2025학년도 5월 SEL:ON 모의고사

정답 및 해설

SEOL:NAME

정 답 표

번호	정답	배점	번호	정답	배점	번호	정답	배점
1	①	2	9	①	4	17	5	3
2	③	2	10	⑤	4	18	8	3
3	①	3	11	③	4	19	14	3
4	②	3	12	②	4	20	41	4
5	④	3	13	③	4	21	128	4
6	②	3	14	④	4	22	81	4
7	⑤	3	15	①	4			
8	②	3	16	11	3			

공통과목 해설

1 정답 ①

$2^{-2\sqrt{2}} \times 2^{2\sqrt{2}+1} = 2$

2 정답 ③

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 4$

3 정답 ①

$a_4+a_8=2a_6=14$에서 $a_6=7$이고, $a_1=2$이므로

수열 $\{a_n\}$의 공차는 1이다.

따라서 $a_2=a_1+1=3$

4 정답 ②

극한값이 존재하기 위하여 $f(2)=2$,

이때 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-2}{h}=-f'(2)=3$이므로 $f'(2)=-3$

곧, $f(2)+f'(-2)=-1$

5 정답 ④

주어진 식을 정리하면 $-\sin\theta=-2\cos\theta$

따라서 $\tan\theta=2$이고, $\sin\theta>0$이므로 $\cos\theta>0$

곧, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이다.

6 정답 ②

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

극솟값은 $x=3$에서 가지므로 $f(3)=k-9=-5$, $k=4$

따라서 극댓값은 $f(-1)=\dfrac{17}{3}$

7 정답 ⑤

점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3(3t^2+4t)dt=\left[t^3+2t^2\right]_0^3=45$

점 Q가 움직인 거리는

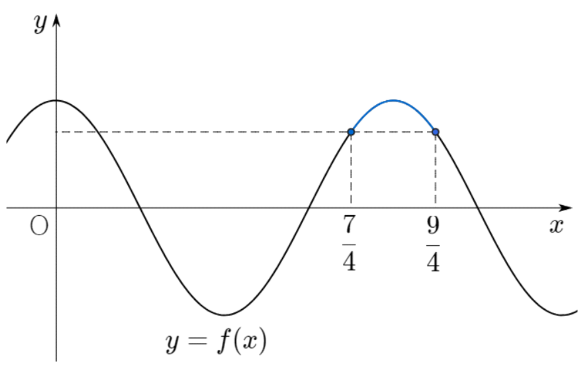
$\int_0^3|mt-m|dt=\int_0^1(-mt+m)dt+\int_1^3(mt-m)dt$

$\left[-\dfrac{m}{2}t^2+mt\right]_0^1+\left[\dfrac{m}{2}t^2-mt\right]_1^3=\dfrac{5}{2}m$

따라서 $\dfrac{5}{2}m=45$이므로 $m=18$

8 정답 ②

$f(x)$의 그래프는 다음과 같으며, 그림의 파란색 선은 $g(k)$가 최대일 때 닫힌구간 $\left[k,\ k+\dfrac{1}{2}\right]$을 나타낸 것이다.



따라서 $a\cos\dfrac{7}{4}\pi=1$이므로 $a=\sqrt{2}$

9 정답 ①

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge0$이므로

$x(x-1)f'(x)\ge0$이다.

곧, 함수 $f'(x)$는 $x(x-1)$를 인수로 가지는데, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)=3x^2-3x$

곧, $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$라 두면

$g(1)=\int_{-1}^1 3t^2(t-1)^2dt=\int_{-1}^1(3t^4-6t^3+3t^2)dt$

곧, $g(1)=\dfrac{16}{5}$이므로 $f(0)=C=\dfrac{16}{5}$

따라서 $f(2)=8-6+\dfrac{16}{5}=\dfrac{26}{5}$

정답 및 해설

10 정답 ⑤

$a_{n+1} \times a_{n+2} = 2S_{n+1}$ 이므로 변변끼리 빼면

$a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 2a_{n+1}$

이때, $a_{n+1} \neq 0$ 이므로 $a_{n+2} - a_n = 2$ (등차수열)

