07 수학적 귀납법

수학 II 교과서 Review

문제 1

모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 다음 조건을 만족할 때, 다음 중에서 참인 명제는?

(가) $p(1)$이 참이다.
(나) $p(n)$이 참이면 $p(2n)$과 $p(3n)$도 참이다.

① $p(7)$ ② $p(10)$ ③ $p(12)$ ④ $p(14)$ ⑤ $p(20)$

문제 2

자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이면 명제 $p(3n)$이 참이라고 할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(7)$도 참이다.
ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(18)$도 참이다.
ㄷ. $p(3)$이 참이면 $p(81)$도 참이다.

문제 3

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 써넣어라.

| 증 명 |

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 $n=1$일 때 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

위 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\text{(가)}}=\frac{k}{k+1}+\boxed{\text{(가)}}=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

07 수학적 귀납법

문제 4

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

문제 5

다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 써넣어라.

| 증 명 |

(i) $n=1$일 때, $1+5=6$이므로 n^3+5n은 6의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, k^3+5k가 6의 배수라고 가정하면 $k^3+5k=6m$(m은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$(k+1)^3+5(k+1) = 6(\boxed{\text{(가)}}) + 3k(k+1)$

이때 $3k(k+1)$은 6의 배수이므로

$n = \boxed{\text{(나)}}$일 때에도 n^3+5n은 6의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6의 배수이다.

문제 6

다음은 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 써넣어라.

| 증 명 |

$\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$를 변형하면

$2 > n(n-1)$ $\cdots\cdots$ ①

(i) $n=3$일 때,

(좌변)$=16$, (우변)$=6$

따라서 $n=3$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k \geq 3)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$2^{k+1} > k(k-1)$

$n=k+1$일 때,

$2^{k+2} = 2 \cdot 2^{k+1} > 2k(k-1)$ $\cdots\cdots$ ②

그런데 $k \geq 3$일 때,

$2k(k-1) - \boxed{\text{(나)}} \geq 0$

이므로 ②에서

$2^{k+2} > \boxed{\text{(나)}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$가 성립한다.

07 수학적 귀납법

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 7

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지를 구하여라.

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\ \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ (n+1)^2\cdot a_{n+1}=n(n+2)\cdot a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제 8

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 주어진 값을 구하여라.

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n^2$에서 $a_{10}\ \ (1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$에서 $a_6\ \ (1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제 9

귀납적으로 정의된 다음 수열에서 a_6의 값은?

$$a_1=1,\ (n+1)a_{n+1}=2na_n$$

① $\dfrac{13}{6}$　② $\dfrac{14}{5}$　③ $\dfrac{15}{4}$　④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{17}{2}$

07 수학적 귀납법

문제 10

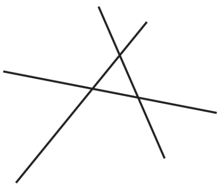
$a_1=1$, $a_2=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2}-a_{2n}=2$
(나) $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0$

이때 $a_{50}+a_{55}$의 값을 구하여라.

문제 11

평면 위에 n개의 직선이 있다. 이 중 어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 같은 점을 지나지 않는다. 이 n개의 직선에 의하여 나누어지는 영역의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 오른쪽 그림에서 $a_3=7$이다. 다음 물음에 답하여라.



(1) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.
(2) a_7의 값을 구하여라.

문제 12

시험관에 들어 있는 10개의 어떤 세포는 1시간마다 3개가 죽고, 나머지는 각각 2개로 분열한다. n시간 후에 살아 있는 이 세포의 개수를a_n이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) a_{n+1}과 a_n사이의 관계식
(2) a_1, a_2, a_3의 값
(3) $\dfrac{a_{n+1}-6}{a_n-6}$의 값 $(n=1, 2, 3, \cdots)$

07 수학적 귀납법

수학II 교과서 Review

문제 13

어떤 공장의 기름 탱크에 2000L의 기름이 들어 있다. 공장을 가동하면 하루 동안 기름 탱크에 들어 있는 기름의 양의 $\frac{1}{4}$을 사용한다. 그날의 작업이 끝나면 200L의 기름을 보충한 후 기름 탱크에 들어 있는 기름의 양을 기록한다고 한다. n번째 기록한 기름의 양을 a_n이라고 할 때, a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하여라. (단, 단위는 L이다.)

