

08 지수

수학II 교과서 Review

문제 1

다음 중에서 옳은 것은?

- ① -64 의 세제곱근은 -4 뿐이다.
- ② 256 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 4 이다.
- ③ 0 의 제곱근은 없다.
- ④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 2 개다.
- ⑤ n 이 홀수일 때, -3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

문제 2

2 보다 큰 자연수 a 와 양수 b 에 대하여 $R(a, b)$ 를 $R(a, b) = \sqrt[b]{a}$ 로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 골라라.

—| 보 기 |—

- ㄱ. $R(6, 3) = R(3, \sqrt{3})$
- ㄴ. $R(4, b)R(4, b)R(4, b) = R(4, 3b)$
- ㄷ. $R(a, R(a, b)) = R(a^2, b)$

문제 3

$a > 1$ 일 때, $\sqrt{a \times \sqrt[3]{a \times \sqrt[4]{a}}} = \sqrt[4]{a \times \sqrt[3]{a^k}}$ 을 만족하는 유리수 k 의 값을 구하여라.

문제 4

$a > 0, a \neq 1$ 일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}}{a^{-1} + a^{-3} + a^{-5} + a^{-7} + a^{-9}}$$

08 지수

수학II 교과서 Review

문제 5

세 양수 a, b, c 에 대하여 $a^4 = 3, b^3 = 5, c^2 = 7$ 일 때, $(abc)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

문제 6

$a^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{26}{3}$

② $\frac{13}{3}$

③ $\frac{13}{6}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{6}$

문제 7

$x = 2^{\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x = 2^k$ 이다. 이때 상수 k 의 값을 구하여라.

08 지수

수학II 교과서 Review

문제 8

실수 x, y, z 에 대하여 $2^x = 4^y = 8^z$ 일 때, $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값을 구하여라.

문제 9

이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라고 할 때, $2^\alpha, 2^\beta$ 을 두 근으로 갖고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식의 상수항은?

- ① -24 ② -20 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

문제 10

등대의 조명에서 단위 시간 동안 나오는 빛의 양이 I cd일 때, 등대로부터 x m 떨어진 곳에서 측정되는 빛의 밝기 L lx는 다음과 같다.

$$L = \frac{I \cdot 10^{-kx}}{x^2} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

기상 상태에 따른 k 가 $\frac{3}{1000}$ 일 때, $I = 3 \times 10^5$ 인 등대로부터 1000 m 떨어진 곳에서 측정된 빛의 밝기 L_1 은 등대로부터 2000 m 떨어진 곳에서 측정된 빛의 밝기 L_2 의 몇 배인지 구하여라. (단, cd(칸델라)는 광도의 단위이고, lx(럭스)는 조명도의 단위이다.)

08 지수

수학II 교과서 Review

문제 11

원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 S , 원의 둘레의 길이를 L 이라 하고, 수도관의 기울기를 I 라고 하자. 이 수도관에 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 v 라고 하면

$$v = c \left(\frac{S}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (c \text{는 상수})$$

인 관계가 성립한다. 단면인 원의 반지름의 길이가 각각 a , b 인 원기둥 모양의 두 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각 v_A , v_B 라고 하자. $\frac{v_A}{v_B} = 2$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, 두 수도관 A, B에 대한 상수 c 의 값은 서로 같다.)

문제 12

아인슈타인(Einstein, A.; 1879~1955)이 발견한 식

$$m = m_0 (1 - v^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

은 정지 상태에서 질량이 m_0 mg인 물체가 v m/s의 속도로 움직일 때의 질량 m mg을 구하는 데 사용된다. 정지 상태에서 질량이 8 mg인 입자가 $\frac{9}{5} \times 10^8$ m/s의 속도로 움직일 때의 질량을 구하여라. (단, 상수 c 는 빛의 속도를 나타내고 3×10^8 m/s로 계산한다.)

문제 13

확대 복사를 한 후, 출력된 복사본으로 같은 비율의 확대 복사본을 다시 만든다. 이와 같은 작업을 계속하였더니 5회째의 복사본의 글자 크기가 원본의 2배가 되었고, 7회째의 복사본의 글자 크기는 5회째의 복사본의 $2^{\frac{q}{p}}$ 배가 되었다고 한다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.)

