08 정적분의 활용

미적분II 교과서 Review

문제 1

곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

문제 2

곡선 $y=|e^x-1|$과 직선 $y=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

문제 3

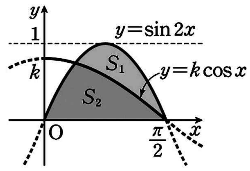
곡선 $y=\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

08 정적분의 활용

미적분II 교과서 Review

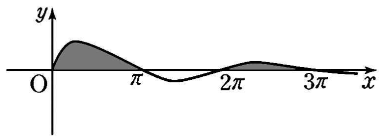
문제 4

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin 2x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 부분이 곡선 $y=k\cos x$에 의하여 나누어지는 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 하자. $S_1 : S_2 = 9 : 16$이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.



문제 5

다음 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}\sin x\ (x \ge 0)$와 x축으로 둘러싸인 도형 중 x축 위쪽에 있는 부분의 넓이의 합을 구하여라.



문제 6

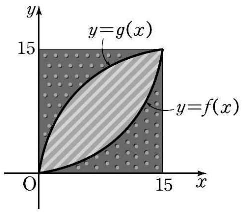
오른쪽 그림은 함수 $f(x)=xe^x\ (0 \le x \le 1)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 역함수 를 $g(x)$라고 할 때, 정적분 $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e g(x)dx$의 값을 구하여라.

08 정적분의 활용

미적분II 교과서 Review

문제 7

오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 타일이 좌표평면 위의 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 경계로 하여 노란색과 파란색이 칠해지는 부분의 넓이의 비가 2 : 3일 때, $\int_0^{15} g(x)$의 값을 구하여라. (단, 함수 $y=g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 역함수이다.)



문제 8

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$, $f''(x)<0$을 만족하고 $f(0)=1$, $f(8)=12$이다. 다음 보기에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $\int_0^8 \{f(x)+xf'(x)\}\,dx=96$

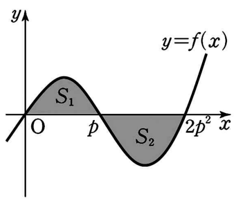
ㄴ. $\int_0^8 f(x)\,dx > \int_0^8 xf'(x)\,dx$

ㄷ. $\int_0^8 f(x)\,dx > 52$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 9

오른쪽 그림과 같은 연속함수 $f(x)$의 그래프에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 각각 S_1, S_2일 때, 정적분 $\int_0^p xf(2x^2)\,dx$를 S_1, S_2를 이용하여 나타내면? $\left(\text{단, } p>\frac{1}{2}\right)$



① $\frac{1}{4}(S_1-S_2)$ ② $\frac{1}{2}(S_1-S_2)$ ③ S_1-S_2

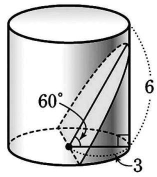
④ $2(S_1-S_2)$ ⑤ $4(S_1-S_2)$

08 정적분의 활용

미적분II 교과서 Review

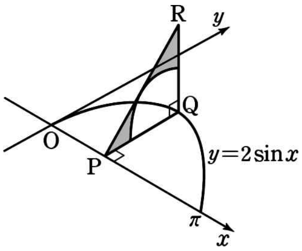
문제 10

밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 6인 원기둥이 있다. 밑면의 중심을 지나고, 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 이 원기둥을 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 작은 것의 부피를 구하여라.



문제 11

곡선 $y=2\sin x\,(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 영역에 밑면이 있는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 다음 그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인 직각이등변삼각형에서 점 Q를 중심으로 하고 변 PR에 접하는 사분원을 제외한 도형과 같을 때, 이 입체도형의 부피를 구하여라.



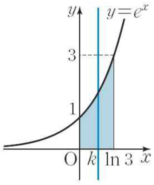
문제 12

닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sin x)$에서 x축 위에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 밑변으로 하고 $\angle \mathrm{P}=90^\circ$, 높이가 x인 직각삼각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=0$에서 $x=\pi$까지 변할 때, 이 직각삼각형이 만드는 입체도형의 부피는?

① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ 1　④ $1+\dfrac{\pi}{4}$　⑤ $1+\dfrac{\pi}{2}$

〈정답 및 해설〉
미적분Ⅱ - 8단원. 정적분의 활용

1.



곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\ln 3} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 3} = 3-1=2$$

직선 $x=k$가 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^k e^x dx = \left[e^x\right]_0^k = e^k - 1 = 1$$

따라서 $k=\ln 2$

2.

곡선 $y=\left|e^x-1\right|$과 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는

$x>0$일 때,

$e^x-1=\frac{1}{2}$에서

$x=\ln\frac{3}{2}$

$x<0$일 때, $-e^x+1=\frac{1}{2}$에서 $x=-\ln 2$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}+\ln 2\right)-\int_{-\ln 2}^{0}(-e^x+1)dx$$

$$-\int_0^{\ln\frac{3}{2}}(e^x-1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\left[-e^x+x\right]_{-\ln 2}^{0}-\left[e^x-x\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\left(-1+\frac{1}{2}+\ln 2\right)-\left(\frac{3}{2}-\ln\frac{3}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2$$

3.

