(x)=-2x+u$의 실근의 개수가 바뀌어야 하므로
$f'(x)=-2x+3$이 중근을 가져야 한다.
즉 $3a(x-4)(x-6)+2x-3=0$의 판별식 $D=0$이 되어야 하고, 이를 만족시키는 모든 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{7}{3}$이 되어야 한다.

$f(9)=54a+3$에서, 가능한 모든 $f(9)$의 값의 합은 $54\times\dfrac{7}{3}+6=132$가 되어야 한다.

[확률과 통계]

23.

해설: $3^4 = 81$

24.

해설: $\frac{6!}{4!} = 30$

25.

해설: (가)조건이라는 전제하에서 $a = b$ 또는 $c = d$의 경우의 수는 28이다.

26.

해설: $a + b + c = 7$의 경우의 수는 36이므로 답은 36이다.

27.

해설: 여학생을 각각 a, b, c라고 할 때, a를 고정시키고 b나 c가 옆에 앉는 경우의 수는 4이다. 그리고 나머지 a의 옆자리 그리고 b의 옆자리에 남학생을 앉히는 경우의 수는 6이고 나머지 배치해주면 $24 \times 6 = 144$이다.

답 144

28.

해설: a가 맨 왼쪽 끝일 때 경우의 수 96이고, 그 다음 한 칸 움직일 때, 72이고 그다음 한칸 움직일 때 마찬가지로 72, 그다음 한칸 움직일 때, 96, 그다음 한칸 72, 그다음 한칸 72, 그다음 한칸 96이다. 따라서 답은 576이다.

29.

해설: 치역의 개수가 2일 때 경우의 수는 30이고, 치역의 개수가 3일 때, 60이다. 따라서, 90이 정답이다.

30.

해설: (나) 조건만 따지면 경우의 수는 270이다. 이 때, (가)의 경우의 수를 셀 때, 너무 많이 따질게 있으므로 여사건을 쓰면 된다. 즉, 270-$(3 \times {}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_4) = 210$

답 210

[미적분]

23.

$\frac{27}{1}=27$

24.

$$2-\frac{3}{n}<\frac{a_n}{n^2}<2+\frac{3}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(2-\frac{3}{n}) \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}\le \lim_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n})=2$$

25.

$$\lim_{n\to\infty}a_n^2b_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{n})^2(3n^2b_n)(\frac{1}{3})=15$$

26.

$B(\frac{\sqrt{3}}{2}n,\ \frac{1}{2}n),\ C(-\frac{\sqrt{3}}{2}n,\ -\frac{1}{2}n)$에 대하여

이차함수 $y=f(x)$의 식은 $a(x+\frac{\sqrt{3}}{2}n)(x-\frac{\sqrt{3}}{2}n)+\frac{1}{2}n$과 같이 나타낼 수 있고, $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}n)=\sqrt{3}$이 되어야 하므로 $\sqrt{3}na=\sqrt{3},\ a=\frac{1}{n}$이 되어야 한다.

따라서 $a_n=\frac{1}{6n}(\sqrt{3}n)^3-\frac{1}{3}n^2\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}n^2$이 되고,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{3\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}\pi$가 된다.

27.

주어진 식을 정리하면 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=k$에서, $a_n=kn$의 형태로 정리됨을 알 수 있다. a_1이 정수가 되어야 하므로, k 역시나 정수가 되어야 함을 알 수 있다. 함수 $f(x)$가 최솟값을 가지는 실수 x의 집합 A는, $f(x)=\sum_{k=1}^{4}|x-a_k|$의 그래프 개형을 고려할 때 $2k\le x\le 3k$이 되어야 함을 알 수 있다. 이 범위 안에 든 정수가 세 개가 되어야 하므로, k는 2가 되어야 하고 $a_n=2n$이 되어야 한다, 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{4}$$

28.

함수 $f(x)$의 식은 $-1\le x\le 1$이 될 때 $y=-k$, $x>1$이거나 $x<-1$이 될 때 $y=x$가 되어야 한다.

이때, $f(x)$와 이차함수 $y=-x^2+tx+3$가 만나는 점을 직접 해석하기는 어려우므로, $f(x)=-x^2+tx+3$에서 tx를 제외한 우변의 값들을 좌변으로 넘겨, $f(x)+x^2-3=tx$를 만족시키는 t의 개수를 찾는 것으로 조건을 해석하자. $g(x)=f(x)+x^2-3$라고 하면,

$$g(x)=\begin{cases}x^2-3+k\ (-1\le x\le 1)\\ x^2+x-3\ (x>1 \text{ or } x<-1)\end{cases}$$

이 됨을 알 수 있다.