08 지수

수학II 교과서 Review

〈정답 및 해설〉

- ① -64 의 세제곱근은 방정식 $x^3 + 64 = 0$ 의 근이므로 3개이다.
 ② 256의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 4 이다.
 ③ 0의 제곱근은 0이다.
 ⑤ n 이 홀수일 때, -3 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개다.
 정답: ④

- $R(6, 3) = \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{3}} = R(3, \sqrt{3})$
 - $R(4, b)R(4, b)R(4, b) = \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{b^3} = R(4, b^3)$
 - $R(a, R(a, b)) = \sqrt[a]{\sqrt[a]{b}} = \sqrt[a]{b} = R(a^2, b)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- $$(좌변) = (a \times \sqrt[3]{a \times \sqrt[4]{a}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ a \left(a \times a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{17}{24}}$$

$$(우변) = (a \times a^{\frac{k}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{k+3}{12}}$$

$$\frac{17}{24} = \frac{k+3}{12} \text{ 이므로 } k = \frac{11}{2}$$

- 주어진 식의 분모와 분자에 각각 a^{11} 을 곱하면
 (주어진 식) $= \frac{a^{11}(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10})}{a^{10} + a^8 + a^6 + a^4 + a^2} = a^{11}$

- $a^4 = 3, b^3 = 5, c^2 = 7$ 에서 $a = 3^{\frac{1}{4}}, b = 5^{\frac{1}{3}}, c = 7^{\frac{1}{2}}$
 $(abc)^n = 3^{\frac{n}{4}} 5^{\frac{n}{3}} 7^{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}$ 은 모두 자연수이어야 한다. 따라서 이를 만족하는 가장 작은 자연수 n 은 2, 3, 4의 최소공배수인 12이다.

- ③
 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분자, 분모에 각각 a^x 을 곱하면
 $\frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} + 1}$
 $\frac{(a^{2x})^2 - \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x} + 1}$
 $= \frac{3^2 - \frac{1}{3}}{3 + 1} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$

- $x^2 = (2^{\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}})^2 = 2^{\frac{1}{2}} + 2 + 2^{-\frac{1}{2}}$ 이므로
 $x^2 - 4 = 2^{\frac{1}{2}} - 2 + 2^{-\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{4}} - 2^{-\frac{1}{4}})^2$
 그러므로 $\sqrt{x^2 - 4} = \left| 2^{\frac{1}{4}} - 2^{-\frac{1}{4}} \right| = 2^{\frac{1}{4}} - 2^{-\frac{1}{4}}$
 따라서 $\sqrt{x^2 - 4} + x = 2^{\frac{1}{4}} - 2^{-\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}}$
 $= 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}$
 이므로 $k = \frac{5}{4}$

8. 0

9. ③

$$10. L_1 = \frac{(3 \times 10^5) \cdot 10^{-\frac{3}{1000} \cdot 1000}}{1000^2}$$

$$= \frac{3 \times 10^2}{10^6} = 3 \times 10^{-4}$$

$$L_2 = (3 \times 10^5) \cdot \frac{10^{-\frac{3}{1000} \cdot 2000}}{2000^2}$$

$$= \frac{3 \times 10^{-1}}{4 \times 10^6} = \frac{3}{4} \times 10^{-7}$$

$$\text{이므로 } \frac{L_1}{L_2} = \frac{3 \times 10^{-4}}{\frac{3}{4} \times 10^{-7}} = 4 \times 10^3$$

따라서 L_1 은 L_2 의 4000배이다.

- $\frac{v_A}{v_B} = \frac{c \times \left(\frac{\pi a^2}{2\pi a} \right)^{\frac{1}{3}} \times 0.01^{\frac{1}{2}}}{c \times \left(\frac{\pi b^2}{2\pi b} \right)^{\frac{1}{3}} \times 0.04^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{v_A}{v_B} = 2 \text{ 이므로 } \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{3}} = 4$$

따라서 $\frac{a}{b} = 64$

12.

$$m = m_0 (1 - v^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}} \text{ 에서}$$

$$m_0 = 8, v = \frac{9}{5} \times 10^8, c = 3 \times 10^8 \text{ 이므로}$$

$$m = 8 \left\{ 1 - \left(\frac{9}{5} \times 10^8 \right)^2 \times \left(3 \times 10^8 \right)^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 8 \left(1 - \frac{81 \times 10^{16}}{9 \times 10^{16}} \right)^{-\frac{1}{2}} = 8 \left(1 - \frac{9}{25} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 8 \times \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = 8 \times \frac{5}{4} = 10$$

따라서 구하는 질량은 10 mg이다.

13. 7

원본의 글자 크기를 a , 확대 배율을 $r (r > 1)$ 라고 하자.
 n 번째 복사본의 글자 크기를 a_n 이라고 하면

$$a_n = ar^n$$

5번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배이므로

$$a_5 = ar^5 = 2a, r^5 = 2$$

7번째 복사본의 글자 크기는

$$a_7 = ar^7$$

이므로

$$a_7 \div a_5 = ar^7 \div ar^5 = r^2$$

$$= (r^5)^{\frac{2}{5}}$$

$$= 2^{\frac{2}{5}}$$

따라서 $p = 5, q = 2$ 이므로

$$p + q = 5 + 2 = 7$$