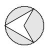
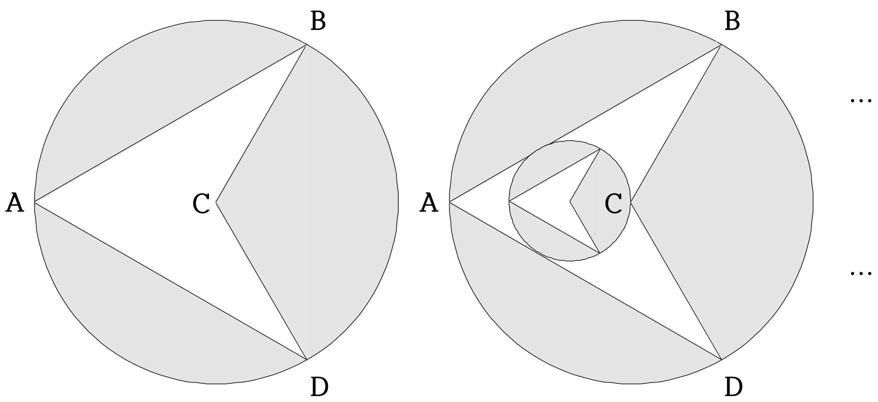
19. 집합 $A=\left\{x \mid \log_4 x^2+4x+3 \le \frac{3}{2}\right\}$, $B=\{x \mid x(x-k)\le 0\}$에 대하여, k에 대한 $n(x \mid x$는 집합 $A\cap B$의 정수인 원소)의 값의 함수를 $g(k)$라 할 때, $g(k)$의 불연속점의 개수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.) [4점]

① 5　　② 4　　③ 3
④ 2　　⑤ 1

1)

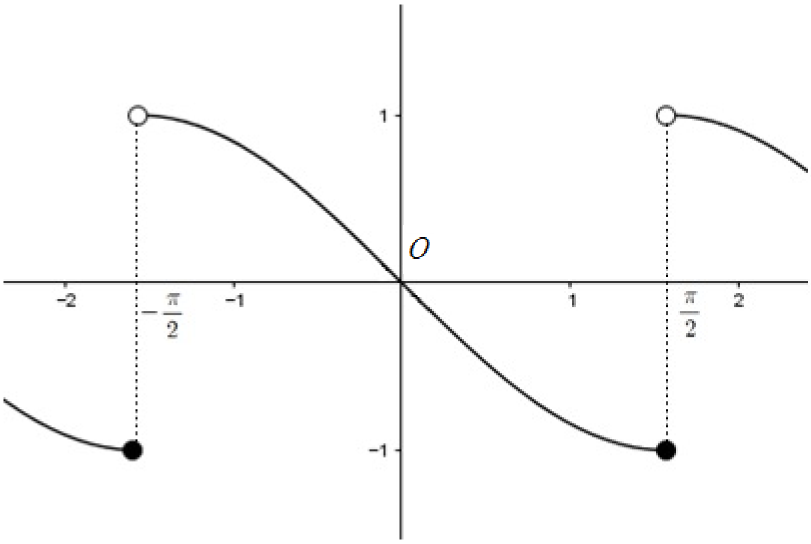
17. 반지름의 길이가 1인 원 C_1이 있다.
그림과 같이 원 C_1에 내접하는 점 C가 원 C_1의 중심에 위치한 $\angle BCD$가 120°이고 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 오목사각형 ABCD를 그린다. 원 C_1의 내부에서 오목사각형 ABCD가 차지하는 부분을 제외한  모양에 색칠하여 얻은 그림을 F_1이라 하자.
다시 오목사각형 ABCD에 내접하는 원 C_2를 그리고, F1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 F_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 F_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{9(\pi-\sqrt{3})}{16}$　　② $\frac{9(2\pi-\sqrt{3})}{16}$　　③ $\frac{9(3\pi-\sqrt{3})}{16}$
④ $\frac{3(\pi-\sqrt{3})}{4}$　　⑤ $\frac{3(2\pi-\sqrt{3})}{4}$

2)

16. 함수 $f(x)=-\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$이고, $f(x)=f(x+\pi)$이다. $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f'(0)=-1$

ㄴ. $[-1,1]$에서 $f(x)+x=0$의 근의 개수는 1개이다.

ㄷ. $f(x)$와 $y=tx$의 교점의 개수의 t에 대한 함수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3)

21. 실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여,

$\int_{-1}^{g(x)} f(t)dt = h(x)\ln x$ 일 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 다음의 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x \to e} \dfrac{g(x)-1}{x-e} = \dfrac{1}{2e}$
(나) $\int_{g(1)}^{1} f(t)dt = g(e)$
(다) $y = \lvert g(x)-h(x) \rvert$는 $x=e$에서 미분 가능하다.

