2025학년도 대수능 9월 모의평가 공통과목 주요문항 정답 및 해설

공통과목

12	②	14	⑤	15	①	21	31	22	8

12. ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$이므로

$b_2=a_1-a_2=-d=-2$, 즉 $d=2$

이다. $b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$에서 자연수 m에 대하여

$n=2m$이면

$$b_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m})=-d\times m=-2m$$

$n=2m+1$이면

$$b_{2m+1}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m})+a_{2m+1}=-d\times m+a_{2m+1}=-2m+a_{2m+1}$$

이다.

$b_{2m+1}=-2m+a_{2m+1}$에서

$m=1$을 대입하면 $b_3=-2+a_3$,

$m=3$을 대입하면 $b_7=-6+a_7$

이고,

$$b_3+b_7=-8+a_3+a_7=-8+2a_5=0,\ 즉\ a_5=4$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{9}b_n=b_1+\sum_{m=1}^{4}(b_{2m}+b_{2m+1})=a_1+\sum_{m=1}^{4}(-4m+a_{2m+1})=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9-4\times\frac{4\times5}{2}=5a_5-40=-20$$

이다.

14. ⑤

직선 A_nB_n의 기울기는 3이므로

$3\times$(두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차)

$=$(두 점 A_n, B_n의 y좌표의 차)

이다. 이때 $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$이므로 두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$(n\times\sqrt{10})^2=d^2+(3d)^2$,

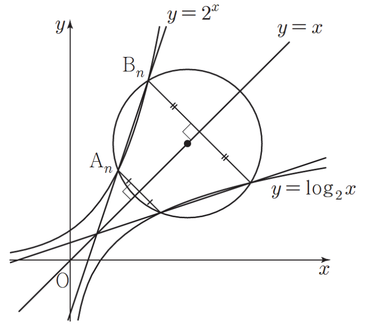
$10n^2=10d^2$, 즉 $d=n$

이고,

(두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차)$=n$ …… ㉠,

(두 점 A_n, B_n의 y좌표의 차)$=3n$ …… ㉡

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원을 C라 하자. 원 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 원 C가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점은 각각 두 점 A_n, B_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점과 같다.



곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값이 x_n이므로 두 점 A_n, B_n의 y좌표 중 큰 값이 x_n이고, 두 점 A_n, B_n 중 y좌표가 작은 점을 A_n, y좌표가 큰 점을 B_n이라 하자.

$B_n(\log_2 x_n,\ x_n)$

이고, ㉠, ㉡에 의하여

$A_n(-n+\log_2 x_n,\ -3n+x_n)$

이다. 점 A_n은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$2^{-n+\log_2 x_n}=-3n+x_n$

이다. 이때

$2^{-n}\times2^{\log_2 x_n}=2^{-n}\times x_n$

이고,

$2^{-n}\times x_n=-3n+x_n$,

즉 $x_n=\dfrac{3n}{1-2^{-n}}=\dfrac{3n\times2^n}{2^n-1}$

이다.

$$\therefore\ x_1+x_2+x_3=3\times2+\frac{6\times4}{3}+\frac{9\times8}{7}=\frac{170}{7}$$

15. ①

조건 (가)에 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$이고

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

이다. $f(x)=xg'(x)$이므로

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$ …… ㉠

이다.

$$\frac{d}{dx}(xg(x))=g(x)+xg'(x)=xg'(x)+g(x)$$

이므로

$$xg(x)+C=\int(xg'(x)+g(x))dx$$

이다. ㉠의 양변을 x에 대하여 적분하면

$xg(x)=4x^3+12x^2-6x+C$ …… ㉡

이고, ㉡에 $x=0$을 대입하면 $C=0$이다

$xg(x)=4x^3+12x^2-6x$

이고, 이 식의 양변을 x로 나누면

$g(x)=4x^2+12x-6$

이다.

$$\therefore\ \int_0^3 g(x)dx=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3=72$$

