2025학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ① (출제자 : 23 강태후)

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가?

[해설]

$\left(2^{-4}\times 2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2-\sqrt{2}}$

$=\left(2^{-2-\sqrt{2}}\right)^{2-\sqrt{2}}$

$=2^{-2}$

$=\dfrac{1}{4}$

2) [정답] ④ (출제자 : 24 박예림)

[출제의도] 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+kx+5$ 에서

$f'(x)=3x^2-4x+k$ 이므로

$f'(1)=-1+k=6$

따라서 상수 k 의 값은 7 이다.

3) [정답] ② (출제자 : 24 김진)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ 이므로

$\tan\theta+2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta-\dfrac{2}{\tan\theta}=1$

$\tan\theta-\dfrac{2}{\tan\theta}=1$ 에서 양변에 $\tan\theta$ 를 곱하면

$\tan^2\theta-2=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-2=0$

$(\tan\theta+1)(\tan\theta-2)=0$

$\tan\theta=-1$ 또는 $\tan\theta=2$

이때, $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 이므로

$\tan\theta=-1$

이때, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$, $\sin\theta=-\cos\theta$ 이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에 대입하면

$2\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이때, $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $\sin\theta\times\cos\theta=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

4) [정답] ③ (출제자 : 24 김지율)

[출제의도] 함수가 연속일 조건을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$-a^2+7a-6=a+3$

$-a^2+6x-9=0$

$-(a-3)^2=0$

따라서 $a=3$

5) [정답] ③ (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

[해설]

$a_2\times a_4\times a_6=(a_4)^3=8$, $a_4=2$

$a_3+a_6=8(a_6+a_9)=8\left\{r^3(a_3+a_6)\right\}$

$r\neq-1$ 이므로 $a_3+a_6\neq0$

따라서 $r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_8=a_4\times r^4=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{8}$

6) [정답] ① (출제자 : 24 배지희)

[출제의도] 함수의 극대, 극소를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로

$f'(1)=0$

$3+2a+9=0$

따라서 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 8 이므로

$f(1)+f(3)=4+2b=8$

따라서 $b=2$

$\therefore a+b=-4$

7) [정답] ② (출제자 : 24 배지희)

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

[해설]

$f(m)$의 n제곱근 중 자연수가 존재하므로 $f(m)>0$이다.
또한 $f(m)$의 n제곱근은 x에 대한 방정식
$x^n=f(m)$
의 근이므로 $f(m)$은 어떤 자연수의 거듭제곱이어야 한다.
이때 m이 자연수이므로 가능한 $f(m)$의 값은 3, 8, 11, 12이다.

(ⅰ) $n=2$일 때,
가능한 $f(m)$의 값이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $n=3$일 때,
가능한 $f(m)$의 값이 8의 1개이다.

따라서 $f(m)=-(m-2)^2+12=8$이므로
$m=4$, $n=3$
$\therefore m+n=7$

8) [정답] ② (출제자 : 24 박서진)

[출제의도] 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 위치를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P가 원점에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-15$이므로
시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면
$s_1(t)=\int_0^t(3t^2+4t-15)\,dt=t^3+2t^2-15t$
또, 점 Q가 원점에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=kt+6$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면
$s_2(t)=\int_0^t(kt+6)\,dt=\frac{1}{2}kt^2+6t$
점 P의 위치가 0이 되는 시각은
$s_1(t)=t^3+2t^2-15t=t(t+5)(t-3)=0$
그러므로 $t=0$ 또는 $t=-5$ 또는 $t=3$
출발한 후 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=3$
시각 $t=3$에서 점 Q의 위치는 0이므로
$s_2(3)=\frac{1}{2}k\times3^2+6\times3=\frac{9}{2}k+18=0$
따라서 $k=-4$

9) [정답] ③ (출제자 : 24 박서진)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$$2\sin\frac{\pi}{a}x=\tan\frac{\pi}{a}x=\frac{\sin\frac{\pi}{a}x}{\cos\frac{\pi}{a}x}$$

두 점 A, B는 x축 위에 있지 않기 때문에 $\sin\frac{\pi}{a}x\neq0$이므로
$\cos\frac{\pi}{a}x=\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{a}x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{a}x=-\frac{\pi}{3}$이므로 $x=\frac{a}{3}$ 또는 $x=-\frac{a}{3}$

두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}\left(-\frac{a}{3},\,-\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{a}{3},\,\sqrt{3}\right)$이라 하자.
삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 OAC, OBC의 넓이의 합과 같으므로
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\sqrt{3}$
$=\left(\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{3}\right)\times2$
$=\sqrt{3}a$
$=4\sqrt{3}$
따라서 $a=4$
이때 직선 AB의 기울기는 $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

10) [정답] ④ (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=4x-k$, $g(x)=x(x-3)^2$라 하자.

$x_2=t$, $x_3=t+1$라 하면 $f(t)=g(t)$, $f(t+1)=g(t+1)$
$f(x)$는 기울기가 4인 직선이므로 $f(t)+4=f(t+1)$
따라서 $g(t)+4=g(t+1)$, $t(t-3)^2+4=(t+1)(t-2)^2$
$t=0$, $t=3$

$t=0$이면 $x<0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 만나지 않는다.
x_1이 존재하지 않기에 $t=0$이면 모순이므로 $t=3$
$f(3)=g(3)$이므로 $12-k=0$, $k=12$

따라서 $f(x)=g(x)$, $4x-12=x(x-3)^2$을 만족하는 x의 값은
-1, 3, 4이므로 $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=4$이다.

따라서
$A=\int_{-1}^{3}\{g(x)-f(x)\}\,dx$
$B=\int_{3}^{4}\{f(x)-g(x)\}\,dx$ 일 때,

$B-A$
$=\int_3^4\{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_{-1}^3\{g(x)-f(x)\}\,dx$
$=\int_3^4\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^3\{f(x)-g(x)\}\,dx$
$=\int_{-1}^4\{f(x)-g(x)\}\,dx$
$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{5}{2}x^2-12x\right]_{-1}^{4}$
$=-\frac{125}{4}$

$k=12$, $B-A=-\frac{125}{4}$이므로
$k+B-A=-\frac{77}{4}$

11) [정답] ② (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 등차수열을 추론할 수 있는가?

[해설]

어떤 k에 대하여 $|a_k|$의 값이 자연수이고, 수열 $\{a_n\}$의 공차가 정수이므로 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

$|a_k|=m$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 2가 되도록 하는 자연수는 α와 3뿐이므로 등차수열 $\{a_n\}$은 항으로 $-\alpha$, -3, 3, α를 가진다.

등차수열 $\{a_n\}$이 0을 항으로 갖는 경우, $a_3=0$이므로

$|a_1|=|a_5|=3$, $|a_2|=|a_4|=\alpha$이면 $\{a_n\}$의 공차가 $-\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}$이어야 한다. 그런데, 공차가 $-\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}$이면 $\alpha=\frac{3}{2}$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

$|a_1|=|a_5|=\alpha$, $|a_2|=|a_4|=3$이면 $\{a_n\}$의 공차가 -3 또는 3이어야 한다. 따라서 $\alpha=6$이면 조건을 만족시킨다.

한편, 등차수열 $\{a_n\}$이 0을 항으로 가지지 않는 경우,

$|a_1|=|a_4|=3$, $|a_2|=|a_3|=\alpha$이면 $\{a_n\}$의 공차가 -2 또는 2이어야 한다. 따라서 $\alpha=1$이면 조건을 만족시킨다.

$|a_1|=|a_4|=\alpha$, $|a_2|=|a_3|=3$이면 $\{a_n\}$의 공차가 -6 또는 6이어야 한다. 따라서 $\alpha=9$이면 조건을 만족시킨다.

i) a_n이 0을 항으로 갖는 경우,

모든 항이 정수이므로 $\alpha=6$

따라서, $a_n=-3n+9$ 또는 $a_n=3n-9$

$\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=\sum_{k=1}^{6} a_k$이므로 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=-9$ 또는 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=9$

ii) a_n이 0을 항으로 갖지 않는 경우,

모든 항이 정수이므로 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=9$

$\alpha=1$일 때, $a_n=-2n+5$ 또는 $a_n=2n-5$

$\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=a_1$이므로 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=-3$ 또는 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=3$

$\alpha=9$일 때, $a_n=-6n+15$ 또는 $a_n=6n-15$

$\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=\sum_{k=1}^{9} a_k$이므로 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=-135$ 또는 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k=135$

따라서 $\sum_{k=1}^{\alpha} a_k$의 최댓값은 135이다.

12) [정답] ② (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+b^2}{x-a}$의 값이 존재하려면

$x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)+b^2\}=f(a)+b^2=0$이므로

사차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서만 $f(x)=-b^2$를 만족시키는 실수 b의 값이 존재한다.

함수 $g(x)=-x^2$이라 할 때, 함수 $g(x)$의 최댓값은 0이다.

함수 $f(x)$의 최솟값을 m이라고 하자.

i) $m<0$일 때

$f(a)=g(b)$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)가 무한히 많이 존재하므로 조건에 모순이다.

ii) $m>0$일 때

$f(x)>0$이고, $g(x)<0$이므로 $f(a)=g(b)$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)가 존재하지 않으므로 조건에 모순이다.

iii) $m=0$일 때

$b=0$일 때, 조건에서 $f(a)=0$를 만족시키는 실수 a의 값이 0과 2뿐이므로 $f(x)=x^2(x-2)^2$이다.

따라서 $f(3)=3^2=9$

13) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에서

$\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt = x\int_0^x f'(t)\,dt - \int_0^x tf'(t)\,dt$

이므로 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt = f(x)-f(0)$ 이다.

즉, $\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt = \int_0^x \{f(t)-f(0)\}\,dt$ 이다.

또한, $\frac{1}{2}x^2 = \int_0^x t\,dt$ 이므로

따라서 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt \geq \frac{1}{2}x^2$ 은

$\int_0^x \{f(t)-f(0)-t\}\,dt \geq 0$ 이다.

조건 (나)에 의해 $f(x)-f(0) = x(x+3)(x-\alpha)$ 이므로

$f(t)-f(0)-t = t^3+(3-\alpha)t^2-(3\alpha+1)t$ 이고,

$\int_0^x \{f(t)-f(0)-t\}\,dt = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3-\alpha}{3}x^3 - \frac{(3\alpha+1)}{2}x^2$ 이다.

모든 실수 x에 대하여

$\frac{1}{4}x^4 + \frac{3-\alpha}{3}x^3 - \frac{(3\alpha+1)}{2}x^2$

$= \frac{1}{4}x^2\left\{x^2+\frac{4(3-\alpha)}{3}x-2(3\alpha+1)\right\} \geq 0$

이므로

$x^2+\frac{4(3-\alpha)}{3}x-2(3\alpha+1) \geq 0$ 즉, 판별식 D에 대하여

$D \leq 0$ 이어야 한다.

$D = \frac{16}{9}(3-\alpha)^2+8(3\alpha+1) \leq 0$

$2\alpha^2+15\alpha+27 \leq 0$

그러므로 $-\frac{9}{2} \leq \alpha \leq -3$ 이다.

$f(1) = 1\times 4\times(1-\alpha)+f(0)$ 이므로

$\alpha = -\frac{9}{2}$ 일 때, $M = 22+f(0)$ 이고

$\alpha = -3$ 일 때, $m = 16+f(0)$ 이다.

따라서 $M-m = 6$

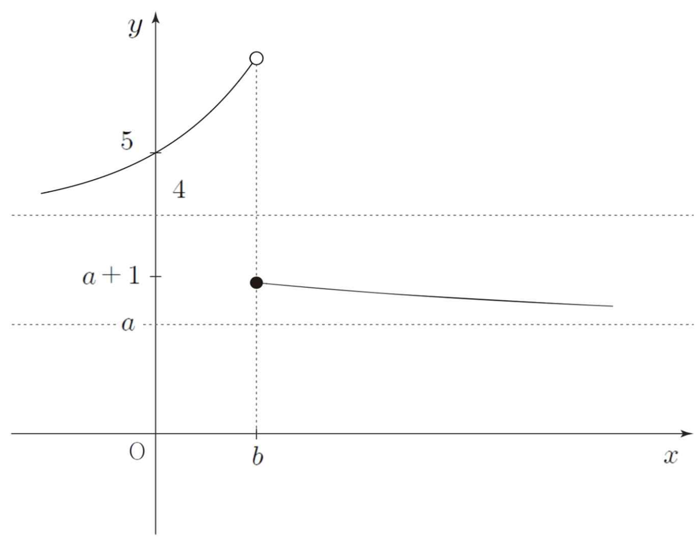
14) [정답] ⑤ (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$a \geq 4$ 이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>4$ 이므로 모든 자연수 m에 대하여 $f(m)f(-m)>16$ 이 성립한다. 그러나 이 경우 조건을 만족시키지 않으므로 a는 $1,2,3$ 중 하나이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m의 개수를 k라 하자.

$x<b$ 일 때 $f(x)$의 점근선은 $y=4$ 이므로 $f(x)>4$ 이다. 그러므로 $m<b$ 인 모든 자연수 m에 대하여 $f(m)f(-m)>16$ 를 만족한다.

