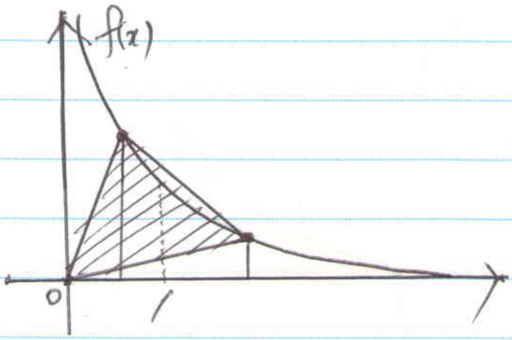
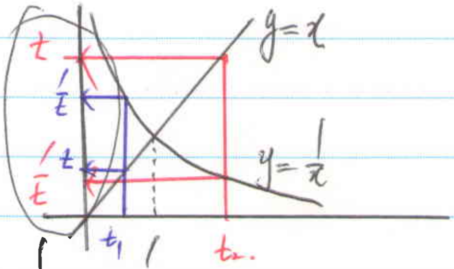
$S(t)$라는 함수에 대해 분석해보자.

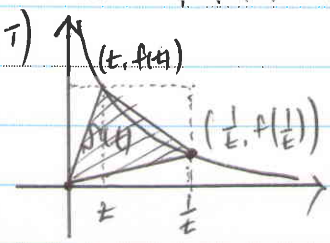


$S(t)$의 식은 t가 1이 되는 지점으로 바뀌게 된다.



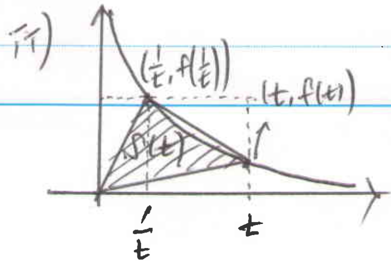
$y=x$ 와 $y=\frac{1}{x}$ 의 교점인 (1, 1)을 기준으로
t가 1보다 작을때인 t_1, 클때인 t_2일때 y축상의
두함숫값의 차례가 반대가 되는 것으로 이를 설명할 수 있다.
따라서, $S(t)$는 $0<t<1$, $t\geq 1$ 과같이 범위를 나누어서
정의해 주어야 한다.

i)



$0<t<1$ 인경우, $t<\frac{1}{t}$ 이다.
$0<t<1$ 인경우 $S(t)$를 편의상 $S_A(t)$라 하자.
계산해보면, $S_A(t)=\frac{1}{2t}f(t)-\frac{t}{2}f(\frac{1}{t})$이다.

ii)



$t\geq 1$ 인 경우, $\frac{1}{t}\leq t$ 이다.
역시 이범위에 해당하는 $S(t)$를 $S_B(t)$라하자.
$S_B(t)=\frac{t}{2}f(\frac{1}{t})-\frac{1}{2t}f(t)$ 이다.

$S_A(t) = S_B\left(\frac{1}{t}\right)$ 임을 알 수 있다.

∴ $S_A'(t) = -\frac{1}{t^2} S_B'\left(\frac{1}{t}\right)$ 이다.

↓

$$-t^2 S_A'(t) = S_B'\left(\frac{1}{t}\right)$$

∴ $-\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 S'(x)\,dx + \int_{1}^{2} S'\left(\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_{1}^{2} S_B'\left(\frac{1}{x}\right)dx$ 로 정리된다.

* 앞서 계산해 놓은 바와 같이, $S_B(x) = \frac{x}{2}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x}f(x)$

$= \frac{1}{2}\left(xf\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{f(x)}{x}\right)$ 이다.

∴ $S_B'\left(\frac{1}{x}\right)$은 $\frac{1}{2}\left\{f(x) - xf'(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - xf'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$ 이다.

$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \underbrace{f(x) - xf'(x)}_{①} + \underbrace{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - xf'\left(\frac{1}{x}\right)}_{②} dx = \frac{q}{p}$ 가 된다. (p, q 는 서로소 자연수)

① (가) 조건에서 $g(t) = f(t) - tf'(t)$ 이다.

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} g(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(t) - tf'(t)\,dt = \frac{4}{3}\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

∴ $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) - xf'(x)\,dx = \frac{4}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2$

중요도 □ □ □ 재복습 1st 2nd 3rd

② $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \underbrace{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}_{㉠} - \underbrace{x f'\left(\frac{1}{x}\right)}_{㉡} dx$

㉠ $\frac{1}{x}=t$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$\therefore$ ㉠ $= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt$.

㉡ $\frac{1}{x}=t$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

$\therefore$ ㉡ $= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f'(t)}{t^3} dt$.

이를 ~~적~~ 부분적분 하면,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f'(t)}{t^3} dt = \left[\frac{f(t)}{t^3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + 3\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt$$

$$= -8f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}f(2) + 3\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt.$$

$\therefore$ ㉠ $-$ ㉡ $= 8f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}f(2) - 2\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt$.

(다)에서 $S(2)=\frac{7}{8}=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}f(2)$ 이고,

$f(2)=\frac{1}{2}$ 이므로, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ 이다.

(가)에서 $\int_{k}^{2k} \frac{f(t)}{t^4} dt = \frac{1}{2}k$ (k는 양의 유리수)

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t^4} dt = \frac{1}{4}$, $\int_{1}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt = \frac{1}{2}$

둘을 더하면 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(t)}{t^4} dt = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ② $= 8\times 1 - \frac{1}{8}\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{3}{4} = \frac{103}{16}$

$\rightarrow \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) - xf'(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - xf'\left(\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{103}{16}\right) = 1 + \frac{103}{32} = \frac{135}{32}$

$\therefore p+q = \cancel{167}$

에고...

내돈 ㅠㅠ

2016. 7. 27 p.m. 7시 26분

프갤렁 올림