$k>0$이기에, $x=-1$에서는 반드시 $g(x)$가 불연속이 되고, $t>0$일 때 $h(t)$가 불연속인 점은 반드시 2개 존재한다. 따라서 $t\le 0$에서 $h(t)$가 불연속인 점이 존재하지 않아야 하고, 그렇게 되기 위해선 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되어야 함을 그래프를 그려보며 알 수 있다.

따라서 $k=1$이 되어야 하고, 구하는 값 $f(2k)=f(2)=2$가 됨을 알 수 있다.

29.

조건 (가)를 통해, $f(x)$의 두 극값의 차가 $4n^3$이 됨을 알 수 있다. 삼차함수의 최고차항의 계수가 a이고, 극대와 극소가 되게 하는 x의 값이 각각 α,β일 때 극댓값과 극솟값의 차는 $\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$임을 활용하면, 극대와 극소가 되게 하는 x의 값 $\alpha,\ \beta$ 사이의 간격이 $2n$인 것을 알 수 있다. 따라서 극값일 때의 n이 아닌 x값으로 가능한 것들은 $-n$또는 $3n$이다.

$|f(x)|=n^3$이 다섯 개의 실근을 가지게 하는 함수의 개형으로는 아래의 네 가지가 가능하다.

$x(x-3n)^2-n^3$
$(x-n)^2(x-4n)+n^3$
$(x+2n)(x-n)^2-n^3$
$(x+n)^2(x-2n)+n^3$

해당 개형들 중, $f(n)f(2n)f(3n)>0$을 만족시키는 개형은 $(x-n)^2(x-4n)+n^3$ 뿐이다. 해당 개형에서, 삼차함수의 비율관계를 통해 $|f(x)|=n^3$를 만족시키는 실근의 값들을 구해보면 작은 것부터 순서대로 $(2-\sqrt{3})n,\ n,\ 2n,\ (2+\sqrt{3})n,\ 4n$이 된다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e_n+b_nc_n}{a_nd_n+n^2}$의 값은

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n+2n^2}{n^2+n^2}=1$이 된다.

30.

(가)와 (나)에서, 결과로 나온 급수의 합의 부호가 서로 다르므로 등비수열 b_k는 공비가 음수임을 알 수 있다. (만약, 급수의 합의 부호가 등차수열에 의해서 음수로 나타난다면 모순이 발생한다.)

등비수열 b_k는 k가 짝수일 때는 음수가 되고, k가 홀수일 때는 양수가 되는 수열이다. $k=2n$일 때 $b_k\le 3$이 늘 성립하므로, $\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}$이 되어야 하고, 등비급수가 수렴하기 위해 $-1<r<0$이 성립해야 한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\dfrac{b_2}{1-r^2}=-32$가 성립한다.

다음으로 (가) 조건을 해석하자. k가 홀수일 때, b_k는 점점 감소하는 수열이므로 $c_1=c_3=3$이라는 조건에서,

$b_1>3$이고 $c_1=\dfrac{1}{a_1a_2}$가 되어야 함을 알 수 있다.

여기에서, b_3가 3보다 큰지, 작은지에 따라 두 가지의 경우를 생각해볼 수 있다.

1) $b_3\le 3$

이 경우 $\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}=3+\sum_{n=2}^{\infty}b_{2n-1}=3+\dfrac{b_3}{1-r^2}=10$이 되어야 한다. 그러나, 이 경우에는 앞의

$\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\dfrac{b_2}{1-r^2}=-32$과

$\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}=3+\sum_{n=2}^{\infty}b_{2n-1}=3+\dfrac{b_3}{1-r^2}=10$을 연립했을 때 r이 무리수가 나오게 되어 b_2가 정수라는 조건에 모순이 발생한다. 따라서 $b_3>3$이 되어야 한다.

또, $c_1=c_3$에서, $\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{a_3a_4}=3$이여야 함을 알 수 있고 $a_1a_2=a_3a_4=\dfrac{1}{3}$에서, $a_{2.5}=0$이 되고, $a_1=-1,\ a_3=-\dfrac{1}{3}$이 성립해야 한다. 따라서 $a_n=\dfrac{2}{3}(n-2.5)$가 성립한다.