이 때, $f(1)g(1)$의 값을 구하시오. (단, $f(x)=0$는 실근을 가지지 않는다.)

① -3　② -6　③ 3　④ 6　⑤ 9

4)

30. 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=\int_{x}^{2x} tg'(t)dt$라 하자. $f(x)$와 $g(x)$는 다음의 조건을 만족한다.

(가) $2^{n+1} = \int_{4}^{2^{n+1}} tg(\frac{1}{2}t)dt + 4$ (n은 자연수)
(나) $g(2^k) = \dfrac{1}{k+1}$ (k는 자연수)
(다) $f'(2^x) = f'(2^{7-x})$이고 $f(8\sqrt{2})=1$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{127}{2}} xg(2x+1)dx$의 값을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

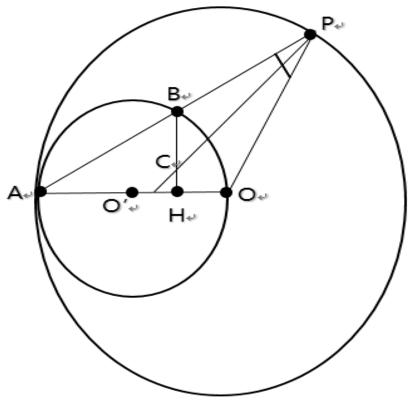
5)

16. $f(x)=e^x$위의 한 점 (t, e^t)에서 그은 접선과 $f(x)$, 그리고 $x=-\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0} \dfrac{g(t)}{t}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{5}$　⑤ $\dfrac{1}{6}$　6)

28.

중심이 각각 O, O′인 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1의 반지름은 2이고 원 C_2는 C_1위의 점 A에서 C_1과 내접하고 점 O를 지난다. $\angle \mathrm{APO}=\theta$를 만족하도록 점 P를 원 C_1위에 잡는다. 선분 AP와 원 C_1과의 교점을 B, B에서 선분 AO로의 수선의 발을 H라 하자. 각 $\angle \mathrm{APO}$의 이등분선과 선분 BH의 교점을 C라 할 때, 삼각형 BCP의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. 이때, $40\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단}, 0<\theta \le \frac{\pi}{4}\text{이다.}\right)$ [4점]



7)

7번째 문항 세 번째줄 C_1을 C_2로 정정합니다 ^^;

<정답 및 해설>

1)
먼저, 집합 A에 해당하는 부등식의 범위를 구한다.

ⅰ) $x^2+4x+3>0$
$x<-3 \text{ or } x>-1$ (진수조건)

ⅱ) $x^2+4x+3 \le 8$
$-5 \le x \le 1$

ⅰ)과 ⅱ)의 공통 범위를 구하면,
$-5 \le x < -3 \text{ or } -1 < x \le 1$이다.

집합 B에 해당하는 부등식의 범위는
$0 \le x \le k$이다.

k에 대한 $n(x|x\text{는 집합 } A\cap B\text{의 정수인 원소})$의 값의 함수인 $g(k)$를 그려보면, 불연속점의 개수는 3개임을 알 수 있다. (그래프 그리는 법을 잘 몰라서 그래프는 생략...양해 부탁드립니다.)

정답: 3번

2) 두 번째 그림의 사각형 ABCD 안에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하고, 그의 중심을 O라 하자.

$\overline{AO}=2r$ 이고 $\overline{AC}=3r=1$

$\therefore r=\frac{1}{3}$이고 공비는 $\frac{1}{9}$이다.

첫항은 $\pi-2\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$$\therefore \frac{\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9(2\pi-\sqrt{3})}{16}$$

정답: 2번

3) ㄱ. $f'(0)=-\cos 0=-1$ 참

ㄴ. $f(x)$와 $-x$의 교점의 개수는 하나이다. 참

(변곡접선)

ㄷ. $\lim_{t\to -1+0} h(t)=3$

$\lim_{t\to -1-0} h(t)=1$ (ㄴ선지와 연계) 따라서 불연속이다. X

$h(-1)=1$

정답: 3번

4) $\int_{-1}^{g(x)} f(t)dt=h(x)\ln x$의 양 변을 미분하자.