$x \geq b$ 일 때 $f(x)$와 $f(-x)$는 모두 감소한다. 그러므로 $x=b$ 일 때 $f(x)f(-x)$가 최댓값을 가진다.

$f(b)f(-b) = (2^{-b}+4)\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^b+a\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^b+4\right\}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^b+a\right\}$ 이고

a는 $1,2,3$ 중 하나이므로 $a=3$, $b=1$ 일 때 최대이다. 이 경우 $f(b)f(-b) = \left(\frac{1}{2}+4\right)\left(\frac{1}{4}+3\right) < 16$ 으로 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키지 않는다. 따라서 $f(m)f(-m)>16$ 를 만족시키는 자연수 m은 $x<b$ 에 존재한다. 따라서 $b=k+1$, $b-1=k$ 이고, 조건을 만족시키는 자연수 m의 개수는 b에 따라 결정됨을 알 수 있다.

(i) $a=1$ 일 때

$nf(n)$의 값은 $n<b$ 일 때 $n(2^n+4)$ 이고, $b \leq n$ 일 때 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 가 된다. $n(2^n+4)$ 인 경우 $n=1$ 일 때만 $nf(n)<12$ 를 만족한다.

$n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 인 경우 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\} = n\left(\frac{1}{4}\right)^n+n$ 이므로 $n \leq 11$ 일 때 $nf(n)<12$ 를 만족한다.

그러므로 $nf(n)<12$ 를 만족하는 $b \leq 12$ 일 때의 자연수 n의 개수는 $n(2^n+4)$ 일 때 $n=1$ 로 1개, $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 일 때 $12-b$ 개다. 또한 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m의 개수는 $b-1$ 이므로 $1+(12-b)+(b-1)=12$ 이다. 이 경우 개수의 합이 7인 조건을 만족시키지 않는다.

$12<b$ 인 경우 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m의 개수가 $b-1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때

$nf(n)$ 의 값은 $n<b$ 일 때 $n(2^n+4)$ 이고, $b \le n$ 일 때 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 가 된다. $n(2^n+4)$ 인 경우 $n=1$ 일 때만 $nf(n)<12$ 를 만족한다.

$n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 인 경우 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}=n\left(\frac{1}{4}\right)^n+2n$ 이므로 $n \le 5$ 일 때 $nf(n)<12$ 를 만족한다. 그러므로 $nf(n)<12$ 를 만족하는 $b \le 6$ 일 때의 자연수 n 의 개수는 $n(2^n+4)$ 일 때 $n=1$ 로 1 개, $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 일 때 $6-b$ 개다. 또한 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 $b-1$ 이므로 $1+(6-b)+(b-1)=6$ 이다. 이 경우 개수의 합이 7 인 조건을 만족시키지 않는다.

$6<b$ 인 경우 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수가 $b-1$ 개, $nf(n)<12$ 를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 $n=1$ 로 1 개이므로 $(b-1)+1=b$ 이다. 조건을 만족시키기 위해서는 $b=7$.
그러므로 $a=2$, $b=7$

(iii) $a=3$ 일 때

$nf(n)$ 의 값은 $n<b$ 일 때 $n(2^n+4)$ 이고, $b \le n$ 일 때 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 가 된다. $n(2^n+4)$ 인 경우 $n=1$ 일 때만 $nf(n)<12$ 를 만족한다.

$n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 인 경우 $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}=n\left(\frac{1}{4}\right)^n+3n$ 이므로 $n \le 3$ 일 때 $nf(n)<12$ 를 만족한다. 그러므로 $nf(n)<12$ 를 만족하는 $b \le 4$ 일 때의 자연수 n 의 개수는 $n(2^n+4)$ 일 때 $n=1$ 로 1 개, $n\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+a\right\}$ 일 때 $4-b$ 개다. 또한 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 $b-1$ 이므로 $1+(4-b)+(b-1)=4$ 이다. 이 경우 개수의 합이 7 인 조건을 만족시키지 않는다.

$4<b$ 인 경우 $f(m)f(-m)>16$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수가 $b-1$ 개, $nf(n)<12$ 를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 $n=1$ 로 1 개이므로 $(b-1)+1=b$ 이다. 조건을 만족시키기 위해서는 $b=7$.
그러므로 $a=3$, $b=7$.

(i) ~ (iii)에 의해 조건을 만족시키는 모든 a, b 의 순서쌍은 $(2,\ 7)$, $(3,\ 7)$ 이다. 그러므로 모든 $a+b$ 의 값은 $2+7=9$, $3+7=10$.
따라서 모든 $a+b$ 의 값의 합은 $9+10=19$

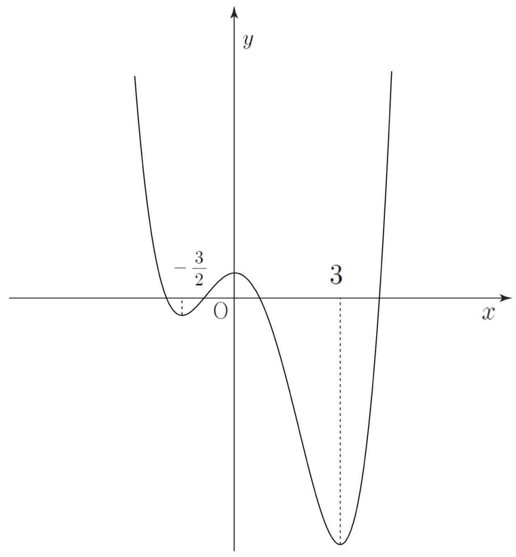
15) [정답] ① (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수를 파악할 수 있는가?

[해설]

$f'(x)=4x^3-6x^2-18x=2x(2x+3)(x-3)$

따라서 $f(x)$ 는 $x=-\frac{3}{2}$, $x=0$, $x=3$ 에서 극값을 갖고 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

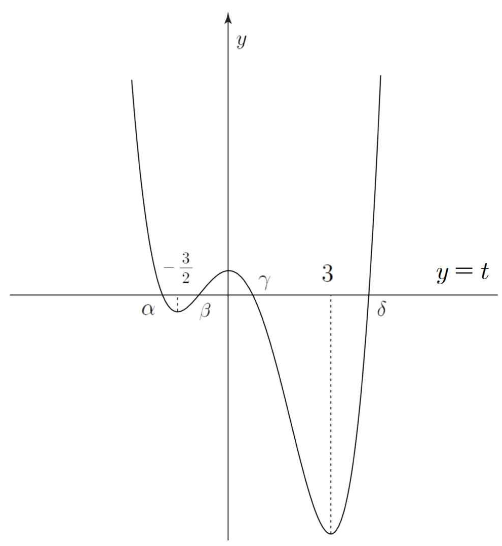


$f(x)<t<g(x)$ 를 만족하려면 $f(x)<t$, $g(x)>t$ 를 동시에 만족시야 한다.

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로 $g(x)>t$ 를 만족시키는 열린구간이 최대 1 개 존재한다. 따라서 $f(x)<t$ 를 만족시키는 열린구간이 2 개 존재해야 하고 두 열린구간은 겹치는 부분이 없어야 한다.

$f(x)<t$ 를 만족시키는 서로 다른 열린구간이 2 개 존재하도록 하는 t 의 값의 범위는 $f\left(-\frac{3}{2}\right)<t \le f(0)$

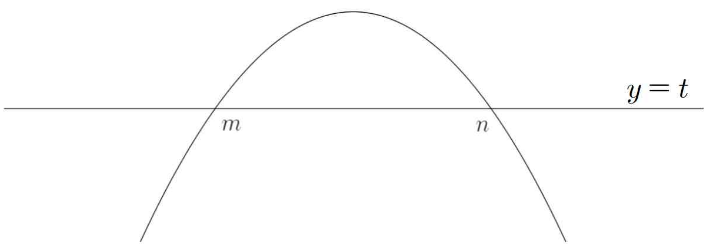
$f\left(-\frac{3}{2}\right)<t \le f(0)$ 을 만족시키는 t 에 대하여 $f(x)=t$ 의 실근을 작은 순서대로 α, β, γ, δ 라 하고, 그래프로 나타내면 다음과 같다.



위와 같은 경우, $f(x)<t$ 를 만족시키는 열린구간은 (α,β), (γ,δ) 의 2 개이다.

조건을 만족시키려면 $g(x)>t$ 를 만족시키는 열린구간이 존재해야 하는데 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이므로 $g(x)=t$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=t$ 의 서로 다른 두 실근을 작은 순서대로 m, n 이라 하고, 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이때, $g(x)>t$ 를 만족시키는 열린구간은 $(m,\ n)$ 이고, $f(x)<t<g(x)$ 를 만족시키는 열린구간이 2 개 존재하려면 $m<\beta$, $n>\gamma$ 이어야 한다.

$-3>f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ 이므로 $t=-3$ 일 때, $f(x)<-3$ 을 만족시키는 열린구간은 2 개 존재한다.
하지만 $f(x)<-3<g(x)$ 를 만족시키는 열린구간의 개수는 2 가 아니므로 $m\geq\beta$ 또는 $n\leq\gamma$ 이어야 한다.

그런데 $g'(0)=0$ 으로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖고 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 $t=-3$ 일 때, $m=\beta$, $n>\gamma$

$f(x)=-3$ 의 실근 중 가장 큰 음의 실근은 $x=-1$ 이므로 $m=-1$
따라서 $g(m)=g(-1)=-3$

또한, $t=3$ 일 때 조건을 만족시키고, $f(x)<3$ 을 만족시키는 열린구간은 2개 존재하므로 $g(0)>3$ 이어야 $g(x)>3$ 을 만족시키는 열린구간이 존재한다.

$g(x)=ax^2+bx+c$ 라 하자.
$g'(0)=0$, $g(-1)=-3$ 이므로
$b=0$, $a+c=-3$
곧, $g(x)=ax^2-a-3$

그런데, $g(0)>3$ 이어야 하므로 $-a-3>3$
곧, $a<-6$

따라서 $g(2)=3a-3$
$a<-6$ 인 정수이므로 $g(2)$ 의 최댓값은 -18

16) [정답] 7 (출제자 : 24 박서진)
[출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]
로그의 진수 조건에 의하여
$x-1>0$ 에서 $x>1$ …… ㉠
$x+2>0$ 에서 $x>-2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x>1$
$\log_2(x-1)=\log_{2^2}(x-1)^2=\log_4(x-1)^2$ 이고
$1+\log_4(x+2)=\log_4 4(x+2)$ 이므로 주어진 방정식은
$\log_4(x-1)^2=\log_4 4(x+2)$
$(x-1)^2=4(x+2)$
$x^2-2x+1=4x+8$
$x^2-6x-7=(x+1)(x-7)=0$
따라서 $x=-1$ 또는 $x=7$
로그의 진수 조건을 만족하는 실수 x 의 값은 7 이다.

17) [정답] 3 (출제자 : 24 배지희)
[출제의도] 다항함수의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f(x)=ax^3+ax^2-4x-2$
$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$
$\displaystyle=\int_{-3}^{3}(ax^3+ax^2-4x-2)\,dx$
$\displaystyle=\int_{-3}^{3}(ax^3-4x)\,dx+\int_{-3}^{3}(ax^2-2)\,dx$
$\displaystyle\int_{-3}^{3}(ax^3-4x)\,dx=0$, $\displaystyle\int_{-3}^{3}(ax^2-2)\,dx=2\int_{0}^{3}(ax^2-2)\,dx$
$\displaystyle\int_{-3}^{3}(ax^3-4x)\,dx+\int_{-3}^{3}(ax^2-2)\,dx$
$\displaystyle=2\int_{0}^{3}(ax^2-2)\,dx$
$\displaystyle=2\left[\frac{a}{3}x^3-2x\right]_0^3$
$=18a-12=42$
따라서 $a=3$

18) [정답] 5 (출제자 : 24 장경정)
[출제의도] 합의 기호 $\sum$를 이해하여 주어진 관계를 성립시키는 수열의 합의 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]
$a_n=b_n$ 일 때, $|a_n-b_n|=0$ 이므로 모순이다.
$a_n>b_n$ 일 때, $a_n+b_n=a_n-b_n$ 이므로 $b_n=0$ 이고
$a_n<b_n$ 일 때, $a_n+b_n=b_n-a_n$ 이므로 $a_n=0$ 이다.
따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=0$ 일 때 $b_n>0$ 이거나, $a_n>0$ 일 때 $b_n=0$ 이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$ 에서
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{5}a_{2k}=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=0$
$a_n\geq 0$ 이므로 $a_1=a_3=a_5=a_7=a_9=0$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}b_k$ 가 최솟값을 가지려면 $b_n=0$ 인 b_n 의 개수가 최대이고 $b_n\neq 0$ 일 때 $b_n=1$ 이어야 한다. 따라서 $n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$ 일 때 $a_n=0$ 이므로 $b_n=1$ 이며, $n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ 일 때 $a_n>0$, $b_n=0$ 이어야 한다.
그러므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}b_k$ 의 최솟값은 $1\times5+0\times5=5$

19) [정답] 11 (출제자 : 24 우효정)
[출제의도] 사잇값 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
$f(x)$ 가 열린구간 $(1,\ 3)$ 에서 최솟값을 가진다면 그 최솟값은 극솟값이어야 한다. $f'(x)=3x^2-6x+k$ 이므로 $f(x)$ 는 $f'(1)<0$, $f'(3)>0$ 일 때, 열린구간 $(1,\ 3)$ 에서 극솟값을 가진다.
따라서 $(k-3)(k+9)<0$, $-9<k<3$ 이다.
그러므로 가능한 모든 정수 k 의 개수는 11 이다.