2) $b_3>3$

이 경우에는 b_5가 3보다 큰지 작은지에 따라 또 경우를 나누어봐야 한다.

만약 $b_5>3$이 성립하게 되면, $c_5=\dfrac{1}{(\frac{5}{3})\times(\frac{7}{3})}=\dfrac{9}{35}$가 되는데, 이 경우에는 r이 무리수가 나오게 되어 b_2가 정수라는 조건에 모순이 발생한다.

따라서 $b_5\le 3$이 성립해야 한다.
그렇다면
$\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}=6+\sum_{n=3}^{\infty}b_{2n-1}=6+\dfrac{b_5}{1-r^2}=10$이 성립해야 한다.

$6+\dfrac{b_5}{1-r^2}=10$과 $\dfrac{b_2}{1-r^2}=-32$을 연립해보면 $r=-\dfrac{1}{2}$가 되어야 함을 알 수 있고, 따라서 $b_2=-24$, $b_1=48$이 된다.

$a_7=3$이 되고, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{b_1}{1-r}=\dfrac{48}{1-(-\frac{1}{2})}=32$가 되어야 한다. 따라서 정답은 35가 된다.

[기하]

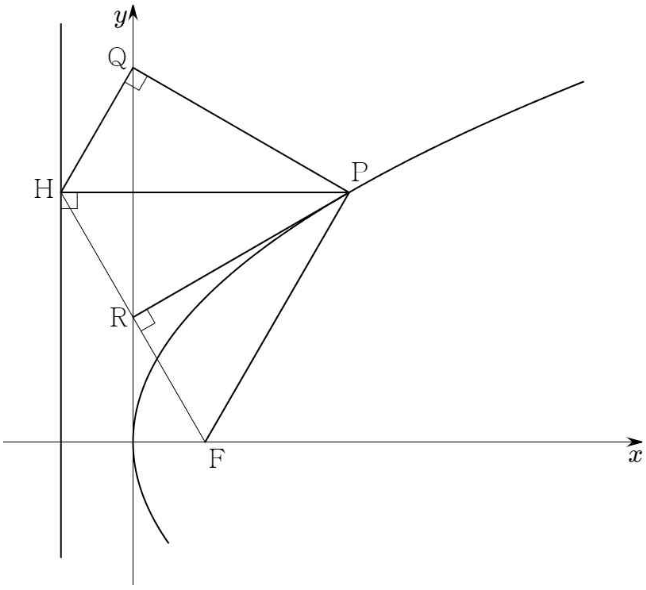
23.
유형: 이차곡선-포물선의 정의
답: ③
해설: 3

24.
유형: 이차곡선-포물선의 정의
답: ①
해설: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

25.
유형: 이차곡선-포물선의 정의
답: ⑤
해설: 1/4k + 1/k = 1, k=5/4

26.
유형: 이차곡선-포물선의 정의
답: ⑤
해설: 합 6, 차 2. {4, 2}->8

27. 포물선의 성질을 활용하여 문제 해결하기/답 ④



평행 조건에 의해 $\angle\mathrm{PQH}$ 또한 직각이므로, 수직을 연달아 찾아보자. 점 P에서 직선 FH에 내린 수선의 발을 R라 하자. 삼각형 FPH는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RH}}$, 점 R는 y축 위에 있다.

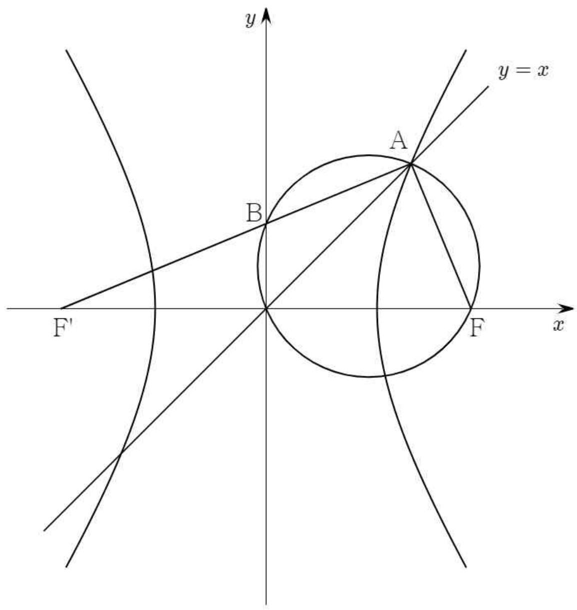
$\angle\mathrm{FPQ}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{PQH}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{HQ}}$,