$g'(x)f(g(x))=h'(x)\ln x+\frac{h(x)}{x}\cdots$ ①

①에 x=e를 대입하면

$g'(e)f(g(e))=h'(e)+\frac{h(e)}{e}$

(가)에서 $g(e)=1, g'(e)=\frac{1}{2e}$

(나)에서 $\int_{g(1)}^{1} f(t)dt=\int_{g(1)}^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^{1} f(t)dt=0+\int_{-1}^{1} f(t)dt\cdots$ ①

$\int_{-1}^{1} f(t)dt=g(e)=h(e)=1$ (준식에 e 대입)

(다)에서 $g'(e)=h'(e)=\frac{1}{2e}$

$\therefore \frac{1}{2e}f(1)=\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{2e}$

$\therefore f(1)=3$

이제 $g(1)$을 구하자.

①에서 이용했듯이, $\int_{-1}^{g(1)} f(t)dt=h(1)\ln 1=0$

$f(x)=0$은 실근이 존재하지 않고, $\int_{-1}^{1} f(t)dt=g(e)=1>0$이다.

$\therefore$ 그래프 개형은 x축과 만나지 않고, x축 위에 항상 양인 상태로 존재하게 된다.

$\therefore g(1)=-1$ 일 수 밖에 없다.

정답: 2번

$\therefore f(1)g(1)=-3$

5) $2x+1=t$로 치환적분하면,

구하는 식은 $\frac{1}{2}\int_{2}^{128}\frac{t-1}{2}g(t)dt= \frac{1}{4}(\int_{2}^{128}tg(t)dt-\int_{2}^{128}g(t)dt)\cdots$①

(가)의 식을 역시 치환적분하여 정리하면, $\int_{2}^{2^n}sg(s)ds=2^{n-1}-1$이다.

$\int_{2}^{2^7}sg(s)ds=63\cdots$②

준식을 부분적분하면,

$2xg(2x)-xg(x)-\int_{x}^{2x}g(t)dt=f(x)$이다.

이 식의 양변에 2, 4, 8, 16, 32, 64를 차례대로 대입하여 양변을 모두 더하여 정리하면,

$\int_{2}^{128}g(t)dt=128g(128)-2g(2)-(f(2)+f(4)+\cdots+f(64))$

$g(128)$은 (나)에 의하여 $\frac{1}{8}$이고, $g(2)$역시 (나)에 의하여 $\frac{1}{2}$이다.

(다)에 의하여, $f(2^x)$는 $(\frac{7}{2},1)$에 점대칭이게 되고,

$f(2)+f(4)+\cdots+f(64)$는 양끝 두 개씩 더하면 각각 2가 되어 $2\times3=6$이 된다.

따라서 $\int_{2}^{128}g(t)dt=16-1-(2\times3)=9\cdots$③ 이다.

①에 ②와 ③을 대입하면 $\frac{27}{2}$이다.

$\therefore p+q=29$

6) 접선의 방정식을 구하면, $y=e^tx-te^t+e^t$

x절편의 값은 $x=t-1$

$$g(t)=\int_{-\ln2}^{t}e^xdx-\frac{1}{2}\times1\times e^t$$

$$=e^t-e^{\ln\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^t$$

$$=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}(e^t-1)}{t}=\frac{1}{2}$$

정답: 1번

7) B에서 $\overline{AO}$와 평행한 직선을 긋고 그 직선에 P에서 내린 수선의 발을 p'이라 하자.

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BP'}$

ⅰ) $\overline{BC}$를 구한다.

각 APO의 이등분선과 선분AO와의 교점을 Q라 하자.

$\overline{BC}=\overline{BH}-\overline{CH}=\overline{BH}-\overline{QH}tan\frac{3}{2}\theta$
$\overline{BH}=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$

$\overline{AP}:\overline{PO}=4\cos\theta:2=\overline{AQ}:\overline{QO}$

$\overline{AQ}=2\times\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1}$
$\therefore\overline{QH}=\overline{AH}-\overline{AQ}=2\cos^2\theta-\frac{4\cos\theta}{2\cos\theta+1}$
$\therefore\overline{BC}=\sin2\theta-\tan\frac{3}{2}\theta(2\cos^2\theta-\frac{4\cos\theta}{2\cos\theta+1})$

ⅱ) $\overline{BP'}$을 구한다.

$2\cos\theta\times\cos\theta=2\cos^2\theta$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos^2\theta\left\{\sin2\theta-\tan\frac{3}{2}\theta(2\cos^2\theta-\frac{4\cos\theta}{2\cos\theta+1})\right\}$이다.

$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=2-\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$

$\therefore 40\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=40$

이상 7문항 완료.
7문항 해설 완료.