20) [정답] 99 (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 사인법칙, 코사인법칙, 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

원에 내접하는 사각형 ABCD 에 대하여 $\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = \pi$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{BAD}) = \cos(\pi - \angle \mathrm{BCD}) = \frac{1}{4}$ 이다.

또한, $\angle \mathrm{PAD} + \angle \mathrm{BAD} = \pi$ 이므로

$\sin(\angle \mathrm{PAD}) = \sin(\pi - \angle \mathrm{BAD}) = \sin(\angle \mathrm{BAD})$ 이고,

사인법칙에 의해

$2R_1 = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin \angle \mathrm{BAD}}$, $2R_2 = \frac{\overline{\mathrm{PD}}}{\sin(\angle \mathrm{PAD})}$ 이다.

조건에서 $R_1 = R_2$ 이므로 $\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{\sin(\angle \mathrm{PAD})} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin \angle \mathrm{BAD}}$

즉, $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{BD}}$ 이다.

삼각형 ABD 또한 원 O_1 에 내접하므로 사인법칙에 의해

$2R_1 = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}$

$\overline{\mathrm{BD}} = 2 \times \frac{16\sqrt{15}}{15} \times \sqrt{1 - \cos^2(\angle \mathrm{BAD})}$

$\overline{\mathrm{BD}} = 2 \times \frac{16\sqrt{15}}{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 8$

선분 AD 의 길이를 x 라 할 때, $\angle \mathrm{PAD} + \angle \mathrm{BAD} = \pi$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{PAD}) = \cos(\angle \mathrm{BCD})$ 이다.

삼각형 PAD 에 대하여 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{DP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \cos(\angle \mathrm{PAD})$

$64 = 36 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times \left(-\frac{1}{4}\right)$

$x^2 + 3x - 28 = 0$, $(x+7)(x-4) = 0$

$x = 4$ $(\because x > 0)$

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 y 라 할 때, 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \cos(\angle \mathrm{BAD})$

$64 = 16 + y^2 - 2 \times 4 \times y \times \left(\frac{1}{4}\right)$

$y^2 - 2y - 48 = 0$, $(y-8)(y+6) = 0$

$y = 8$ $(\because y > 0)$

삼각형 ADP 와 삼각형 CPB 는 닮음이므로, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{DP}} : \overline{\mathrm{BP}}$ 이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{CP}} \times \overline{\mathrm{DP}}$ 이고, $\overline{\mathrm{CP}} = \frac{21}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{5}{2}$ 이다.

선분 BC 의 길이를 z 라 할 때, 삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \cos(\angle \mathrm{BCD})$

$64 = \frac{25}{2} + z^2 - 2 \times \frac{5}{2} \times z \times \left(-\frac{1}{4}\right)$

$4z^2 - 5z - 231 = 0$, $(4z-33)(z+7) = 0$

$z = \frac{33}{4}$ $(\because z > 0)$

사각형 ABCD 의 넓이는 삼각형 ABD 의 넓이와 삼각형 BCD 의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABD 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \sin(\angle \mathrm{BAD}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}$

삼각형 BCD 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \sin(\angle \mathrm{BCD}) = \frac{1}{2} \times \frac{33}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{35\sqrt{15}}{16}$

그러므로 사각형 ABCD 의 넓이는

$s = 4\sqrt{15} + \frac{35\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{16}$

따라서 $\frac{16\sqrt{15}}{15} \times s = 99$

21) [정답] 13 (출제자 : 23 임하준)

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 그래프의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]

(가) 조건에 의해 $y = f(x)$ 는 x 좌표가 0 , 2 , 4 인 점을 제외한 모든 점이 $y = g(x)$ 와 일치한다.

또한 $y = f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되므로 $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ 에서의 함숫값이 반드시 존재한다.

(가) 조건에 의해 $x \to 1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이므로 (나) 조건에서

$\lim_{h \to 0} \frac{|f(1+h) - 2|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|g(1+h) - 2|}{h}$

(분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 $g(1) = 2$, $g'(1) = 0$

$\therefore g(x) = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 - 2x + 3$ 과 $y = 2x + 3$ 에서

$x^2 - 2x + 3 = 2x + 3$

$x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$

따라서 직선 $y = 2x + 3$ 은 $y = x^2 - 2x + 3$ 과 점 $(0, 3)$, $(4, 11)$ 에서 만난다.

이때 점 $(0, 3)$, $(4, 11)$ 은 $y = f(x)$ 위의 점이 될 수 없고 $h(3) \neq 0$ 이므로 점 $(2, f(2))$ 가 $y = 2x + 3$ 위의 점이어야 한다.

$\therefore f(2) = 7$, $h(3) = 1$

$y = x^2 - 2x + 3$ 과 $y = 2x - 1$ 에서

$x^2 - 2x + 3 = 2x - 1$

$x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x-2)^2 = 0$

따라서 직선 $y = 2x - 1$ 은 $y = x^2 - 2x + 3$ 과 $x = 2$ 에서 접한다

.

이때 점 $(2, 3)$ 은 $y = f(x)$ 위의 점이 될 수 없고 $h(-1)h(3) = 2$ 에서 $h(-1) = 2$ 이므로 점 $(0, f(0))$, $(4, f(4))$ 가 $y = 2x - 1$ 위의 점이어야 한다.

$\therefore f(0) = -1$, $f(4) = 7$

그러므로 $f(0) + f(2) + f(4) = -1 + 7 + 7 = 13$

22) [정답] 30 (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 정수인 수열이므로 k는 정수이다.

$\sum_{n=1}^{21m+b} a_n = 154$ 이므로

$m=1$ 일 때 $\sum_{n=1}^{21+b} a_n = 154$

$m=2$ 일 때 $\sum_{n=1}^{42+b} a_n = 154$

따라서 $a_{22+b}+a_{23+b}+\cdots+a_{41+b}+a_{42+b}=0$

$\{a_n\}$의 식에서 k가 음수인 경우 n이 증가함에 따라 a_n의 절댓값이 증가하고 부호가 일정하므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\{a_n\}$의 식에서 k가 0인 경우 n이 증가함에 따라 a_n의 값이 항상 일정하고 $a_1 > 20$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 k는 자연수이다.

k는 자연수이므로 $a_n < 0$이면 n이 증가함에 따라 a_n의 값이 $a_n > 0$이 될 때까지 증가하고, $a_n > 0$이면 n이 증가함에 따라 a_n의 값이 $a_n < 0$이 될 때까지 감소하므로 $|a_n| < k$인 a_n이 존재한다.

$-k < a_n < 0$이면 $a_{n+1} = a_n + (k+1)$이고, $a_{n+1} > 0$이므로

$a_{n+2} = a_{n+1} - k = a_n + 1$

$0 \le a_n < k$이면 $a_{n+1} = a_n - k$이고, $a_{n+1} < 0$이므로

$a_{n+2} = a_{n+1} + (k+1) = a_n + 1$

따라서 $|a_n| < k$인 모든 a_n에 대해 $a_{n+2} = a_n + 1$이다.

$|a_n| < k$인 모든 a_n에 대해 $a_{n+2} = a_n + 1$이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로 수열 $\{a_n\}$은 $a_s = k$인 항을 가진다.

$a_s = k$에 대하여 수열 a_n은 $a_s = k$, $a_{s+1} = 0$, $a_{s+2} = -k$, $a_{s+3} = 1$, $a_{s+4} = 1-k$ ... 인 항들을 가진다.

a_s	a_{s+1}	a_{s+2}	a_{s+3}	a_{s+4}	$\cdots$	a_{s+2k-1}	a_{s+2k}
k	0	-k	1	$1-k$		$k-1$	-1
a_{s+2k+1}	a_{s+2k+2}	a_{s+2k+3}	a_{s+2k+4}	a_{s+2k+5}	$\cdots$	a_{s+4k}	a_{s+4k+1}
k	0	-k	1	$1-k$		$k-1$	-1

표에 따라 $a_s = k$인 a_s부터 a_{s+2k}까지 모든 항의 값이 k보다 작거나 같으므로 $|a_n| \le k$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+2k+1}$이다.

그러므로, $|a_r| \le k$인 a_r에 대하여 $r \le n$인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le k$이고, a_n부터 연속된 $2k+1$의 항의 합이 0임을 알 수 있다.

수열 $\{a_n\}$이 $a_{22+b}+a_{23+b}+\cdots+a_{41+b}+a_{42+b}=0$이므로

자연수 k에 대하여 $2k+1=3$, $2k+1=7$, $2k+1=21$

따라서 $k=1$, $k=3$, $k=10$

i) $k=1$인 경우

수열 $\{a_n\}$에서 n이 증가함에 따라 처음으로 $|a_n| \le 1$을 만족하는 n의 값을 s라고 하면, $a_1 > 20$이므로 $a_s = 1$이고, $a_1 = s$이다.

수열 $\{a_n\}$의 항들은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{s-1}	a_s	a_{s+1}	a_{s+2}	a_{s+3}	a_{18}	$\cdots$
s	$s-1$	$s-2$	$\cdots$	2	1	0	-1	1	0	$\cdots$

$k=1$인 경우 수열 $\{a_n\}$은 $|a_n| \le k$인 a_n에 대하여 $a_n = a_{n+2k+1}$이므로 $a_s = 1$인 자연수 s와 모든 자연수 n에 대하여 다음 표를 만족시킨다.

$\cdots$	a_{s+3n-3}	a_{s+3n-1}	a_{s+3n-2}	$\cdots$
$\cdots$	1	0	-1	$\cdots$

b와 m은 자연수이므로 $21m+b \ge 22$

그러나 $k=1$인 경우 $a_1 > 20$, $a_1 = s$, $s > 20$

수열 $\{a_n\}$은 $n \ge 22$인 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 최솟값이 $\frac{s(s+1)}{2} - 1$, $s=21$일 때 230이므로

$k \ne 1$이다.

ii) $k=3$인 경우

수열 $\{a_n\}$에서 n이 증가함에 따라 처음으로 $|a_n| \le 3$을 만족하는 n의 값을 s라고 하면, $1 \le a_s \le 3$이고 $k=3$이므로 $n \le s$인 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 $3s-2 \le a_1 \le 3s$이고 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 $\frac{s(3s-1)}{2} \le \sum_{k=1}^{s} a_k \le \frac{s(3s+3)}{2}$,

$s=9$면 $117 \le \sum_{k=1}^{9} a_k \le 135$,

$s=10$이면 $145 \le \sum_{k=1}^{10} a_k \le 165$,

$s=11$이면 $176 \le \sum_{k=1}^{11} a_k \le 198$

또한 $s \le n$인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le 3$이므로

$-3 \le \sum_{k=s+1}^{n} a_k \le 3$

따라서 $s=10$이면 $s \le n$인 모든 자연수 n에 대하여

$142 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le 168$이므로 $\sum_{n=1}^{21m+b} a_n = 154$를 만족시킨다.

$s=10$이므로 $a_1 = a_{10} + 27$이고, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10(2 \times a_{10} + 27)}{2}$이다.

ii-a) $a_{10} = 1$인 경우

$a_{11} = -2$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -1$, $a_{14} = 3$, $a_{15} = 0$, $a_{16} = -3$, $a_{17} = 1$ ... 이고, $n \ge 10$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+7}$이므로 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 154$를 만족시키는 n의 값이 존재하지 않는다. 따라서 $a_{10} \ne 1$

ⅱ-b) $a_{10}=2$ 인 경우

$a_{11}=-1$, $a_{12}=3$, $a_{13}=0$, $a_{14}=-3$, $a_{15}=1$, $a_{16}=-2$, $a_{17}=2\ldots$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k=154$ 를 만족시키는 n 의 값은 $n=11$, $n=14$, $n=18$, $n=21\ldots$ 이니 $k\geq 2$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 $n=7k-3$, $n=7k$ 이다. 따라서 모든 자연수 n, m 에 대하여 $21m+b=n$ 을 만족시키는 b 의 값은 $b=4$, $b=7$, $b=11$, $b=14\ldots$ 이므로 자연수 b 의 최솟값은 4 이다.

ⅱ-c) $a_{10}=3$ 인 경우

$a_{11}=0$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1$, $a_{14}=-2$, $a_{15}=2$, $a_{16}=-1$, $a_{17}=3,\ldots$ 이고, $n\geq 10$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=a_{n+7}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k=154$ 를 만족시키는 n 의 값이 존재하지 않는다. 따라서 $a_{10}\neq 3$

$a_2=a_{10}+24$ 이므로 $k=3$ 인 경우 $b+a_2$ 의 최솟값은 30 이다.

ⅲ) $k=10$ 인 경우

수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 증가함에 따라 처음으로 $|a_n|\leq 10$ 을 만족하는 n 의 값을 s 라고 하면, $1\leq a_s\leq 10$ 이고 $k=10$ 이므로 $n\leq s$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 $10s-9\leq a_1\leq 10s$ 이고 공차가 10 인 등차수열이다.