21. 31

주어진 식에서 방정식

$2k-8=4k^2+14k$

을 풀면

$4k^2+12k+8=4(k+1)(k+2)=0$

이고,

$k=-1$일 때와 $k=-2$일 때,

$2k-8=4k^2+14k$

이다. 주어진 식에 $k=-1$을 대입하면

$-10\le\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}\le-10$,

$f(1)-f(-1)=-20$ …… ㉠

이고, 또 주어진 식에 $k=-2$를 대입하면

$-12\le\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}\le-12$,

$f(0)-f(-2)=-24$ …… ㉡

이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

라 놓으면

㉠에서 $f(1)-f(-1)=2+2b=-20$, 즉 $b=-11$

㉡에서 $f(0)-f(-2)=-14-4a=-24$, 즉 $a=\dfrac{5}{2}$

이다. 따라서

$f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$,

$f'(x)=3x^2+5x-11$

이고, $f'(3)=31$이다.

22. 8

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_n-\dfrac{2}{3}k$, $a_{n+1}=-ka_n$

이다. $a_1=k$이므로 가능한 a_2, a_3의 값을 구해보면 다음과 같다.

a_2	a_3
$\frac{1}{3}k$	$-\frac{1}{3}k$
	$-\frac{1}{3}k^2$
$-k^2$	$-k^2-\frac{2}{3}k$
	k^3

이때 $k>0$이므로 $a_2\times a_3<0$이 되도록 하는 경우는

(ⅰ) $a_2=\dfrac{1}{3}k$, $a_3=-\dfrac{1}{3}k$

(ⅱ) $a_2=\dfrac{1}{3}k$, $a_3=-\dfrac{1}{3}k^2$

(ⅲ) $a_2=-k^2$, $a_3=k^3$

이다.

(ⅰ) $a_2=\dfrac{1}{3}k$, $a_3=-\dfrac{1}{3}k$인 경우

$a_3=-\dfrac{1}{3}k$이므로 가능한 a_4, a_5의 값을 구해보면 다음과 같다.

a_3	a_4	a_5
$-\frac{1}{3}k$	$-k$	$-\frac{5}{3}k$
		k^2
	$\frac{1}{3}k^2$	$\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}k$
		$-\frac{1}{3}k^3$

이때 $k>0$이므로 $a_5=0$이 되도록 하는 k의 값은

강사 김윤재

$\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}k=0$에서 $k=2$

이다.

(ii) $a_2=\frac{1}{3}k$, $a_3=-\frac{1}{3}k^2$인 경우

$a_3=-\frac{1}{3}k$이므로 가능한 a_4, a_5의 값을 구해보면 다음과 같다.

a_3	a_4	a_5
$-\frac{1}{3}k^2$	$-\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}k$	$-\frac{1}{3}k^2-\frac{4}{3}k$
		$\frac{1}{3}k^3+\frac{2}{3}k^2$
	$\frac{1}{3}k^3$	$\frac{1}{3}k^3-\frac{2}{3}k$
		$-\frac{1}{3}k^4$

이때 $k>0$이므로 $a_5=0$이 되도록 하는 k의 값은

$\frac{1}{3}k^3-\frac{2}{3}k=0$에서 $k=\sqrt{2}$

이다.

(iii) $a_2=-k^2$, $a_3=k^3$인 경우

$a_3=k^3$이므로 가능한 a_4, a_5의 값을 구해보면 다음과 같다.

a_3	a_4	a_5
k^3	$k^3-\frac{2}{3}k$	$k^3-\frac{4}{3}k$
		$-k^4+\frac{2}{3}k^2$
	$-k^4$	$-k^4-\frac{2}{3}k$
		k^5

이때 $k>0$이므로 $a_5=0$이 되도록 하는 k의 값은

$k^3-\frac{4}{3}k=0$에서 $k=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$에서 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합은

$$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$=4+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$$

이다.