한편, $a_1 \times a_2 = 2S_1$ 에서 $a_2 = 2$ 이므로

$a_2 = 2,\ a_4 = 4,\ a_6 = 6,\ a_8 = 8$

곧, $a_1 = k$라 하면 $S_9 = 20 + (5k + 20) = 55$ 이므로

$k = 3$

따라서 $a_{11} = a_1 + 10 = 13$

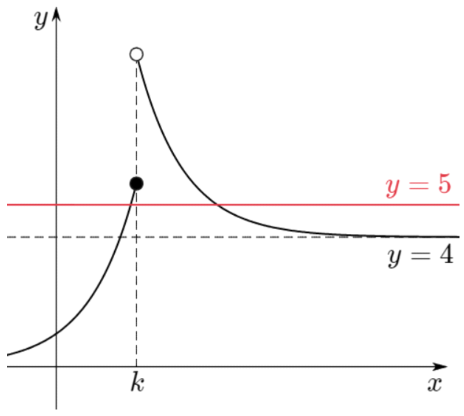
11 정답 ③

$x = k$를 기점으로 나눠는 두 곡선이 직선 $y = n$과 만난다.

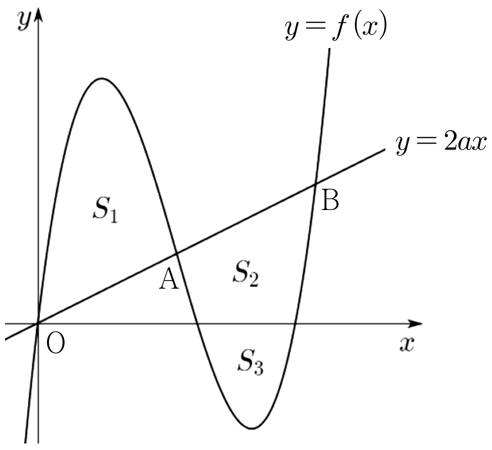
$y = N$이 두 점에서 만나면 $y = N-1$, $y = N-2$, $\cdots$, $y = 5$과도 두 점에서 만나기 때문에 $n = 5$인 경우만 살펴보면 된다.

즉, $2^k \geq 5$, $2^{6-k} + 4 > 5$이므로

가능한 k의 값은 $3, 4, 5$의 3개



12 정답 ②



$S_1 - S_2 = S_3$ 이므로 $S_1 = S_2 + S_3$이다.

점 B의 x좌표를 k라 하면,

함수 $\displaystyle\int_0^x \{f(t) - 2at\}dt$는 $x = 0$에서 극솟값 0을 가지고,

$\displaystyle\int_0^k \{f(t) - 2at\}dt = 0$ 이므로 $x = k$에서도 극솟값 0을 가진다.

따라서 $\displaystyle\int_0^x \{f(t) - 2at\}dt = \frac{a}{4}x^2(x-k)^2$ 이고,

$f(x) - 2ax = ax\left(x - \frac{k}{2}\right)(x - k)$

$ax(x-4)(x-b) - 2ax = ax\left(x - \frac{k}{2}\right)(x-k)$

$x \neq 0$일 때, 양변을 ax로 나누면,

$(x-4)(x-b) - 2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)(x-k)$

$x^2 - (4+b)x + 4b - 2 = x^2 - \frac{3}{2}kx + \frac{k^2}{2}$

각 항의 계수를 비교하면

$4 + b = \frac{3}{2}k,\ 4b - 2 = \frac{k^2}{2}$

두 식을 연립하면 $(4+b)^2 = \frac{9}{2}(4b-2)$

$$b^2 + 8b + 16 = 18b - 9 \Rightarrow \therefore\ b = 5$$

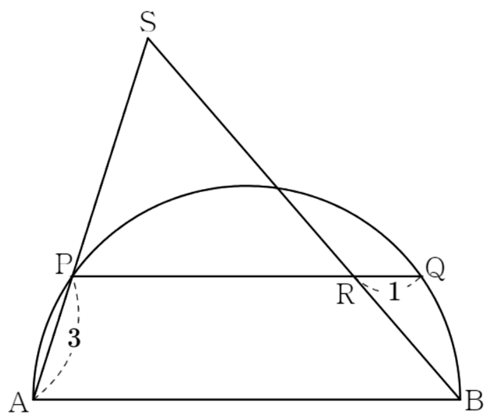
한편, $S_3 = 16 - \displaystyle\int_0^5 f(x)dx$, $S_3 = -\displaystyle\int_4^5 f(x)dx$이므로