$y'=\frac{1}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라고 하면

접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$y=\frac{1}{t}x-1+\ln t \qquad \cdots\cdots ①$$

이 접선이 원점을 지나므로

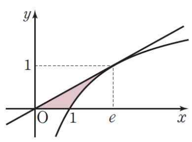
$$-1+\ln t=0,\ t=e$$

즉, 접점의 좌표는 $(e,\ 1)$이고, 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{e}x,\text{ 즉 } \quad x=ey$$

한편 $y=\ln x$에서

$$x=e^y$$



따라서 구하는 도형의 넓이는 곡선 $x=e^y$과 x축 및 직선 $x=ey$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^1 (e^y-ey)\,dy=\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1$$

$$=\frac{e}{2}-1$$

4.

두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점의 x좌표를 α라고 하면

$\sin 2\alpha=k\cos\alpha$이고,

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$이므로

$2\sin\alpha\cos\alpha=k\cos\alpha$, $\cos\alpha(2\sin\alpha-k)=0$

즉, $\sin\alpha=\frac{k}{2}\ \ (0<k<2)$

S_1의 넓이를 구하면

$$S_1=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-k\cos x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+k\sin\alpha$$

이때

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

이고, $\sin\alpha=\frac{k}{2}$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k^2}{2}\right)+\frac{k^2}{2}=1-k+\frac{k^2}{4}$$

한편, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$이고,

$S_1:S_2=9:16$이므로 $1-k+\frac{k^2}{4}=\frac{9}{25}$

$$25k^2-100k+64=(5k-4)(5k-16)=0$$

그런데 $0<k<2$이므로 $k=\frac{4}{5}$

5.

$\int e^{-x} \sin x\, dx$에서

$f(x)=e^{-x}$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$\int e^{-x}\cos x\,dx$에 부분적분법을 다시 한번 적용하자.

$u(x)=e^{-x}$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=-e^{-x}$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

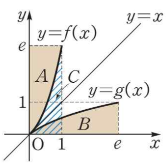
$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$2\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_1$$

$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\int_{4\pi}^{5\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\cdots$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}+\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{2\pi}^{3\pi}$$
$$+\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{4\pi}^{5\pi}+\cdots$$
$$=\frac{e^{-\pi}+1}{2}+\frac{e^{-3\pi}+e^{-2\pi}}{2}+\frac{e^{-5\pi}+e^{-4\pi}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$$

6.

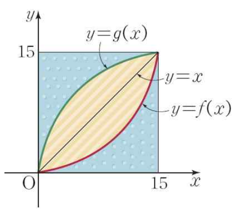
06 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 A, B 두 부분의 넓이가 같다.



$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^e g(x)\,dx$$
$=(C$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$
$=(C$의 넓이$)+(A$의 넓이$)$
$=e\cdot 1=\boldsymbol{e}$

7.

노란색이 칠해진 부분의 넓이는 $\frac{2}{5}\times 15^2=90$



곡선 $y=g(x)$와 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{15}g(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times 90+\frac{1}{2}\times 15^2=\frac{315}{2}$$

8. ⑤

9. ①

10.

원기둥을 자른 평면이 지나는 밑면의 지름의 양 끝점을 각각 A, B라 하고 밑면의 중심을 원점, 선분 AB의 연장선을 x축, 중심을 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 y축으로 하여 나타내면 위의 그림과 같다.

선분 AB 위의 점 P$(x,\ 0)$을 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 Q라고 하면 △OPQ에서

$\overline{OP}=|x|$, $\overline{OQ}=3$이므로 $\overline{PQ}=\sqrt{9-x^2}$

점 Q에서 수직이 되도록 그은 직선이 원기둥을 자른 평면과 만나는 점을 R라고 하면

$\overline{QR}=\overline{PQ}\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}\sqrt{9-x^2}$

이때 △PQR의 넓이 $S(x)$는

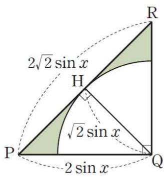
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{9-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{-3}^{3}S(x)\,dx=\int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}=18\sqrt{3}$$

11.

점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라고 하면



$\overline{PQ}=\overline{QR}=2\sin x$이므로

$\overline{PR}=2\sqrt{2}\sin x$

변 PR와 사분원이 접하는 점을 H라고 하면

$$\overline{QH}=\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PR}=\sqrt{2}\sin x$$

단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}(2\sin x)^2-\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}\sin x)^2$$
$$=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x$$

따라서 입체도형의 부피를 V라고 하면

$$V=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

이때 $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$에서

$f(x)=\sin x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$=\Big[-\sin x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$$
$$=0+\int_0^{\pi}(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$=\Big[x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi$$
$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

이것을 ①에 대입하면

$$V=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\pi-\frac{\pi^2}{4}$$

12. ②