$10s-19\leq a_2\leq 10s-10$ 이므로 $s\geq 5$ 인 자연수 s 에 대해서 $a_2\geq 31$ 이므로 $b+a_2$ 의 최솟값은 31 보다 크다.

하지만 $k=3$ 인 경우 $b+a_2$ 의 최솟값은 30 이었으므로 $k=10$ 인 경우 $s\geq 5$ 인 자연수 s 에 대해서는 $b+a_2$ 의 최솟값을 가질 수 없고, $a_1>20$ 이므로 $a_3>0$ 이고, $s\geq 3$ 임을 알 수 있다.

수열 $\{a_n\}$ 은 $10s-9\leq a_1\leq 10s$ 이고 공차가 10 인 등차수열이므로

$$\frac{s(10s-8)}{2}\leq\sum_{k=1}^{s}a_k\leq\frac{s(10s+10)}{2}$$

$s=3$ 이면 $33\leq\sum_{k=1}^{3}a_k\leq 60$,

$s=4$ 면 $64\leq\sum_{k=1}^{s}a_k\leq 100$ 이므로

$a_1>20$ 이고, $\sum_{n=1}^{21m+b}a_n=154$ 를 만족시키는 $b+a_2$ 의 최솟값이 $k=10$ 인 경우에는 존재하지 않는다.

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $b+a_2$ 의 최솟값은 30 이다.

2025학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 23 한승수)

[출제의도] 같은 것이 포함되어 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

여섯 개의 문자 x, x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 서로 독립인 두 사건에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A^{C})=2-2\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$라 할 때,

$b=2-2a$, $ab=\dfrac{3}{8}$이므로

$2a(1-a)=\dfrac{3}{8}$, $a=\dfrac{3}{4}$ 또는 $a=\dfrac{1}{4}$

$b=2-2a\le 1$이므로 $a\ge\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}$

25) [정답] ③ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 모평균을 추정할 수 있는가?

[해설]

$b-a=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{4}=9.8$이므로 $\sigma=10$이다.

16개를 임의추출하여 얻은 1개 바둑돌의 무게의 표본평균을 $\overline{x_1}$, 36개를 임의추출하여 얻은 1개 바둑돌의 무게의 표본평균을 $\overline{x_2}$라고 하면

$a+c=\overline{x_1}+\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{10}{4}-2.58\times\dfrac{10}{6}$에서 $\overline{x_1}+\overline{x_2}=11.5$이다.

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}$에서 $\dfrac{\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{10}{4}}{\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{10}{6}}=\dfrac{\overline{x_2}+2.58\times\dfrac{10}{6}}{\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{10}{4}}$ 이고

$\left(\overline{x_1}\right)^2-\left(\overline{x_2}\right)^2=4.9^2-4.3^2=5.52$이다.

따라서 $\overline{x_1}-\overline{x_2}=0.48$이다.

그러므로 $b-d=\overline{x_1}-\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{10}{4}-2.58\times\dfrac{10}{6}$

$=0.48+4.9-4.3$

$=1.08$이다.

26) [정답] ② (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 이산확률변수 X의 평균을 구할 수 있는가?

[해설]

$X=1$이면 맨 앞에 남학생 3명 중에서 1명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{6}=\dfrac{1}{2}$

$X=2$이면 맨 앞에 여학생 3명 중에서 1명을, 그 뒤에 남학생 3명 중에서 1명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{6\times 5}=\dfrac{3}{10}$

$X=3$이면 맨 앞과 그 뒤에 여학생 3명 중에서 2명을, 그 뒤에 남학생 3명 중에서 1명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{6\times 5\times 4}=\dfrac{3}{20}$

$X=4$이면 여학생 3명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{6\times 5\times 4}=\dfrac{1}{20}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{1}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{3}{20}+4\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{7}{4}$

$\mathrm{E}(4X+6)=4\mathrm{E}(X)+6=13$

27) [정답] ④ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 주어진 함수를 이해하고 적절하게 경우를 나누어 계산할 수 있는가?

[해설]

$f(3)$의 값을 기준으로 경우를 나누면 문제 해결에 어려움이 있을 수 있다. 이는 $f(3)=3$일 때 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 하나의 값을 결정하여도 $f(6-x)$를 제외한 나머지 2개의 값은 (가), (나) 조건을 모두 고려하여야 하기 때문이다. 대신 $f(2)$를 기준으로 경우를 나눈 후 $f(5)$를 결정한다면 $f(4)$의 범위를 정한 후부터 (나) 조건을 고려하지 않고 (가) 조건을 통해 문제를 해결할 수 있다.

(나)에서 3을 대입하면 $\{f(3)\}^2 \le 9$이므로 $f(3)$의 값은 3 이하이며, (가)에서 $f(1)$, $f(2)$ 또한 3 이하이다. $f(2)$의 값에 따라 $f(1)$, $f(3)$의 범위가 정해지므로 각각의 $f(2)$의 값인 경우를 확인하면 다음과 같다.

i) $f(2)=1$인 경우

(가)에서 $f(1)=1$이고 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(3)=n$일 때, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 통해 정해지는 함수는 n 이상 6 이하의 $7-n$개 자연수 중 중복을 허용하여 3개를 정하는 것과 같다.

따라서 함수의 개수는

${}_6H_3+{}_5H_3+{}_4H_3={}_8C_3+{}_7C_3+{}_6C_3=111$ 가지이다.

ii) $f(2)=2$인 경우

(가), (나)에서 $f(3)$의 값은 2 또는 3이다.

$f(4)$는 $f(3) \le f(4) \le \dfrac{9}{2}$, $f(4) \le f(5)$이다.

따라서 $f(4)$의 값의 개수는 $f(5) \le 4$에서 $f(3)$ 이상 $f(5)$ 이하 자연수의 개수이므로 $f(5)-f(3)+1$, $f(5)>4$에서 $f(3)$ 이상 4 이하 자연수의 개수이므로 $5-f(3)$이다.

또한 (나)에서 $f(5) \le 4$일 때 $f(1)$의 개수는 2개, $f(5)>4$일 때 $f(1)$의 개수는 1개이다. 2 이상 6 이하의 자연수 n에 대하여 $f(5)=n$일 때, $f(6)$의 개수는 n에서 6까지 $7-n$개다.

따라서 $2 \le n \le 4$에서 함수의 개수는

$2\{(n-1)+(n-2)\}(7-n)=2(2n-3)(7-n)$이고

$5 \le n \le 6$에서 함수의 개수는 $(3+2)(7-n)=5(7-n)$이다.

이를 계산하면 $2(5+12+15)+5(1+2)=79$ 가지이다.

iii) $f(2)=3$인 경우

(가)에서 $f(3)=3$, (가), (나)에서 $f(4)=3$이다. $f(1)=1$일 때, $f(5)$, $f(6)$의 값을 통해 정해지는 함수는 3에서 6까지 4개의 자연수 중 중복을 허용하여 2개를 정하는 것과 같다. 따라서 함수의 개수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$이다.

$f(1)=2$일 때, $f(5)$의 값은 3 또는 4이며 $f(6)$의 개수는 $f(5)$에서 6까지 $7-f(5)$개다. 따라서 함수의 개수는

${}_4H_1+{}_3H_1={}_4C_1+{}_3C_1=7$개다.

또한 $f(1)=3$일 때, $f(5)=3$이며 $3 \le f(6) \le 6$이므로 함수의 개수는 ${}_4H_1={}_4C_1=4$개다.

그러므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$111+79+21=211$ 가지이다.

28) [정답] ④ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

각 상자에 구슬이 6개가 담기도록 하는 시행 중 8회 이하의 시행이 필요한 경우는 각 상자에서 다음과 같다.

<table>
<tr><th>1번 상자</th><th>2번 상자</th><th>3번 상자</th><th>4번 상자</th><th>5번 상자</th><th>6번 상자</th></tr>
<tr><td rowspan="2">6회 시행</td><td>3회 시행</td><td rowspan="2">2회 시행</td><td rowspan="2">4회 시행</td><td rowspan="2">존재 X</td><td>1회 시행</td></tr>
<tr><td>8회 시행</td><td>6회 시행</td></tr>
</table>

위의 경우에서 8회 이하의 시행으로 3개의 상자에 6개의 구슬을 각각 담을 수 있는 경우에서 6개의 구슬이 담겨있는 상자에 적혀있는 숫자의 가능한 집합은 $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 4, 6\}$이다.

i) 6개의 구슬이 담겨있는 세 상자의 숫자가 $\{2, 3, 6\}$의 경우

총 8회의 주사위 시행에서 나온 눈의 수가 2가 3회, 3이 2회, 6이 1회, 1과 4와 5 중 2회이므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_8P_6}{2\times 6}\times 3^2 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^8 = {}_8P_6 \times \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^8$ 이다.

ii) 6개의 구슬이 담겨있는 세 상자의 숫자가 $\{2, 4, 6\}$의 경우

총 8회의 주사위 시행에서 나온 눈의 수사 2가 3회, 4가 4회, 6이 1회이므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_8P_8}{6\times 24}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^8 = {}_8P_6 \times \dfrac{1}{72}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^8$ 이다.

iii) 6개의 구슬이 담겨있는 세 상자의 숫자가 $\{3, 4, 6\}$의 경우

총 8회의 주사위 시행에서 나온 눈의 수가 3이 2회, 4가 4회, 6이 1회, 1과 2와 5 중 1회이므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_8P_7}{2\times 24}\times 3 \times\left(\dfrac{1}{6}\right)^8 = {}_8P_6 \times \dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^8$ 이다.

그러므로 i), ii), iii)에 의해 8회의 시행 후 6개의 구슬이 담겨있는 상자가 3개일 때, 4가 적힌 상자에 구슬이 6개일 확률은

$$\frac{{}_8P_6\times\frac{1}{72}\times\left(\frac{1}{6}\right)^8+{}_8P_6\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{6}\right)^8}{{}_8P_6\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{6}\right)^8+{}_8P_6\times\frac{1}{72}\times\left(\frac{1}{6}\right)^8+{}_8P_6\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{6}\right)^8}$$

$$=\frac{\frac{1}{72}+\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{72}+\frac{1}{8}}=\frac{5}{32} \text{ 이다.}$$

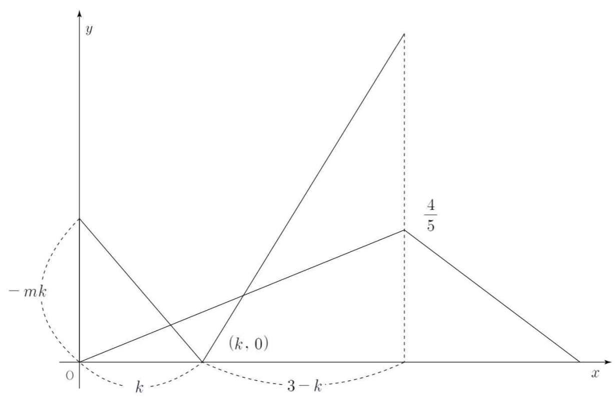
29) [정답] 13 (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 연속확률변수 그래프의 성질을 이해하고 있는가?

[해설]

$(k-a)g(b)+(k-b)g(a)=0$ 에서 $\dfrac{0-g(a)}{k-a}=-\dfrac{g(b)-0}{b-k}$ 이므로
$g(x)$ 는 x 절편 $(k,0)$ 을 기준으로 기울기가 절댓값이 같고 부호가 반대인 두 일차함수 형태임을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(3 \le X \le 5)=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$ 이고,
$\mathrm{P}(0 \le Y \le k)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{P}(3 \le X \le 5)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$ 이다.
확률밀도함수의 성질에 따라 $\mathrm{P}(0 \le Y \le 3)=1$ 이므로
$\mathrm{P}(k \le Y \le 3)=\dfrac{4}{5}$ 이다.



닮음을 활용하면
$\mathrm{P}(0 \le Y \le k):\mathrm{P}(k \le Y \le 3)=1:4=k:(3-k)^2$,
$4k=k^2-6k+9$, $k^2-10k+9=0$, $k=1\ (\because k<3)$ 이다.

$\mathrm{P}(0 \le Y \le k)=-\dfrac{mk^2}{2}=\dfrac{1}{5}$ 에서 $m=-\dfrac{2}{5}$ 이고,

$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{5}(x-1) & (0 \le x \le 1)\\ \dfrac{2}{5}(x-1) & (1 < x \le 3)\end{cases}$ 에서 $g(2)=\dfrac{2}{5}$ 이다.

$k+30g(2)=1+30\times\dfrac{2}{5}=13$

30) [정답] 161 (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

X_1, Y_1 의 확률분포표를 그리면 다음과 같다.

X_1, Y_1	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
남은 공	검 검	검 흰	흰 흰
$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_1)$	불가능	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
남은 공		검 검 검	검 검 흰

X_2, Y_2 는 0 또는 1 의 값을 가지므로
$\mathrm{Y}_1>\mathrm{X}_1$ 이면 $\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2 \ge \mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$ 가 반드시 성립한다.