$16 = \displaystyle\int_0^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx = 16$

$a\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 10x^2\right]_0^4 = 32a = 16$

곧, $a = \frac{1}{2}$ 이고 $b - a = \frac{9}{2}$

13 정답 ③



$\overline{\mathrm{BQ}} = 3$이고, $\sin(\angle\mathrm{BRQ}) = \sin(\angle\mathrm{SRP}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$에서

$\cos(\angle\mathrm{BRQ}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{BR}} = x$라 하면, 삼각형 BQR에서 코사인법칙에 의해

$x^2 + 1 - 2 \times 1 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$

$x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 8 = 0$

$(x - 2\sqrt{3})\left(x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

곧, $x = 2\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 BQR에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin Q} = \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin R} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin Q} = \frac{3}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

곧, $\sin Q = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고, $\cos Q = -\frac{1}{3}$ 인데,

사각형 ABQP가 원에 내접하므로 $\cos A=\cos(\pi-Q)=\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{AB}=\frac{3}{\cos A}=9$

점 P, Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_1, H_2라 할 때,

$\overline{AH_1}=\overline{BH_2}=3\cos A=1$이 되므로 $\overline{PQ}=\overline{H_1H_2}=7$

곧, $\overline{PR}=6$이며, $\overline{PS}=k$라 하면 닮음비에 의해

$k:6=(k+3):9$

이므로 방정식을 풀면 $k=6$이다.

14 정답 ④

조건 (가)를 만족시키려면

$f(k)=g(k)$이거나 $f(k)=-g(k)$이다.

(ⅰ) $f(k)=g(k)$이면

$f'(k)=0$이거나 $k=0$이면 충분하다.

한편, 조건 (나)에서 $f'(2)<0$이면 방정식 $f'(x)=0$은

서로 다른 두 실근을 가지므로 $f'(0)\neq 0$이면

$f'(k)=0$이거나 $k=0$인 실수 k의 개수는 3이다.

(ⅱ) $f(k)=-g(k)$이면

$g(k)=f(k)-kf'(k)$이므로 $f(k)=-f(k)+kf'(k)$에서

$2f(k)=kf'(k)$인데, $k=2$인 경우 조건 (나)에 의해 성립하므로

(ⅱ)를 만족시키는 k가 적어도 하나 존재하게 된다.

그러면 $f'(0)\neq 0$일 때 조건 (가)를 만족시키기 위해 (ⅰ)를

만족시키는 k는 3개일 수 없다.

따라서 $f'(0)=0$임을 얻고, $f(x)=x^3+ax^2+b$라 둘 수 있다.

$f(2)=8+4a+b$, $f'(2)=12+4a$이므로

조건 (나)에서 $b=4$

곧, $f(x)=x^3+ax^2+4$이며, $f'(2)<0$이므로

$12+4a<0$, 곧, $a<-3$이다. … ㉠

한편, (ⅰ)를 만족시키는 실수 k의 개수가 2이므로 (ⅱ)에서는

$k=2$ 이외의 방정식 $2f(k)=kf'(k)$의 실근이 존재하면 안 된다.

