

2025 수리논술



연세대학교

FINAL

목차

대학별 특징 & Final 안내

1. Final 계획
2. 해당 학교 수리논술을 대하는 우리의 자세

필수 Theme

1. 더블카운팅
2. 텔레스코핑
3. 구간별 다항함수
4. 여러 가지 적분
5. 정수 조건
6. 수열의 상한과 하한
7. 함수 방정식

발전 Theme

1. 이변수함수
2. 매개변수 미적분
3. 확률과 통계 심화

실전모의고사

1. 실전모의고사 1회
2. 실전모의고사 2회
3. 실전모의고사 3회
4. 실전모의고사 4회
5. 실전모의고사 5회

Theme

필수

1. 더블카운팅 기본연습

| 출제유형

생긴 모양은 간단하지만, 문제가 안풀려서 자존심상한 문제들이 있었 것이다.

이런 문제들은 약간의 사고전환을 통해서 훨씬 쉽게 풀어낼 수 있는데, 이러한 '사고전환'을 더블카운팅이라고 한다.

더블카운팅이란, 어떠한 등식을 증명할 때 양변의 의미가 같음을 밝힘으로써 식의 값도 같다고 증명해내는 방식을 의미한다. (더 넓은 의미로는, 수학적 계산 보다는 식의 의미를 부여하여 어떠한 명제를 증명하는 방식) 제일 많은 예시가 있는 단원은 [순열과 조합] 단원이다.

$${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r$$

위 공식은 매우 유명한 공식이다. (파스칼 삼각형을 이루는 공식으로 알려져있다.) 이를 증명하는 일반적인 방법은, 조합의 정의 ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$ 을 이용하여 수식적으로 증명하는 방법도 있다.

하지만 이를 더블카운팅으로 해석하면 다음과 같다.

좌변의 ${}_n C_r$ 은 n 명 중 r 명을 고르는 경우의 수를 의미하는데, 이를 현실에 비유해보면

n 명의 우리나라 축구선수 중 월드컵에 출전할 대한민국 국가대표 r 명을 고르는 경우의 수가 좌변의 의미다.

그런데 국가대표에 이강인 선수(이하 L이라 한다.)가 포함될 수도, L이 포함되지 않을 수도 있다.

L이 포함된다면, L을 제외한 $(n-1)$ 명 중 $(r-1)$ 명을 골라야 국가대표 r 명이 완성된다. ... ①

L이 포함되지 않는다면, L을 제외한 $(n-1)$ 명 중 r 명을 골라야 국가대표 r 명이 완성된다. ... ②

좌변이나, ①과 ②를 더한 우변이나 결국 두 방법 모두

대한민국 국가대표를 결정하는 방법의 수를 구한 방법

임은 틀림없으므로, 좌변=우변이고 따라서 ${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r$ 인 것이다.

이러한 의미부여를 통해 보이기 어려운 명제를 보이는 방식을 더블카운팅이라 한다.

| 더블카운팅의 의미확장

이 문제의 정답은 A이지만, 그와 다른 A'을 데려와서 이 A'과 찌 정답인 A가 같은 의미임을 설명함으로써 내 정답인 A'가 이 문제의 정답이라고 주장하는 방법도 더블카운팅이라고 할 수 있다.

예를 들어, 10\$짜리 고기 / 1\$짜리 핫반 / 2\$짜리 음료수 이렇게 딱 세 종류만 파는 어느 고기집의 하루 매출을 계산하는 문제가 나왔다고 하자.

이 문제에서는 각 테이블의 요금의 $f(k)$ 을 다 더해서 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 으로 하루 매출을 구하라고 했지만, 각 테이블에서

시킨 고기/핫반/음료수의 조합이 너무 다양하여 시그마를 풀기 어렵다고 판단했다고 하자.

(즉, $f(k)$ 가 복잡해서 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 를 구하기 어려운 상황. 예를 들어 $\sum_{k=1}^n \left[\frac{6k^2 + k}{2k + 1} \right]$ 같은 느낌!!)