따라서, 아래와 같은 경우는 반드시 조건을 만족시킨다.
$\mathrm{X}_1=0$, $\mathrm{Y}_1=1$: $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{30}$
$\mathrm{X}_1=0$, $\mathrm{Y}_1=2$: $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{30}$
$\mathrm{X}_1=1$, $\mathrm{Y}_1=1$: $\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{30}$

이처럼, 이 세 경우에서 조건을 만족시킬 확률은
$\dfrac{2}{30}+\dfrac{3}{30}+\dfrac{12}{30}=\dfrac{17}{30}$ 이다.

X_1 와 Y_1 의 값이 조합될 수 있는 경우의 수
남은 세 경우에 대하여 각각 조건을 만족시키는지 확인해야 한다.

i) $\mathrm{X}_1=1$, $\mathrm{Y}_1=1$ 인 경우: $\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{30}$

시행 ㈎ 이후 남은 공의 개수	
주머니 A	주머니 B
검 흰	검 검 검

시행 ㈏ 이후 공의 개수	
주머니 A	주머니 B
검 검	검 검 흰

$\mathrm{X}_1=1$ 이므로 $\mathrm{Y}_2 \ge 1$ 이어야 하고, $\mathrm{Y}_2=1$ 일 확률은 $\dfrac{2}{3}$ 이다.
따라서, 이 경우 조건을 만족시킬 확률은 $\dfrac{8}{30}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{90}$ 이다.

ii) $\mathrm{X}_1=2$, $\mathrm{Y}_1=1$ 인 경우: $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{30}$

시행 ㈎ 이후 남은 공의 개수	
주머니 A	주머니 B
흰 흰	검 검 검

시행 ㈏ 이후 공의 개수	
주머니 A	주머니 B
검 검	검 흰 흰

$\mathrm{X}_2=1$ 이므로 $\mathrm{Y}_2 \ge 2$ 이어야 하고, 이는 가능하지 않다.

iii) $\mathrm{X}_1=2$, $\mathrm{Y}_1=2$ 인 경우: $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{30}$

시행 (가) 이후 남은 공의 개수	
주머니 A	주머니 B
흰 흰	검 검 흰

주머니 B 에서 검은 공, 흰 공을 하나씩 주머니 A 로 옮길 확률: $\frac{2}{3}$

시행 (나) 이후 공의 개수 (주머니 B 에서 검은 공, 흰 공 하나씩 옮긴 경우)	
주머니 A	주머니 B
검 흰	흰 흰 검

$\mathrm{Y}_2 = 1$ 일 확률: $\frac{1}{3}$

$\mathrm{Y}_1 = 0$, $\mathrm{X}_2 = 0$ 일 확률: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

따라서, 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{3}{30} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{90}$

주머니 B 에서 검은 공 두 개를 주머니 A 로 옮길 확률: $\frac{1}{3}$

시행 (나) 이후 공의 개수 (주머니 B 에서 검은 공 두 개를 옮긴 경우)	
주머니 A	주머니 B
검 검	흰 흰 흰

$\mathrm{X}_2 = 1$, $\mathrm{Y}_2 = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서, 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{17}{30} + \frac{16}{90} + \frac{4}{90} = \frac{71}{90}$ 이다.

$p = 90$, $q = 71$ 이므로 $p + q = 161$ 이다.

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ⑤ (출제자 : 23 정원준)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}-3n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\left(\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}+3n^2\right)}{\left(\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}\right\}-3n^2)\left(\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}+3n^2\right)\}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\left(\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}+3n^2\right)}{9n^4+2n^3+n^2-9n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\left(\sqrt{9n^4+2n^3+n^2}+3n^2\right)}{2n^3+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3\right)}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{6}{2}=3$$

24) [정답] ② (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=\ln|\sin x|$ 라 하면,

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 까지의 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cot^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\csc^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$\cos x=t$ 라 하면, $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ 이고,

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, $t=0$,

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 일 때, $t=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-1}\,dt$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 1-\ln\frac{3}{2}-\ln 1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

25) [정답] ③ (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

직선 $x=t$ 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면 $S(t)=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\sqrt{t}+2}{2}\right)^2$ 이다.

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V=\int_0^4\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{t}+2}{2}\right)^2dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4\left\{\frac{t}{4}+\sqrt{t}+1\right\}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{8}t^2+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_0^4$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{16}{3}+4\right)$$

$$=\frac{17}{3}\pi$$

26) [정답] ② (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 음함수 미분을 할 수 있는가?

[해설]

두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 접해야 한다.

접점의 x 좌표를 r 라 하자.

($f(t)=r$ 이므로 $f'(t)=\frac{dr}{dt}$ 이다.)

두 곡선의 y 좌표가 같으므로

$r^2+t=\log_2(r-a)$ ⋯ (가)

$y=x^2+t$ 에서 양변을 x 로 미분하면

$\frac{dy}{dx}=2x$

$y=\log_2(x-a)$ 에서 양변을 x 로 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x-a)\ln 2}$

$x=r$ 에서 두 곡선의 미분계수가 같으므로

$2r=\frac{1}{(r-a)\ln 2}$ ⋯ (나)

(나)에서 $r-a=\frac{1}{2r\ln 2}$ 이므로 (가)에서

$r^2+t=-\log_2(2r\ln 2)$

양변을 t 로 미분하면

$2r\frac{dr}{dt}+1=-\frac{1}{\ln 2}\times\frac{2\ln 2}{2p\ln 2}\times\frac{dr}{dt}$

$\left(2r+\frac{1}{r\ln 2}\right)\frac{dr}{dt}=-1$

$r=1$ 을 대입하면

$\frac{dr}{dt}=\frac{-r\ln 2}{2r^2\ln 2+1}=-\frac{\ln 2}{2\ln 2+1}$

$\frac{1}{f'(t)}=\frac{dt}{dr}=-2-\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore\ p^2+q^2=5$

27) [정답] ② (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

방정식 $\{f'(x)-k\}\{g'(x)-k\}=0$ 이 성립하려면 $f'(x)=k$ 이거나 $g'(x)=k$ 이어야 한다. 그러므로 $f'(x)=k$ 와 $g'(x)=k$ 의 모든 실근이 $\{f'(x)-k\}\{g'(x)-k\}=0$ 의 모든 실근이 된다.

$f'(x)=e^{ax^2}+xe^{ax^2}\times 2ax+b=(2ax^2+1)e^{ax^2}+b$

$f'(x)=k$ 의 실근이 존재할 때, $f'(x)=(2ax^2+1)e^{ax^2}+b$ 가 y 축 대칭이므로 모든 실근의 합은 0 이다.

$g(m)=n$ 이라 할 때, $f'(n)=(2an^2+1)e^{an^2}+b$ 이므로

$g'(m)=\frac{1}{f'(g(m))}=\frac{1}{f'(n)}=\frac{1}{(2an^2+1)e^{an^2}+b}$ 이다.

$g'(x)=k$ 의 실근이 존재하고, 그 값이 m 이라면

$g'(m)=\frac{1}{(2an^2+1)e^{an^2}+b}=k$ 이다.

이를 만족시키는 n 의 값이 l 이라면 $\frac{1}{(2al^2+1)e^{al^2}+b}=k$ 이다.

그러나 $\frac{1}{\{2a(-l)^2+1\}e^{a(-l)^2}+b}=\frac{1}{(2al^2+1)e^{al^2}+b}=k$ 도 성립하므로 $n=-l$ 일 때도 성립한다.

즉 $f(n)=m$ 이므로, m 의 값으로 가능한 것은 $f(l)$ 과 $f(-l)$ 이다.

그러나 $f(l)+f(-l)=\left(le^{al^2}+bl+1\right)+\left\{(-l)e^{al^2}-bl+1\right\}=2$ 이므로 $g'(x)=k$ 의 실근이 존재할 때 모든 실근의 합은 0 이 아니다.

따라서 $f'(x)=k$ 의 실근이 존재할 때 모든 실근의 합은 0 이고 $g'(x)=k$ 의 실근이 존재할 때 모든 실근의 합은 0 이 아니므로, $\{f'(x)-k\}\{g'(x)-k\}=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합이 0 이려면 $f'(x)=k$ 의 실근이 존재하고 $g'(x)=k$ 의 실근이 존재하지 않아야 한다.

$f'(x)=(2ax^2+1)e^{ax^2}+b$ 이고 $a>0$ 이므로 $f'(x)$ 의 값이 최소일 때는 $x^2=0$ 일 때이다. $f'(0)=b+1$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq b+1$ 이다.

$g(m)=n$ 이라 할 때, $g'(m)=\frac{1}{f'(n)}$ 이고 위의 경우와 같이

$f'(n)\geq b+1$ 이므로 $g'(x)$ 의 범위는 $0<g'(x)\leq\frac{1}{b+1}$ 이다.

또한 $-1<b\leq 0$ 이므로 $b+1\leq\frac{1}{b+1}$ 이다.

그러므로 $f'(x)=k$ 의 실근이 존재하고 $g'(x)=k$ 의 실근이 존재하지 않는 k 의 범위는 $\frac{1}{b+1}<k$ 이다. 문제에서의 범위는 $k>3$ 이므로 $b=-\frac{2}{3}$ 이다.

$f'(x)=(2ax^2+1)e^{ax^2}+b$ 이므로

$f'(3)=(18a+1)e^{9a}+b$

$$\begin{aligned}\ln\{f'(3)-b\}&=\ln\{(18a+1)e^{9a}+b-b\}\\&=\ln(18a+1)+\ln e^{9a}\\&=\ln(18a+1)+9a\end{aligned}$$

$\ln\{f'(3)-b\}=2\ln 3+4$ 이므로

$\ln(18a+1)+9a=2\ln 3+4$ 이고 $a=\frac{4}{9}$ 이다.

$f(x)=xe^{\frac{4}{9}x^2}-\frac{2}{3}x+1$

$g'\left(-\frac{e}{b}\right)=g'\left(\frac{3}{2}e\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{3}{2}e\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{3e-\frac{2}{3}}=\frac{3}{9e-2}$

28) [정답] ④ (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 치환적분과 부분적분을 계산할 수 있는가?

[해설]

$xf(x)=1+\int_x^{ex} f\left(\frac{t}{x}\right)\ln\left(\frac{x^2}{t}\right)dt$ 에서 양변을 x 로 나누면

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\int_x^{ex} f\left(\frac{t}{x}\right)\ln\left(\frac{x^2}{t}\right)dt$

$\frac{t}{x}=k$ (k는 실수) 라면

$\frac{1}{x}\int_x^{ex} f\left(\frac{t}{x}\right)\ln\left(\frac{x^2}{t}\right)dt$

$=\int_1^e f(k)(\ln x-\ln k)\,dk$

$=\ln x\int_1^e f(k)\,dk-\int_1^e f(k)\ln k\,dk$

따라서

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x\int_1^e f(k)\,dk-\int_1^e f(k)\ln k\,dk$

$\int_1^e f(k)\,dk=A$, $\int_1^e f(k)\ln k\,dk=B$ (A,B는 상수) 라 하자.

$A=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+A\ln x-B\right)dx$ ⋯ (ㄱ)

$B=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+A(\ln x)^2-B\ln x\right)dx$ ⋯ (ㄴ)

(ㄱ)에서

$A=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+A\ln x-B\right)dx$

$=[\ln x]_1^e+A[x\ln x]_1^e-A\int_1^e 1\,dx-B[x]_1^e$

$=1+A[x\ln x-x]_1^e-B(e-1)$

$=1+A-B(e-1)$

$\therefore\ B=\frac{1}{e-1}$

(ㄴ)에서

$B=\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx+\int_1^e\left(A(\ln x)^2-B\ln x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e+\int_1^e\left(A(\ln x)^2-B\ln x\right)dx$

$=\frac{1}{2}+\int_1^e\left(A(\ln x)^2-B\ln x\right)dx$

$\ln x=s$ 로 치환하면

$x=e^s$, $dx=e^s ds$

$B=\frac{1}{2}+\int_0^1\left(As^2e^s-Bse^s\right)ds$

$=\frac{1}{2}+A[s^2e^s]_0^1-A\int_0^1 2se^s\,ds$

$-B[se^s]_0^1+B\int_0^1 e^s\,ds$

$=\frac{1}{2}+eA-A[2se^s]_0^1+A\int_0^1 2e^s\,ds$

$-eB+B[e^s]_0^1$

$=\frac{1}{2}+(e-2)A-B$

$\therefore 2B=\frac{1}{2}+(e-2)A$ ⋯ (ㄷ)

$B=\frac{1}{e-1}$ 이므로 (ㄷ)에 대입하면

$A=\frac{4B-1}{2(e-2)}$

$=\frac{\frac{4}{e-1}-1}{2(e-2)}$

$=\frac{-(e-5)}{2(e-1)(e-2)}$

$\therefore\ a+b+c=8$

29) [정답] 10 (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 조건을 만족시키는 등비급수를 구할 수 있는가?