$2(k^3+ak^2+4)=k(3k^2+2ak)$

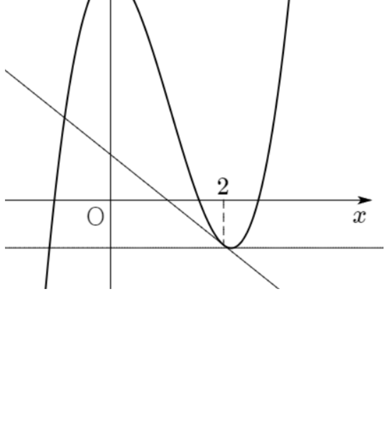
$k^3-8=0 \Rightarrow \therefore\ k=2$

곧, a의 값에 관계없이 방정식 $2f(k)=kf'(k)$의 실근은

$k=2$ 뿐이고, 따라서 ㉠만 만족시키면 충분하다.

곧, $f(4)=68+16a<20$이므로

$f(4)$의 값으로 가능한 정수의 최댓값은 19이다.



15 정답 ①

어떤 자연수 m에 대하여 $a_m=2k+1$이라 하자.

(단, k는 음이 아닌 정수)

그러면 $a_{m+1}=2k^2+2k$, $a_{m+2}=k^2+k=k(k+1)$

이때, a_{m+1}, a_{m+2}는 모두 0 또는 짝수이기 때문에

수열 $\{a_n\}$의 제m항 다음으로 처음으로 홀수가 될 수 있는

항은 적어도 제$(m+3)$항은 되어야 한다.

다시 말해, 홀수가 나오는 주기는 적어도 3 이상이다.

따라서 a_n이 홀수가 되도록 하는 7 이하의 자연수 n의 개수가

3이려면 a_1, a_4, a_7이 홀수가 되는 경우가 유일하다.

한편, $a_m=2k+1$이면 $a_{m+3}=\frac{k^2+k}{2}$인데,

a_{m+3}이 홀수가 되려면 k를 4로 나눈 나머지가 1 또는 2이다.

(즉, $k=1, 2, 5, 6, \cdots$인 경우만 가능하다.)

곧, $a_1=2k+1$이면 $a_4=\frac{k^2+k}{2}$인데, 이 값이 홀수이므로

$\frac{k^2+k}{2}=2k'+1$이라 하면, $k'=\frac{k^2+k-2}{4}$이다.

같은 방식으로 $\frac{k^2+k-2}{4}$를 4로 나눈 나머지도 1 또는 2이다.

… ㉠

우선 $\frac{k^2+k-2}{4}=\frac{(k+2)(k-1)}{4}$가 정수가 되려면 k를 4로 나눈

나머지가 1 또는 2이어야 한다.

(ⅰ) $k=4p+1$(p는 음이 아닌 정수)이면

$\frac{k^2+k-2}{4}=p(4p+3)=4p^2+3p$이므로

이 수를 4로 나눈 나머지가 1 또는 2이다.

이때, $4p^2$는 항상 4로 나누어떨어지므로,

$3p$를 4로 나눈 나머지가 1 또는 2가 되려면

p를 4로 나눈 나머지가 2 또는 3이다.

즉, $p=2, 3, 6, 7, \cdots$이다.

(ⅱ) $k=4p+2$(p는 음이 아닌 정수)이면

$\frac{k^2+k-2}{4}=(p+1)(4p+1)=4p^2+5p+1$이므로

이 수를 4로 나눈 나머지가 1 또는 2이다.

이때, $4p^2+4p$는 항상 4로 나누어떨어지므로,

$p+1$을 4로 나눈 나머지가 1 또는 2가 되려면

p를 4로 나눈 나머지가 0 또는 1이다.

즉, $p=0, 1, 4, 5, \cdots$이다.

(ⅰ), (ⅱ)의 경우에 가능한 a_1의 값을 모두 나열하면

(ⅰ) : 19, 27, 51, ⋯ / (ⅱ) : 5, 13, 73, ⋯

따라서 a_1의 값 중 두 번째로 작은 것은 13이다.

정답 및 해설

16 정답 11

주어진 로그가 각각 정의되기 위하여 $x>3$이다.