두 삼각형 RPH, HPQ가 합동이므로, $\angle\mathrm{RPH}=\angle\mathrm{HPQ}$이다.
삼각형 FPH는 이등변삼각형이므로, $\angle\mathrm{FPR}=\angle\mathrm{RPH}$이고,

$\angle\mathrm{FPQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로, 각각 $\dfrac{\pi}{6}$, 삼각형 FPH는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

따라서 삼각형 FPQ의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

28. 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기/답 ②



$\overline{\mathrm{BF'}}=2$=쌍곡선의 주축이므로, $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다.
또한, 직선 $y=x$가 x축, y축이 이루는 각을 이등분하므로,
원점과 세 점 F, A, B가 한 원 위에 있다.
즉, $\angle\mathrm{FAB}=\dfrac{\pi}{2}$.

$\overline{\mathrm{BF}}=2$이고, $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AB}}$, $\angle\mathrm{FAB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로,

$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이다.

$4c^2=(\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2=8+8\sqrt{2}$, $c^2=2+\sqrt{2}$,
$b^2=c^2-1=1+\sqrt{2}$.

29. 타원과 쌍곡선의 정의를 활용하여 문제 해결하기/답 36

$\overline{\mathrm{OP}}=x$라 하자. 각각 타원, 쌍곡선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{FP}}=(\text{장축의 길이})-x$, $\overline{\mathrm{PF'}}=(\text{주축의 길이})+x$이므로,

타원의 장축의 길이와 쌍곡선의 주축의 길이의 합이 10이다.

같은 규칙성으로, $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AF'}}=10$.

$\overline{\mathrm{FA}}=t$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=3$이므로, $\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{t^2-9}$ 이다.

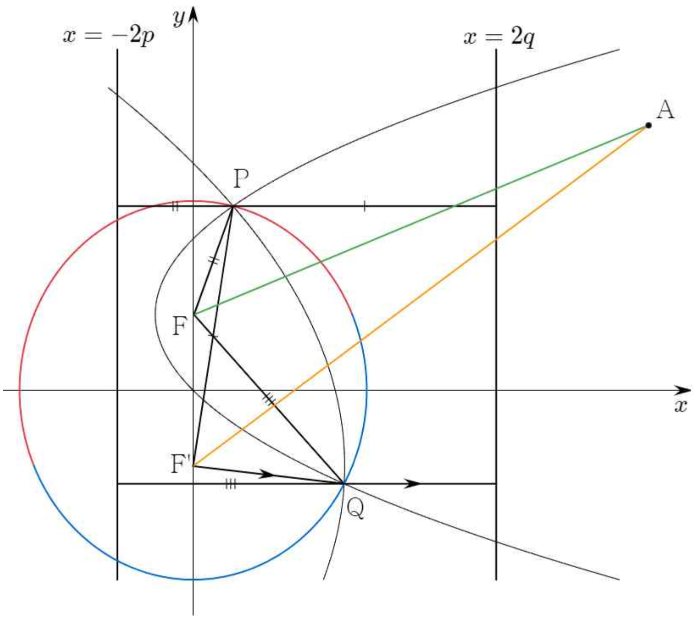
$\overline{\mathrm{AF'}}=10-t$이므로, 피타고라스 정리에 의해

$(t^2-9)+(13-t)^2=(4\sqrt{5})^2$, $t=5(d>6)$이다.

타원의 장축의 길이가 8, 두 초점 사이의 길이가 4이므로,

$k=2\sqrt{3}$, $3k^2=36$

30. 포물선과 타원의 정의를 활용하여 문제 해결하기/답 8



포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2p+2q=10$이므로,

점 P, Q는 각각 초점이 F, F'이고

장축의 길이가 10인 타원 위의 점이다.

이때, P의 y좌표가 Q의 y좌표보다 크므로,

P는 그림의 빨간색 부분,

Q는 그림의 파란색 부분 위에 있다.

선분 AF가 빨간색 부분을 지나므로

타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}-10$이고,

선분 AF'가 파란색 부분을 지나므로

$\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}-10$이다.

각각 최솟값의 합을 묻고 있으므로,

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}-10=\overline{\mathrm{AP}}-10=3$,

$\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}-10=\overline{\mathrm{AF'}}-10=5$,

$3+5=8$