[해설]

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=bs^{n-1}$ 이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 각각 수렴하고 b_n 의 공비가 양수이기 때문에

$-1<r<1$, $0<s<1$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|b_n=\frac{|a_1|\times b_1}{1-|r|s}$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{|a_1|}{1-r}\times\frac{b_1}{1-s}$

위 두 식을 연립하면

$r+s=|r|s+rs$

i) $0<r<1$ 일 때

$r=\frac{s}{2s-1}$, $0<\frac{s}{2s-1}<1$ 을 만족시키는 s 의 범위는 $s>1$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 수렴하기 때문에 모순이다.

ii) $-1<r<0$

$r=-s$

$|a_1|=|b_1|$ 의 조건에 의해 $a_1=\pm b_1$ 이다.

i) $a_1=b_1$ 일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|=\frac{|2a_1r|}{1-r^2}=\frac{9}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a_1|}{1-|r|}=\frac{3}{4}$

위 두 식을 연립하면 $r=-3$

하지만 $-1<r<0$ 이기 때문에 모순이다.

ii) $a_1=-b_1$ 일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|=\frac{|2a_1|}{1-r^2}=\frac{9}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a_1|}{1-|r|}=\frac{3}{4}$

위 두 식을 연립하면 $r=-\frac{1}{3}$

$\frac{a_5}{a_3}=r^2=\frac{1}{9}$, $p=9$, $q=1$

따라서 $p+q$ 의 값은 10 이다.

30) [정답] 3 (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

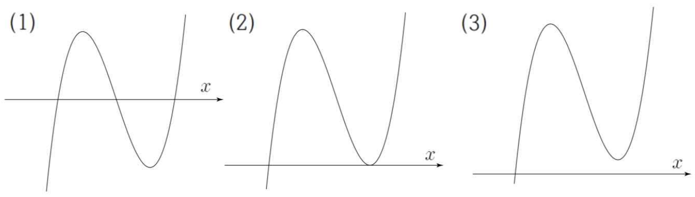
$\ln f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 $1\sim 3$ 개이다.

$f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $1\sim 2$ 개이다.

$g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 일 때, $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 개이고 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 개인 경우는 존재하지 않는다.

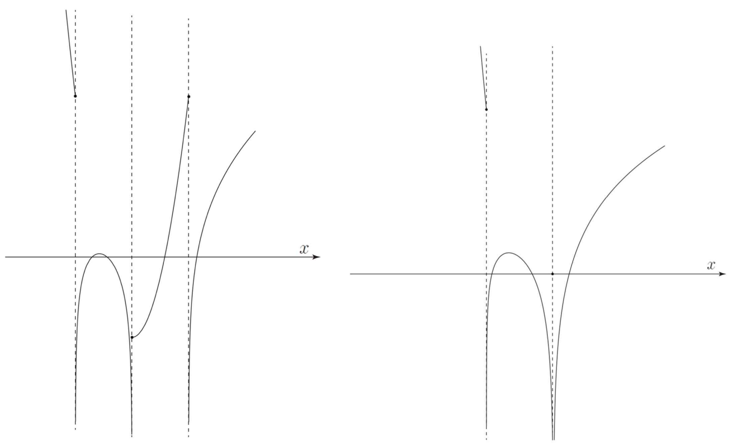
$f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 개이고 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 개인 경우도 존재하지 않는다.

따라서 가능한 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그런데 3번 그래프는 $f(x)\le 0$ 인 부분 즉, $f'(x)$ 에서 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 실근이 존재하지 않기 때문에 불가능하다.

$f(x)$ 의 1번, 2번 그래프를 통해 구한 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$h(t)$ 의 불연속 점의 개수가 8 개이므로 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 2번 그림과 같고, $f'(a)$ 의 값은 $\ln f(x)$ 의 극댓값보다 크다.

따라서 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ (단, $a<b$) 라고 할 수 있다.

$\ln f(x)$ 의 극댓값의 x 좌표는 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=0$ 을 만족시켜야 하므로

$f'(x)=(x-b)(3x-2a-b)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $\dfrac{2a+b}{3}$ 이다,

$a_3=\dfrac{2a+b}{3}$ 이므로 $g\left(\dfrac{2a+b}{3}\right)=\ln 4$ 이다.

그러므로 $\ln\left\{f\left(\dfrac{2a+b}{3}\right)\right\}=\ln 4$ 이고

$f\left(\dfrac{2a+b}{3}\right)=\left(\dfrac{b-a}{3}\right)\left(\dfrac{2b-2a}{3}\right)^2=4\left(\dfrac{b-a}{3}\right)^3=4$ 이므로

$b-a=3$ 이다.

이때, $a_5=b$, $a_1=a$ 이므로 a_5-a_1 의 값은 $b-a=3$ 이다.

2025학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(기하) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 23 한승수)

[출제의도] 좌표공간에서의 내분을 이해하고 있는가?

[해설]

선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{4\times1+8\times3}{3+1},\ \dfrac{a\times1+5\times3}{3+1},\ \dfrac{7\times1+b\times3}{3+1}\right)=(c,\,6,\,4)$ 이므로

$a=9,\ b=3,\ c=7$ 이다.

$a+b+c=9+3+7=19$

24) [정답] ③ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 벡터의 성질을 이용하여 $|\vec{v}|^2$의 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]

벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{b}+\vec{v}$가 서로 수직이면, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{v})=0$ 이다.

벡터 $\vec{v}=(p,\,q)$라 할 때,

$(2,\,1)\cdot(p+3,\,q-1)=0$ 이고,

$2p+6+q-1=0$ 이므로

$2p+q=-5$ 이다.

$|\vec{v}|^2=p^2+q^2=p^2+(2p+5)^2=5p^2+20p+25$ 이므로

$5p^2+20p+25=5(p+2)^2+5$ 이므로

$|\vec{v}|^2$의 최솟값은 5 이다.

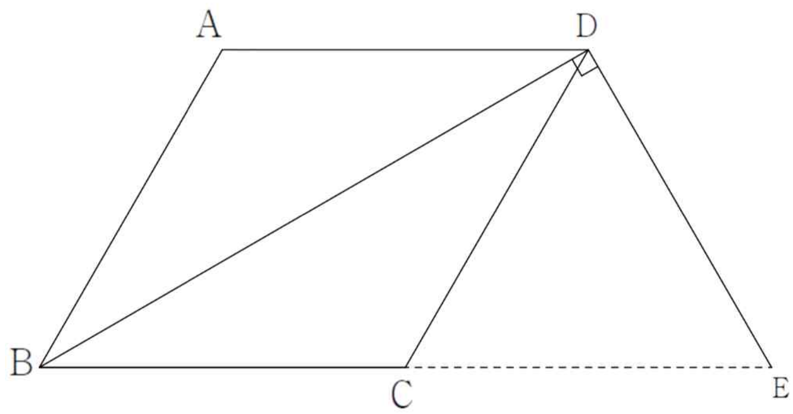
25) [정답] ④ (출제자 : 24 권서현)

[출제의도] 벡터의 연산을 할 수 있는가?

[해설]

$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AP}|$

그림과 같이 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$를 만족시키는 직선 BC 위의 점 E와 선분 DE 위를 움직이는 점 P′에 대하여



$|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP'}|=|\overrightarrow{BP'}|$

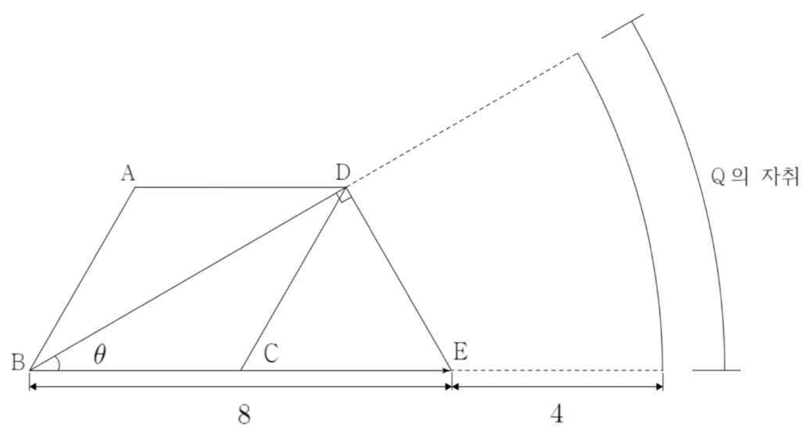
마름모의 두 대각선은 직교하고 $\overline{AC}//\overline{DE}$ 이므로

삼각형 BDE는 $\angle BDE=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 $|\overrightarrow{BP'}|\le|\overrightarrow{BE}|=8$

한편, $\dfrac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|}$는 방향이 벡터 $\overrightarrow{BQ}$와 같고 크기가 1인 벡터이므로 벡터 $12\times\dfrac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|}$는 방향이 벡터 $\overrightarrow{BQ}$와 같고 크기가 12인 벡터이다.

따라서 점 R가 나타내는 도형은 반지름이 12이고 중심각의 크기가 θ인 호가 된다.



$\angle DBC=\theta$라 하면 $12\theta=2\pi$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}$

26) [정답] ② (출제자 : 24 권서현)

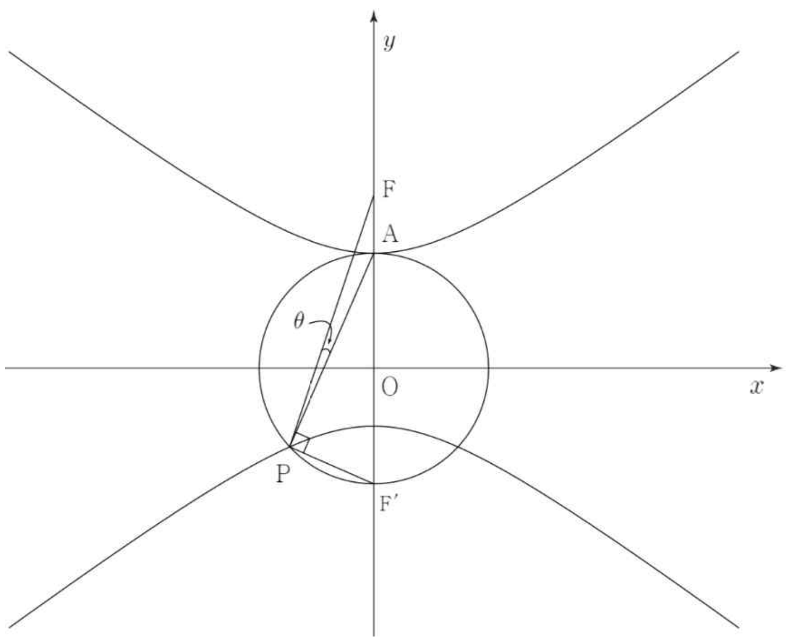
[출제의도] 쌍곡선의 성질을 응용할 수 있는가?

[해설]

쌍곡선의 두 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{4}x+1$ 이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, $3a=4b$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=-1$ 과 세 점에서 만나도록 하는 문제의 원은 그림과 같이 나타난다



문제의 조건에 의해 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF'}}$ 이므로

$b+1=\sqrt{a^2+b^2}-1$, $a^2=4(b+1)$

이때 $3a=4b$ 이고 $a, b>0$ 이므로 연립하면 $a=4$, $b=3$

삼각형 PFF′ 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{16\sqrt{21}}{5}$

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\cos\theta=\frac{32\sqrt{21}}{5}$

한편 쌍곡선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=6$ 이고

삼각형 PFF′ 에서 코사인법칙으로 인해

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$100=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2+2\sin\theta\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

$100=\left(\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}\right)^2+2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}+2\sin\theta\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times(\sin\theta+1)=32$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=\frac{32\sqrt{21}}{5\cos\theta}=\frac{32}{\sin\theta+1}$

$\sqrt{21}(\sin\theta+1)=5\cos\theta$

$21(\sin\theta+1)^2=25\cos^2\theta$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 이므로

$23\sin^2\theta+21\sin\theta-2=0$

$(23\sin\theta-2)(\sin\theta+1)=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{2}{23}$

27) [정답] ⑤ (출제자 : 23 이나경, 23 강주연)

[출제의도] 포물선과 타원의 접선의 방정식을 구하고 포물선의 성질을 이용하여 주어진 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P를 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하자.

포물선 $y^2=4\sqrt{3}x$ 위의 점 P에서의 접선 l 은

$y_1y=2\sqrt{3}(x+x_1)$, $y=\frac{2\sqrt{3}}{y_1}x+\frac{2\sqrt{3}}{y_1}x_1$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$ 위의 점 P 에서의 접선 m 은

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{2a^2}=1$, $y=-\frac{2x_1}{y_1}x+\frac{2a^2}{y_1}$

두 직선의 기울기를 곱하면 $-\frac{2x_1}{y_1}\times\frac{2\sqrt{3}}{y_1}=-\frac{4\sqrt{3}x_1}{{y_1}^2}$ 이고

점 P 가 포물선 $y^2=4\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 ${y_1}^2=4\sqrt{3}x_1$ 이고

$\frac{-4\sqrt{3}x_1}{{y_1}^2}=-\frac{4\sqrt{3}x_1}{4\sqrt{3}x_1}=-1$ 이다.

따라서 두 직선은 수직으로 만나고 $2\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBA}=\frac{\pi}{3}$ 이다.