문제 14

어떤 세포를 1회 배양하면 그중 10 %는 죽고, 나머지는 각각 10개의 세포로 분열된다고 한다. 이 세포 10개를 10회 배양하였을 때의 세포의 개수를 구하여라.

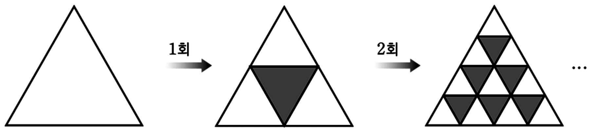
문제 15

20 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_1 %, a_1 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_2 %라고 하자. 이와 같은 시행을 n번 반복한 소금물의 농도를 a_n %라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

07 수학적 귀납법

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 16 앞면에는 흰색, 뒷면에는 검은색이 칠해진 정삼각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 정삼각형의 각 변의 중점을 이은 선분을 경계로 잘라 그중 가운데 삼각형을 뒤집어 놓는 시행을 한다.

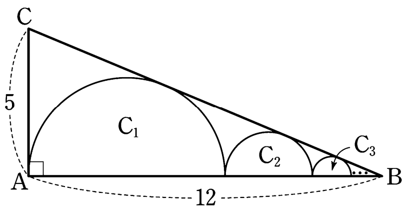


이와 같은 시행을 n번 반복하여 얻어진 삼각형 중에서 흰색 삼각형의 개수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) n번째 시행 후 얻어지는 흰색 삼각형 1개와 검은색 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$번째 시행 후 얻어지는 흰색 삼각형의 개수를 각각 구하여라.

(2) n번째 시행 후 얻어지는 검은색 삼각형의 개수를 a_n을 이용하여 나타내고, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

문제 17 다음 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=5$인 직각삼각형 ABC에서 지름의 한 끝점이 A이고 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$에 동시에 접하는 반원을 C_1이라고 하자. 또, $\overline{AB}$ 위의 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하고 반원 C_1과 $\overline{BC}$에 동시에 접하는 반원을 C_2라고 하자. 이와 같이 반복하여 $\overline{AB}$위의 두 점을 지름의 양 끝점으로 하고 반원 C_n과 $\overline{BC}$에 동시에 접하는 반원을 C_{n+1}이라고 하자. 반원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 할 때, 다음을 구하여라.



(1) r_1의 값

(2) r_{n+1}과 r_n 사이의 관계식

07 수학적 귀납법

수학 II 교과서 Review

〈정답 및 해설〉

1. ③

2. ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(3\times1)=p(3)$도 참이고
$p(3\times3)=p(9)$도 참이다. 그러나 $p(7)$은 참이라고 할 수 없다.
ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(3\times2)=p(6)$도 참이고
$p(3\times6)=p(18)$도 참이다.
ㄷ. $p(3)$이 참이면 $p(3\times3)=p(9)$도 참이고
$p(3\times9)=p(27)$, $p(3\times27)=p(81)$도 참이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

3. ㈎: $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$, ㈏: $\dfrac{k+1}{k+2}$

4. (i) $n=1$일 때
(좌변)=(우변)=2
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+k\cdot2^k=(k-1)2^{k+1}+2$ ……①
①의 양변에 $(k+1)\cdot2^{k+1}$을 더하면
$1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+k\cdot2^k+(k+1)\cdot2^{k+1}$
$=(k-1)\cdot2^{k+1}+2+(k+1)\cdot2^{k+1}$
$=2k\cdot2^{k+1}+2$
$=k\cdot2^{k+2}+2$
이므로 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
따라서 (i), (ii)로부터 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

5. (가) $m+1$ (나) $k+1$

6. $\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{2}{n-1}$의 양변에 $2^n(n-1)$을 곱하면
$n(n-1)<2\cdot2^n$
$2^{\boxed{n+1}}>n(n-1)$
②에서 $2^{k+2}>2k(k-1)$이고 $k\ge3$이므로
$2k(k-1)-\boxed{k(k+1)}=k^2-3k\ge0$
$2^{k+2}>\boxed{k(k+1)}$
㈎ $n+1$ ㈏ $k(k+1)$

