2025학년도 대수능 9월 모의평가 미적분 주요문항 정답 및 해설

미적분

28	③	29	57	30	25

28. ③

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$이므로 $g(0)=0$, $g(1)=1$이다.

$\int_0^1 g^{-1}(x)dx$에서 $g^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=g(t)$에서 $dx=g'(t)dt$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$

이므로

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=\int_0^1 t\times g'(t)dt$$
$$=\Big[tg(t)\Big]_0^1-\int_0^1 g(t)dt$$
$$=1-\int_0^1(f'(2t)\sin\pi t+t)dt$$
$$=\frac{1}{2}-\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$

이다.

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x+\frac{1}{4}$$

에서

$$\frac{1}{2}-\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$$
$$=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x+\frac{1}{4},$$
$$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$$

이다. $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$에서 $x=2t$로 놓으면

$dx=2dt$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$

이므로

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=2\times\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이다.

$$\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1$$
$$-\int_0^1\frac{2}{\pi}f'(2t)\sin\pi t\,dt$$
$$=-\frac{2}{\pi}\times\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$
$$=-\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{6\pi}$$

이므로 ㉠에서

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=2\times\left(-\frac{1}{6\pi}\right)=-\frac{1}{3\pi}$$

이다.

29. 57

S_m의 값을 구해보면 다음과 같다.

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{m+1}{k(k+m+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$

$n\to\infty$일 때 S_m의 값을 구해야하므로 $n>m$일 때

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$의 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{n+m+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m+1}\right)$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}$$
$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+m+1}=0$$

이므로

$$S_m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)=\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n}$$

이다. 따라서

$$a_1=S_1=\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$
$$a_{10}=S_{10}-S_9=\sum_{n=1}^{11}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}=\frac{1}{11}$$

이고,

$$a_1+a_{10}=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}=\frac{35}{22}$$

이므로 $p=22$, $q=35$이다.

$\therefore\ p+q=57$

30. 25

$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}(x+k)e^{-x} & (x<0)\\ (-x+k)e^{-x} & (x\ge 0)\end{cases}$$

이고, $F(x)$은 함수 $f(x)$의 한 부정적분이다.

$$F(x)=\begin{cases}(-x-k-1)e^{-x}+C & (x<0)\\ (x-k+1)e^{-x}+C' & (x\ge 0)\end{cases}$$

(C, C'은 적분상수)

이고, 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$F(0)=\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0-}F(x),$$
$$-k+1+C'=-k-1+C,$$

즉 $C'=-2+C$

이고,

$$F(0)=-k-1+C\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이다.

$$F(x)=\begin{cases}(-x-k-1)e^{-x}+C & (x<0)\\ (x-k+1)e^{-x}-2+C & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\ge f(x)$이면 함수 $h(x)$를

$$h(x)=F(x)-f(x)$$
$$=\begin{cases}(-2x-2k-1)e^{-x}+C & (x<0)\\ (2x-2k+1)e^{-x}-2+C & (x\ge 0)\end{cases}$$

라 할 때,

$(h(x)$의 최솟값$)\ge 0$

이다.

$$h'(x)=F'(x)-f'(x)$$
$$=f(x)-f'(x)$$
$$=\begin{cases}(2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\\ (-2x+2k+1)e^{-x} & (x>0)\end{cases}$$

이다.

$2x+2k-1=0$에서 $x=-k+\frac{1}{2}$,

$-2x+2k+1=0$에서 $x=k+\frac{1}{2}$

이고, 즉 $h'(x)=0$을 만족시킬 수 있는 x의 값은 $x=-k+\frac{1}{2}$ 또는 $x=k+\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) $0<k\le\frac{1}{2}$인 경우

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$k+\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$h(x)$	↘		↗	극대	↘

(ⅱ) $k>\frac{1}{2}$인 경우

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k+\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$k+\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키려면

$k=\frac{1}{4}$일 때, $-k+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0$이므로

$h(0)\ge 0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)\ge 0$이어야 한다.

또 $k=\frac{3}{2}$일 때 $-k+\frac{1}{2}=-1$이므로

$h(-1)\ge 0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅲ-1) $k=\frac{1}{4}$인 경우

$$h(x)=\begin{cases}\left(-2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}+C & (x<0)\\ \left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}-2+C & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다.

$$h(0)=-\frac{3}{2}+C,$$

강사 김윤재

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}-2+C\right\} = -2+C$$

이고,

$$C \geq \frac{3}{2}\text{이고 } C \geq 2\text{이어야 하므로 } C \geq 2$$

이다. ㉠에서 $k=\frac{1}{4}$일 때

$$F(0) = -\frac{5}{4}+C \geq \frac{3}{4}$$

이다. 즉 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$이다.

(ⅲ-2) $k=\frac{3}{2}$인 경우

$$h(x) = \begin{cases} (-2x-4)e^{-x}+C & (x<0) \\ (2x-2)e^{-x}-2+C & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$h(-1) = -2e+C$,

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\{(2x-2)e^{-x}-2+C\} = -2+C$$

이고,

$C \geq 2e$이고 $C \geq 2$이어야 하므로 $C \geq 2e$

이다. ㉠에서 $k=\frac{3}{2}$일 때

$$F(0) = -\frac{5}{2}+C \geq -\frac{5}{2}+2e$$

이다. 즉 $g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}e+2$이다.

(ⅲ)에 의하여

$$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}$$

이고, $p=2$, $q=-\frac{7}{4}$이다.

$\therefore\ 100(p+q)=25$