직선 l 의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{y_1}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $y_1=6$

${y_1}^2=4\sqrt{3}x_1$ 에서 $36=4\sqrt{3}x_1$, $x_1=3\sqrt{3}$

따라서 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선 l 에 수직이고 점 $(3\sqrt{3}, 6)$ 을 지나는 직선 m 은

$y-6=-\frac{3}{\sqrt{3}}(x-3\sqrt{3})$

$y=-\sqrt{3}x+15$

점 C 를 구하기 위해 포물선과 직선 m 의 방정식을 연립하면

$3x^2-34\sqrt{3}x+225=0$ 이고, 이 방정식의 한 근이 $x=3\sqrt{3}$ 이므로

$3x^2-34\sqrt{3}x+225=(x-3\sqrt{3})(3x-25\sqrt{3})=0$

즉, 점 C 의 x 좌표는 $\frac{25}{3}\sqrt{3}$

점 C 에서 포물선의 준선 $x=-\sqrt{3}$ 에 내린 수선의 발을 D 라고 하면 포물선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CD}}=\frac{28}{3}\sqrt{3}$

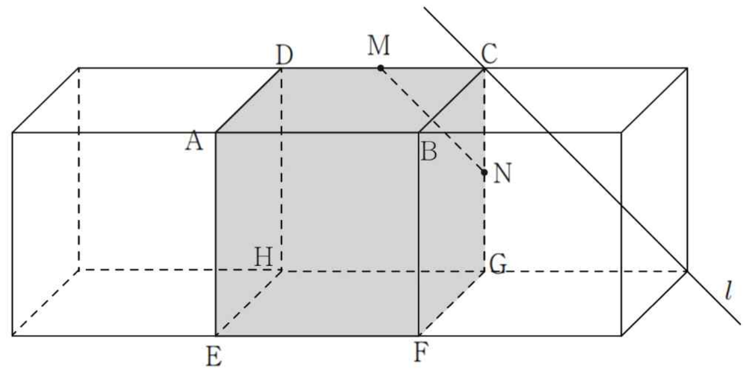
28) [정답] ⑤ (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 조건을 만족시키는 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

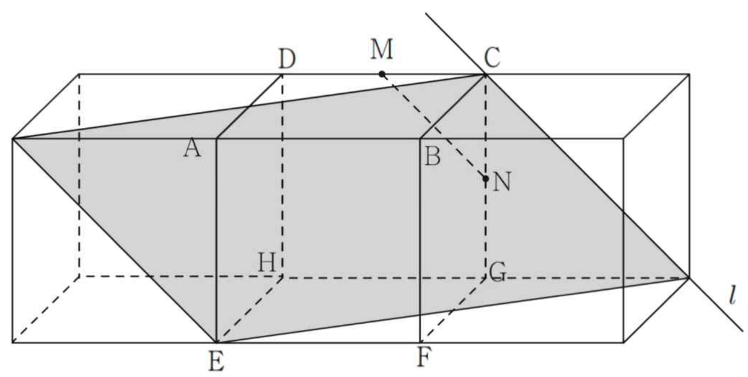
[해설]

$\overline{\mathrm{MN}}=2$ 이고, 선분 MN 의 평면 α 위로의 정사영의 길이와 선분 MN 의 길이가 같으므로 평면 α 가 선분 MN 과 평행하다.

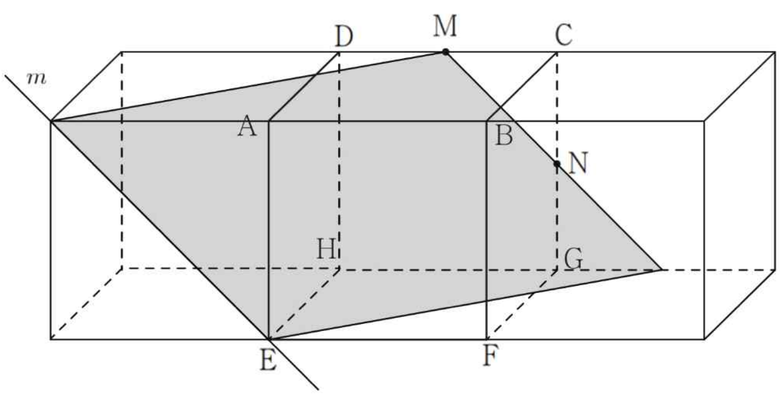
선분 MN 과 평행하고 점 C 를 지나는 직선을 l 이라 하자.



평면 α 가 점 E 와 직선 l 을 지나므로 평면의 결정조건에 의하여 평면 α 는 다음 그림과 같이 결정된다.



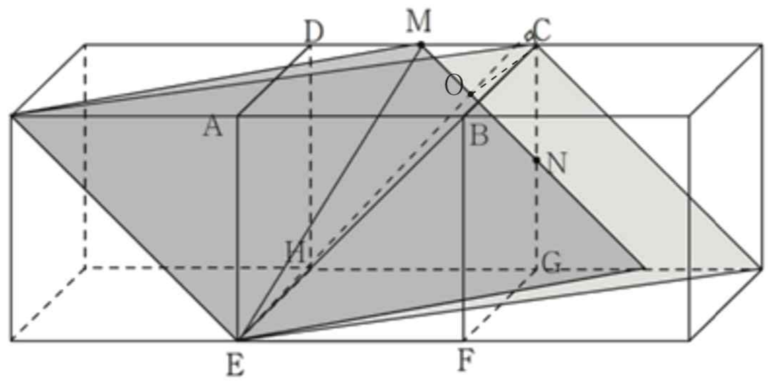
선분 MN 과 평행하고 점 E 를 지나는 직선을 m 이라 하면 평면 ENM 은 다음 그림과 같다.



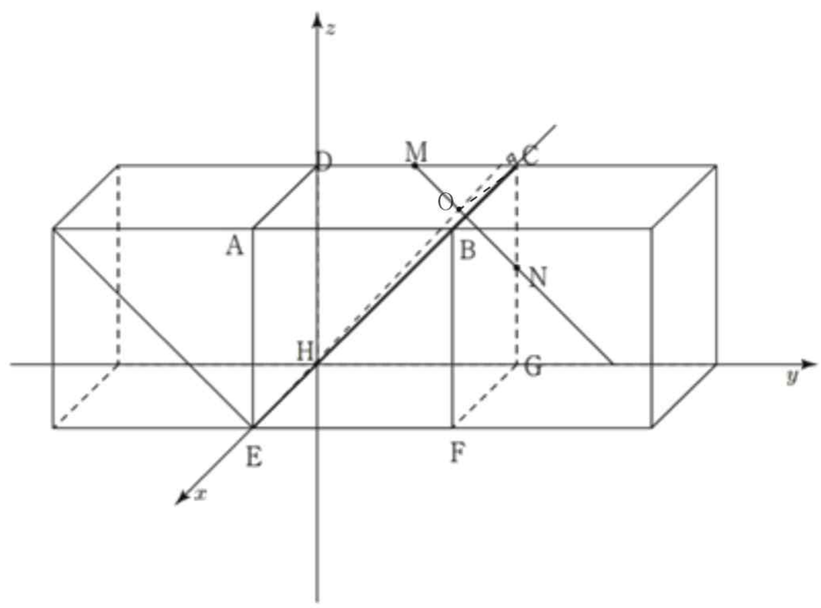
평면 α 와 평면 ENM 의 이면각의 크기를 찾기 위하여
먼저 점 C 를 지나고 직선 m 에 수직인 선분을 찾는다.
점 C 에서 직선 M 이 포함된 평면 AEFB 에 내린 수선의 발은 점 B 이고
점 B 에서 직선 m 에 내린 수선의 발은 점 E 이므로
삼수선의 정리에 의하여 선분 CE 가 직선 m 과 수직이다.

선분 MN 의 중점을 O 라 하면
삼각형 ENM 은 $\overline{\mathrm{EN}}=\overline{\mathrm{EM}}$ 인 이등변삼각형이므로 직선 EO 와 직선 MN 이 수직이고, 직선 MN 과 직선 m 이 평행하므로 직선 EO 와 직선 m 도 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여 점 C 에서 평면 ENM 에 내린 수선의 발은 직선 EO 위에 존재하고, 평면 α 와 평면 ENM 의 이면각의 크기는 각 CEO 의 크기와 같다.



코사인법칙으로 $\cos(\angle\mathrm{CEO})$ 의 값을 구하기 위하여 삼각형 CEO 의 세 변의 길이를 구하자.
다음 그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH 의 점 H 가 원점이고 각 변이 x 축, y 축 또는 z 축과 평행하도록 좌표공간을 위치시키면



$\mathrm{C}(0,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $\mathrm{E}(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $\mathrm{O}\left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 이고

$$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(2\sqrt{2}-0)^2+(0-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$$

$$\overline{\mathrm{EO}}=\sqrt{(0-2\sqrt{2})^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{17}$$

$$\overline{\mathrm{CO}}=\sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}\right)^2}=1$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{CEO})=\frac{\overline{\mathrm{CE}}^{\,2}+\overline{\mathrm{EO}}^{\,2}-\overline{\mathrm{CO}}^{\,2}}{2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{EO}}}=\frac{24+17-1}{2\times2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}=\frac{5}{51}\sqrt{102}$$

$\overline{\mathrm{EM}}=\overline{\mathrm{EN}}$ 인 이등변삼각형 ENM 에서 밑변 $\overline{\mathrm{MN}}=2$ 이고 높이 $\overline{\mathrm{EO}}=\sqrt{17}$ 이므로 $\triangle\mathrm{ENM}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{17}=\sqrt{17}$

삼각형 ENM 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle\mathrm{ENM}\times\cos(\angle\mathrm{CEO})=\sqrt{17}\times\frac{5}{51}\sqrt{102}=\frac{5}{3}\sqrt{6}$$

29) [정답] 7 (출제자 : 23 강주연)

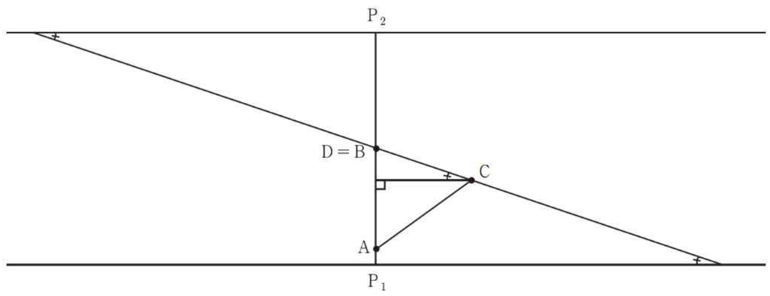
[출제의도] 공간에서 조건을 만족시키는 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

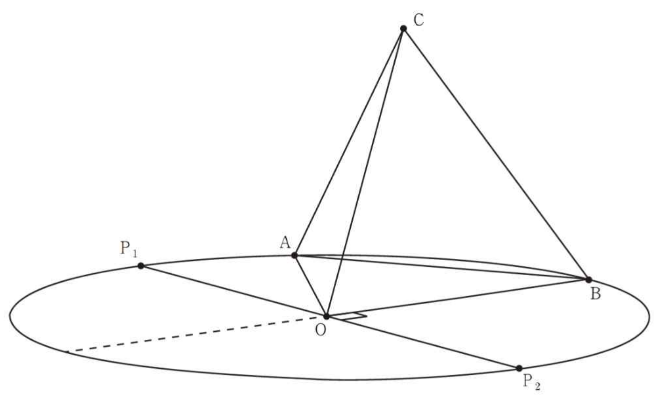
구의 중심을 지나는 평면 OAB 와 구가 만나는 선은 점 O 를 중심으로 하고 두 점 A , B 를 지나는 원이다.

점 C 에서 평면 OAB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
평면 OAB 와 평면 α 가 수직으로 만나므로 선분 CH 가 평면 α 와 평행하다.

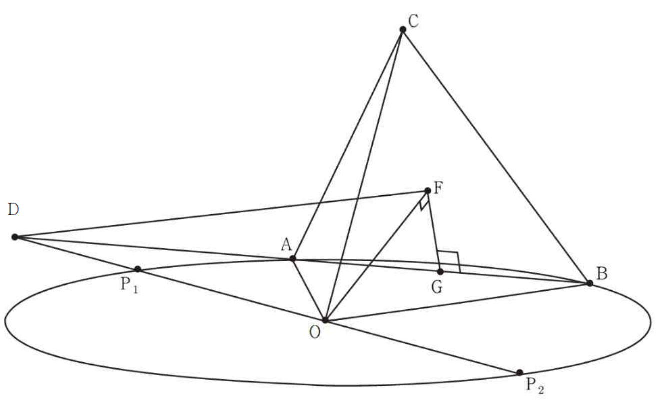
삼각형 OBC 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 선분 OB 의 평면 α 위로의 정사영을 밑변으로 하고 선분 CH 의 평면 α 위로의 정사영을 높이로 하는 삼각형의 넓이와 같다.



이때 선분 CH 의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 항상 일정하므로 선분 OB 의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 최대가 되는 점을 찾으면 선분 OB 와 평면 α 가 평행할 때 선분 OB 의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 최대이므로
원의 선분 OB 와 수직인 지름의 양 끝 점 중 점 A 에 가까운 점이 P_1 , 먼 점이 점 P_2 이고, 선분 P_1P_2 의 길이는 4 이다.