$3+\log_2(x-2)=\log_2(x-2)+\log_2(x-3)$

따라서 $3=\log_2(x-3)$이므로 $x=11$

17 정답 5

$f'(x)=(x^3-3x+3)+(x-2)(3x^2-3)$이므로

$f'(2)=5$

18 정답 8

집합 A는 X의 원소 n에 대하여 $n-7$의 $n+1$제곱근 중 실수인 것을 모두 모아놓은 것이다.

n이 짝수이면 그 개수는 1,

n이 홀수이면

- $n=1,3,5$이면 개수는 0
- $n=7$이면 개수는 1
- $n=9$이면 개수는 2

$n(A)=0+1+0+1+0+1+1+1+2+1=8$

19 정답 14

$x=0$는 주어진 범위에 포함되므로 $f(0)=4$이다.

함수 $f(x)-\int_0^x|f'(t)|dt$의 도함수가 $f'(x)-|f'(x)|$이므로

$f'(x)\ge 0$일 때 함수 $f(x)-\int_2^x|f'(t)|dt$가 상수함수이다.

이 값이 4로 일정한 범위가 $-1\le x\le 1$이려면 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이고, $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이다.

따라서 $f'(x)=a(x^2-1)\ (a<0)$라 두면,

$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax+C$

$f(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $|f(2)|=\left|\dfrac{2}{3}a+4\right|=6$이므로 방정식을 풀면

$a=3$ 또는 $a=-15$인데, $a<0$이므로 $a=-15$

곧, $f(x)=-5x^3+15x+4$이며, $f(1)=14$

20 정답 41

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{f(x)g(x)}$가 0이 아닌 값으로 정의되기 위하여 $f(x)$가 일차함수, $g(x)$가 이차함수 또는 $f(x)$가 이차함수, $g(x)$가 일차함수이다.

한편, (가)에서 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)g(x)}{f(x)-(x-1)g(x)}$에서 $f(1)\ne0$이면 극한값이 0이 되므로 모순 $\Rightarrow f(1)=0$

한편, $f(0)=2$인데, $f(x)$가 일차함수이면 $f(1)=0$에서 최고차항의 계수가 음수가 되므로 모순이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수, $g(x)$는 일차함수이다.

조건 (나)에서 $f(1)=0$임에도 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$인 실수 x가 존재하지 않으려면 $g(1)=0$이다.

또한, 방정식 $f(x)=0$은 $x=1$ 외에 실근을 가지면 안 되기 때문에 $f(x)=a(x-1)^2$, $g(x)=b(x-1)$로 둘 수 있다.

이때, $f(0)=2$이므로 $a=2$이고, 조건 (가)에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{b(x-1)^2}{2(x-1)^2-b(x-1)^2}\times\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2b(x-1)^3}=1$$

$$\frac{b}{2-b}\times\frac{1}{2b}=\frac{1}{2(2-b)}=1$$

따라서 $b=\dfrac{3}{2}$이고, $g(x)=\dfrac{3}{2}(x-1)$이다.

구하는 값은 $f(5)+g(7)=32+9=41$

21 정답 128

첫 번째 조건에서 $a_m+a_{m+2}=b_m+b_{m+2}$이므로

등차중항의 성질에 의해 $a_{m+1}=b_{m+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{2m}(a_n+b_n)&=(2m-1)(a_{m+1}+b_{m+1})\\&=2(2m-1)a_{m+1}\\&=28\end{aligned}$$

곧, $(2m-1)a_{m+1}=14$에서 $2m-1$이 3 이상의 홀수이므로 가능한 경우는 $m=4$, $a_5=2$인 경우 뿐이다.

한편, $a_5=b_5=2$이므로 두 수열의 공차를 d_a, d_b라 하면

$(2-4d_a)(2-4d_b)=44 \Rightarrow (1-2d_a)(1-2d_b)=11$

$d_a\ne0$, $d_b\ne0$이므로 $d_a=1$, $d_b=6$ 또는 $d_a=6$, $d_b=1$이다.

두 경우 모두 a_9+b_9의 값은 동일하다.