이때, 다른 방법으로 고깃집의 하루 매출을 계산하는 방법은 무엇이 있을까?

고기가 총 p 인분, 핫반이 총 q 공기, 음료수가 총 r 병 나간 것을 품목별로 각각 세어본다면,

가계의 총 매출을 $(10 \times p + 1 \times q + 2 \times r)$ \$ 로 구할 수 있다. 앞서 더할 항이 많았던 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 을 풀기보다는 오직 세 품목의 판매액에 집중한 것이다.

결국, 이 방식은 마치 $\frac{y-2}{x-1}$ 란 식을 수능에서 두 점 $(1, 2)$, (x, y) 사이의 기울기라고 해석한 것과 다를 바 없다.

Just, 발상의 전환 = 더블카운팅

✓ KICK

보자마자 떠올린 방법이 아닌 다른 방법으로 구해보려는 연습해볼 것.

예제 1

★★★★☆

연습문제

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_n - \sqrt{n}| < \frac{1}{2}$ 가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{110} a_k$ 의 값을 구하시오.

연습지

자연수 k ($k = 1, 2, \dots, 10$) 에 대하여 k 이상 10 이하의 자연수들의 역수들의 합을 $f(k)$ 라 하자.

예를 들어, $f(8) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ 이다. 이때, $\sum_{k=1}^{10} 6k^2 f(k)$ 의 값을 구하시오.

2. 더블카운팅 실전연습

| 출제유형

이번엔 실제 논술 기출들을 이용하여 더블카운팅을 연습해보자.

✓ KICK

구하려고 하는 것을 넓게 펼쳐놓고, 가로 또는 세로를 번갈아보며 관찰해보기

예제 4

★★★★☆

2025 연세대 모의

[문제 2, 단답형]

$1 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_n = \sum_{m=n}^{10} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$ 이라고 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.

연습지

[문제 5] 단답형+서술형

제시문

〈가〉 양의 정수 n 에 대하여 정의역과 공역을 $\{0, 1, \dots, 2n\}$ 로 하는 일대일대응을 모두 모은 집합을 S 라 하고 그 원소를 중복 없이 나열하여 $S = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ 이라 하자.

이때, 1부터 N 까지의 자연수 j 에 대하여 집합 A_j 와 B_j 를

$$A_j = \{i \mid f_j(i) < f_j(0), 1 \leq i \leq n\}, \quad B_j = \{i \mid f_j(i) < f_j(0), n+1 \leq i \leq 2n\}$$

라 하고 a_j 와 b_j 를 각각 집합 A_j 와 B_j 의 원소의 개수라 하자.

〈나〉 $2n$ 명의 사람 중에서 k 명을 뽑았다고 하자. 이때, $2n$ 명의 사람이 n 쌍의 부부로 이루어졌다고 가정하면, $2n$ 명 중 뽑힌 사람 수 k 는 부부가 모두 뽑힌 쌍의 수의 2배와 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍의 수의 총합으로 생각할 수 있다.

[1]~[2]는 서술형이 아닌 단답형입니다.

[1] 집합 S 의 원소의 개수 N 을 구하시오. (단답형)

[2] 표본공간 S 의 각 원소 f_j 에 값 a_j 를 대응시키는 확률변수 X 를 생각하자.

$n = 3$ 일 때, 확률 $P(X=1)$ 을 구하시오. (단답형)

[3]은 단답형이 아닌 서술형입니다. 침묵 제출에 유의해주시기 바랍니다.

[3]

다음 등식

$${}_{2n}C_k = \sum_{i=0}^{(가)} \binom{n}{i} C_i \times \binom{n-i}{(나)} C_{(나)} \times 2^{(다)}$$

이 성립하도록 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 제시문 〈나〉를 이용하여 구하고 그 이유를 설명하시오.

[4]는 선넘은 문제이므로, 풀거나 답안을 작성하지 않습니다.

Just 기대T의 서커스를 구경하세요.

[4]

다항함수

그 값이