선분 P_1P_2 의 연장선이 선분 AB 와 만나는 점을 D 라 하고 점 O 에서 평면 ABC 위에 내린 수선의 발을 F , 점 F 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 G 라 하면



선분 P_1P_2 가 평면 ABC 와 이루는 각은 각 ODF 와 같고,

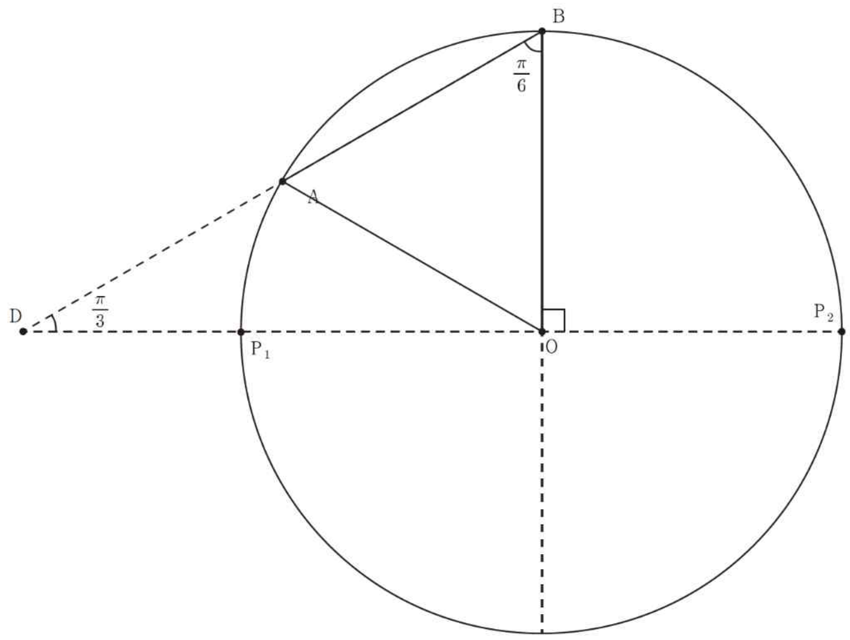
삼각형 ODF 가 $\angle \mathrm{OFD} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\cos(\angle \mathrm{ODF}) = \frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\overline{\mathrm{OD}}}$

삼각형 DOB 가 $\angle \mathrm{DOB} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OB}} = 2$,

$\angle \mathrm{DBO} = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OD}} = \tan(\angle \mathrm{DBO}) \times \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$



점 F 가 삼각형 ABC 의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{FG}} = 3 : 1$

삼각형 OFG 가 $\angle \mathrm{OFG} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{FG}} : \overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{FG}} : \sqrt{\overline{\mathrm{OG}}^2 - \overline{\mathrm{FG}}^2} = 3 : 1 : 2\sqrt{2}$

삼수선의 원리에 의하여 선분 OG 가 선분 AB 와 수직이고 그 길이는 삼각형 OAB 의 높이인 $\sqrt{3}$ 과 같다.

$\overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{OF}} = 3 : 2\sqrt{2} = \sqrt{3} : \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\overline{\mathrm{OF}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

직각삼각형 OFD 에서

$\overline{\mathrm{DF}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DO}}^2 - \overline{\mathrm{OF}}^2} = \sqrt{12 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

$\cos(\angle \mathrm{ODF}) = \frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\overline{\mathrm{OD}}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{21}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 이므로

선분 P_1P_2 의 평면 ABC 위로의 정사영의 길이는

$\overline{P_1P_2} \times \cos(\angle \mathrm{ODF}) = 4 \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{7}$

$p = 3$, $q = 4$ 이므로

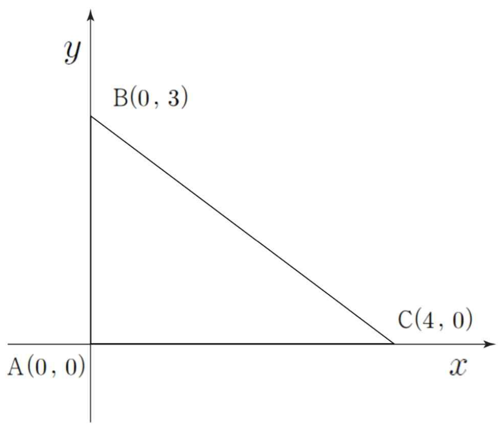
$p + q = 3 + 4 = 7$

30) [정답] 7 (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 벡터로 표현된 식을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC 를 다음 그림과 같이 좌표평면에 위치시키면 각 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(0,3)$, $\mathrm{C}(4,0)$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4,0)$ 이다.



(가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(9\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)=0$ 이므로

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 와 벡터 $9\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{BA}}=9\overrightarrow{\mathrm{AC}}-8\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 가 수직이다.

이때 벡터 $9\overrightarrow{\mathrm{AC}}-8\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 를 성분으로 나타내면

$9\overrightarrow{\mathrm{AC}}-8\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(9\times4+(-8)\times0,\ 9\times0+(-8)\times3)=(36,\ -24)$

점 $\mathrm{A}(0,0)$ 을 지나고 벡터 $9\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(36,\ -24)$ 에 수직인 직선의 방정식은

$36(x-0)+(-24)(y-0)=3x-2y=0$

$y=\frac{3}{2}x$

따라서 점 P 는 직선 $y=\frac{3}{2}x$ 위를 움직이는 점이다.

마찬가지로 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\left(3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0$ 이므로

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 와 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 가 수직이다.

이때 벡터 $-3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 를 성분으로 나타내면

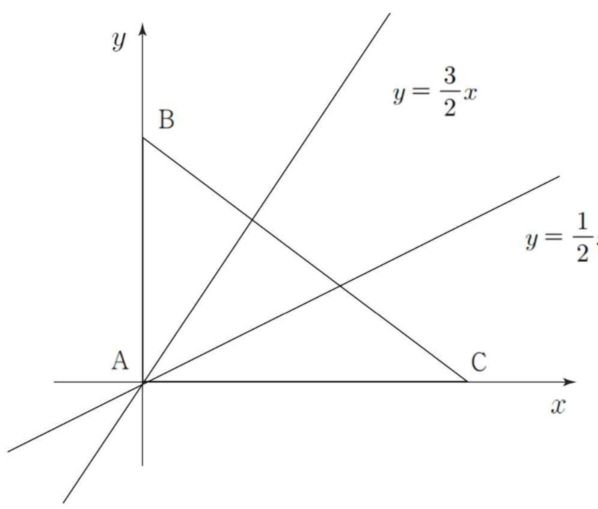
$-3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3\times4+8\times0,\ -3\times0+8\times3)=(-12,\ 24)$

점 $\mathrm{A}(0,0)$ 을 지나고 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-12,\ 24)$ 에 수직인 직선의 방정식은

$-12(x-0)+24(y-0)=-x+2y=0$

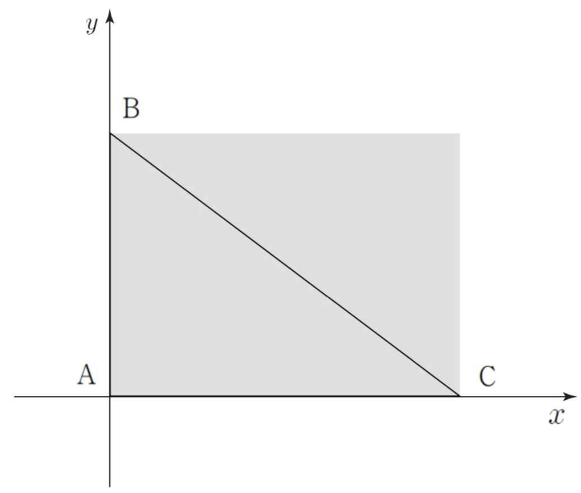
$y=\frac{1}{2}x$

따라서 점 Q 는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위를 움직이는 점이다.



(나)에서

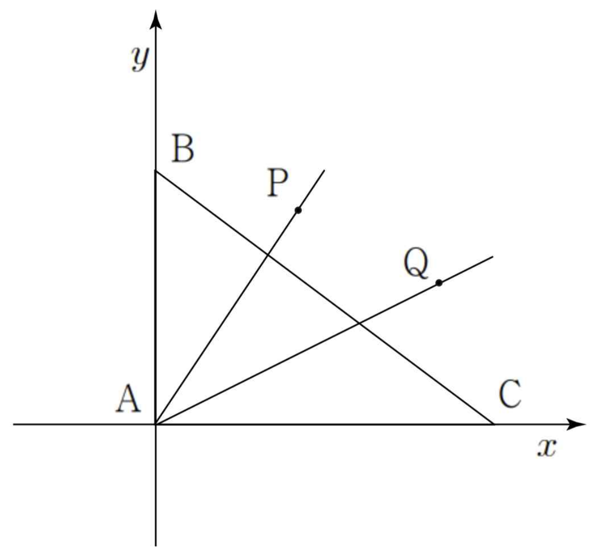
1 이하의 네 양수 m_1, m_2, n_1, n_2 에 대하여 시점을 점 A 로 하는 벡터 $m_1\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n_1\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 또는 $m_2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n_2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 의 종점은 선분 AB 와 선분 AC 를 이웃하는 변으로 하는 직사각형 내부에 위치한다.



따라서 (가)와 (나)에서

점 P 는 선분 $y=\frac{3}{2}x\ (0\le x\le2)$ 위를 움직이는 점이고

점 Q 는 선분 $y=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le4)$ 위를 움직이는 점이다.



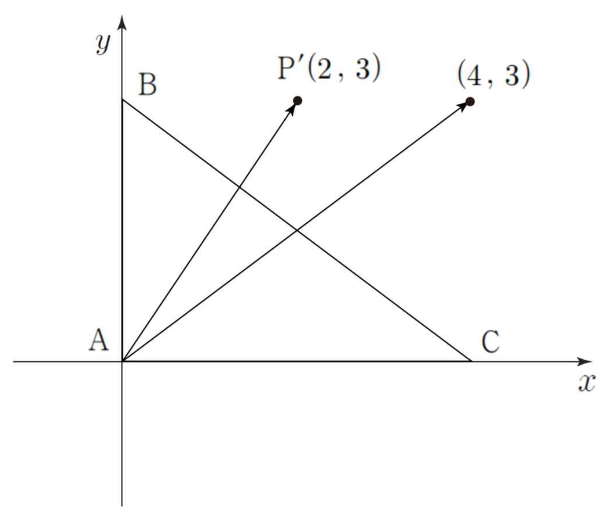
$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ 에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 를 성분으로 나타내면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0+4,\ 3+0)=(4,3)$

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 의 x 성분과 y 성분이 모두 음수가 아니므로,

점 P 가 $(2,3)$ 에 위치할 때 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 의 x 성분과 y 성분이 최대이고 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ 가 최대이다.

따라서 $\mathrm{P}'(2,3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}'}=(2,3)$

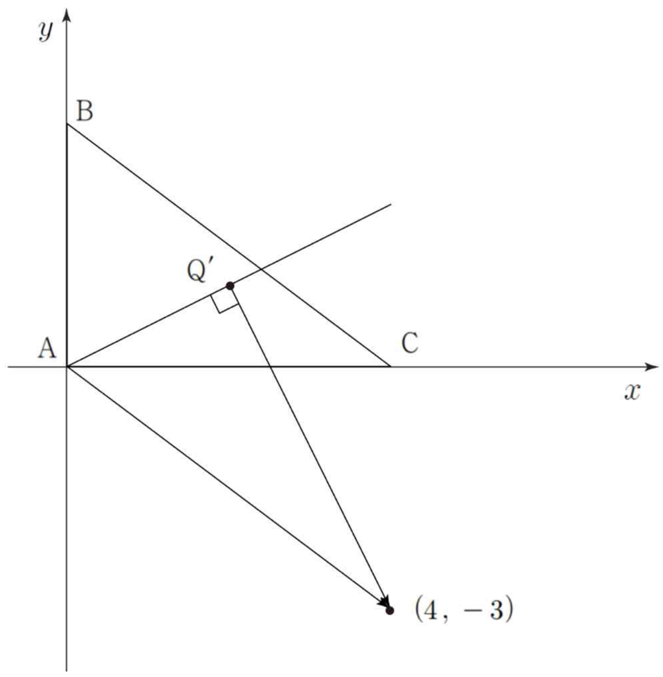


$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{QA}\right|=\left|-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ}\right|$ 에서 벡터

$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 를 성분으로 나타내면

$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-0+4,\ -3+0)=(4,\ -3)$

종점이 점 A 로 같은 두 벡터 $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 와 $\overrightarrow{AQ}$ 의 차의 크기는 점 Q 가 점 C 에서 선분 $y=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 4)$ 에 내린 수선의 발일 때 최소이다.



점 $(4,\ -3)$ 을 지나고 선분 $y=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 4)$ 에 수직인 직선의 방정식은

$y-(-3)=-2(x-4)$, $y=-2x+5$

선분 $y=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 4)$ 와 직선 $y=-2x+5$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x=-2x+5$, $x=2$

선분 $y=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 4)$ 와 직선 $y=-2x+5$ 의 교점의 y 좌표는

$\frac{1}{2}\times 2=1$

따라서 $Q'(2,\ 1)$, $\overrightarrow{AQ'}=(2,\ 1)$

$\overrightarrow{AP'}\cdot\overrightarrow{AQ'}=2\times 2+3\times 1=7$