따라서 $d_a=1$, $d_b=6$이라 하면

$a_9=2+1\times4=6$, $b_9=2+6\times4=26$

$m\times(a_9+b_9)=4\times32=128$

22 정답 81

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+t^2)-f(x)}{t^2}=|(x-a)(x-b)|$에서 $t^2>0$이므로 함수 $f(x)$의 우미분계수는 항상 양수이며, ⋯ ㉠

이 극한값이 존재하기 위해 $f(x)=\lim\limits_{t\to0+}f(x+t)$이다. ⋯ ㉡

조건 (가)에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

㉡에 의해 $2n\times f(0)=f(0)$

이때, n이 자연수이므로 $f(0)=0$

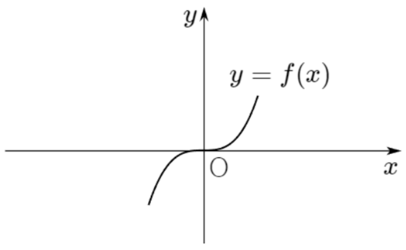
또한, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속인데,

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$h(x)=(x-a)(x-b)$라 할 때, $f'(0)=h(0)=0$이다.

따라서 다음과 같이 $x=0$ 주변에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.

정답 및 해설



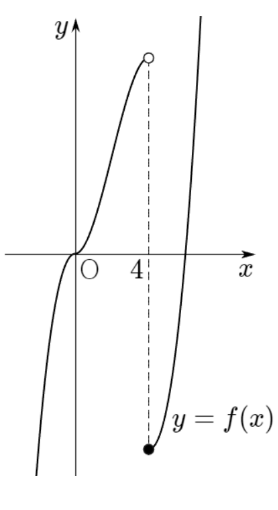
한편, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이면 ㉠에서 이 함수는 증가함수이므로 $f(n+1)<f(n+2)$이다.
이는 조건 (나)에 모순이므로 함수 $f(x)$는 불연속인 점이 닫힌구간 $[n+1,\ n+2]$에 존재해야 한다.
한편, $f(x)$가 불연속이더라도 조건 (가)를 만족하려면 함수 $f(x)g(x)$가 연속이기 위해 $f(x)$가 불연속인 지점에서 $g(x)=0$, 즉, $x=2n$이어야 한다.
따라서 $n+1 \le 2n \le n+2$의 부등식을 세울 수 있고, 이를 만족시키는 자연수 n은 1 또는 2이다.

(i) $n=1$이면
$f(n+1)=f(2)=\lim_{x\to 2+} f(x)<0$인데, 열린구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(n+1)<f(n+2)$이 되어 모순.

(ii) $n=2$이면
$f(n+2)=f(4)=\lim_{x\to 4+} f(x)<0$이고, $f(n+1)=f(3)>0$이므로 조건 (나)가 성립한다.

한편, 조건 (다)에서 이미 $f'(0)=0$이므로 이 점 외에 $f(x)$가 미분가능한 점에서 $f'(x)=0$일 수 없다.
따라서 $\lim_{x\to 4+} f'(x)=0$이면 $\lim_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$의 값이 존재하지 않기 때문에 조건 (다)를 만족시킨다.
곧, $a=0$, $b=4$이며, $0<x<4$에서 $x(x-4)<0$이므로
$f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+2x^2$이다.
한편, $x=4$에서 조건 (가)를 만족시키려면
$\lim_{x\to 4-}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}=\lim_{x\to 4+}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}$
$\lim_{x\to 4-} f'(x)=\lim_{x\to 4+} f'(x)=0$이므로
$\lim_{x\to 4-} f(x)g'(x)=\lim_{x\to 4+} f(x)g'(x)$
$g'(4-)=-g'(4+)$이므로 $f(4-)=f(4+)$
함수 $f(x)$는 그림과 같으며, 다음을 만족시킨다.

$$f'(x)=\begin{cases} h(x) & (x<0) \\ -h(x) & (0 \ge x<4) \\ h(x) & (x>4) \end{cases}$$



$\lim_{x\to 4-} f(x)=\dfrac{32}{3}$이므로 $\lim_{x\to 4+} f(x)=-\dfrac{32}{3}$
따라서 $x \ge 4$에서 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+C$라고 두면
$C=0$이므로 $f(9)=243-162=81$