7.
(1) $a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+2}=\dfrac{(a_{n+1})^2}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
이므로
$a_3=\dfrac{(a_2)^2}{a_1}=25$
$a_4=\dfrac{(a_3)^2}{a_2}=125$
$a_5=\dfrac{(a_4)^2}{a_3}=625$
(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
이므로
$a_2=\dfrac{1\cdot3}{2^2}\cdot a_1=\dfrac{3}{4}$
$a_3=\dfrac{2\cdot4}{3^2}\cdot a_2=\dfrac{2}{3}$
$a_4=\dfrac{3\cdot5}{4^2}\cdot a_3=\dfrac{5}{8}$
$a_5=\dfrac{4\cdot6}{5^2}\cdot a_4=\dfrac{3}{5}$

8. (1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 관계식 $a_{n+1}=a_n+n^2$에 차례대로 대입하면
$a_2=a_1+1^2=2+1^2$
$a_3=a_2+2^2=2+1^2+2^2$
$a_4=a_3+3^2=2+1^2+2^2+3^2$
⋮
$a_{10}=a_9+9^2=2+1^2+2^2+\cdots+8^2+9^2$
$=2+\sum_{k=1}^{9}k^2$
$=2+\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}=287$
(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 관계식 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$에 차례대로 대입 하면
$a_2=\dfrac{a_1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$
$a_3=\dfrac{a_2}{2+1}=\dfrac{1}{2\cdot3}$
$a_4=\dfrac{a_3}{3+1}=\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}$
$a_5=\dfrac{a_4}{4+1}=\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$
$a_6=\dfrac{a_5}{5+1}=\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\dfrac{1}{720}$

9. ④

10. ㈎에서 $a_{2n+2}=a_{2n}+2$이므로
$a_4=a_2+2=3$
$a_6=a_4+2=5$
$a_8=a_6+2=7$
⋮
$a_{50}=a_{48}+2=49$

㈏에서 $a_{2n+1}=a_{2n-1}$이므로
$a_1=a_3=a_5=\cdots=1$
$a_{55}=1$
$a_{50}+a_{55}=49+1=50$

11. (1) $a_{n+1}=a_n+n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ (2) 29

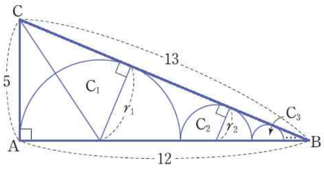
12. (1) $a_{n+1}=2(a_n-3)$
(2) $a_1=2\times(10-3)=14$
$a_2=2\times(14-3)=22$
$a_3=2\times(22-3)=38$
(3) $\dfrac{a_{n+1}-6}{a_n-6}=\dfrac{2(a_n-3)-6}{a_n-6}=\dfrac{2(a_n-6)}{a_n-6}=2$

13. $\begin{cases}a_1=1700\\ a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+200\ (\text{단},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{cases}$

14. 10개의 세포를 n회 배양하였을 때의 세포의 개수를 a_n이라고 하면
$a_1=10\times(1-0.1)\times10=90$,
$a_{n+1}=a_n\times(1-0.1)\times10=9a_n$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 90, 공비가 9인 등비수열이므로
$a_1=90$, $a_n=90\cdot9^{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
구하는 세포의 개수는 수열 $\{a_n\}$의 제10항과 같으므로
$a_{10}=90\cdot9^9=10\cdot9^{10}$

15. $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+5$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

16. (1) n번째 시행 후 얻어지는 흰색 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$번째 시행 후 얻어지는 흰색 삼각형의 개수는
3(개)
n번째 시행 후 얻어지는 검은색 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$번째 시행 후 얻어지는 흰색 삼각형의 개수는
1(개)
(2) n번째 시행 후 얻어지는 검은색 삼각형의 개수는 $4^n - a_n$(개)이므로
$a_{n+1} = 3a_n + (4^n - a_n)$
따라서 $a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

17. 

(1) 위의 그림에서
$\frac{1}{2}\times 13 \times r_1 + \frac{1}{2}\times 5 \times r_1 = \frac{1}{2}\times 12 \times 5, \qquad r_1 = \frac{10}{3}$
(2) $(r_n + r_{n+1}) : (r_n - r_{n+1}) = 13 : 5$이므로
$13(r_n - r_{n+1}) = 5(r_n + r_{n+1})$
$18r_{n+1} = 8r_n, \qquad r_{n+1} = \frac{4}{9}r_n$