29. 미분가능한 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x>0) \\ h(x) & (x \le 0) \end{cases}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 다항함수이다. (나) $x>0$이면, $\log_{g'(x)} g(x)$는 항상 자연수이다. (다) 임의의 실수 x_1, x_2에 대해 $x_2<0, x_1<0$이면, $\dfrac{x_1}{h(x_1)-h(0)}=\dfrac{x_2}{h(x_2)-h(0)}$을 만족한다.

$y=f(x)$의 x절편이 최댓값을 가질 때, $\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\dfrac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소이다.)

먼저 $f(x)$가 미분가능하므로, $g(0)=h(0)$, $g'(0)=h'(0)$임을 알 수 있습니다.

그 다음 (나) 조건을 보면, $x>0$에서 $\log_{g'(x)}g(x)$이 항상 자연수라고 합니다.
$\log_{g'(x)}g(x)=k$라고 해보겠습니다. (물론 k는 자연수입니다.)
$g(x)=\{g'(x)\}^k$라 할 수 있고, 진수 조건에 의해, $g'(x)>0$, $g'(x)\neq 1$, $g(x)>0$임을 알 수 있습니다.

$g(x)=\{g'(x)\}^k$인데 $g(x)$는 다항함수이므로, $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots$이라 하면, $g'(x)$의 최고차항 차수는 $n-1$이라고 할 수 있습니다. 즉, $n=k(n-1)$ 입니다. 그런데 k,n은 모두 자연수이므로, 대입을 해보면,
ⅰ) $n=1$일 때, $1=0$ 모순
ⅱ) $n=2$일 때, $2=k$ 일단 만족
ⅲ) $n\geq 3$일 때, $\dfrac{n}{n-1}=k$인데, k를 자연수로 만드는 n이 존재하지 않으므로, 성립하지 않습니다.

따라서 $g(x)$는 이차함수입니다.

위 결과에 의해, $g(x)=\{g'(x)\}^2$이고, $g'(x)>0$이므로, 양변을 미분해주면, $g'(x)=2g'(x)g''(x)$이므로, $g'(x)\neq 0$이면, $g''(x)=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$g'(x)=\dfrac{1}{2}x+a$ $(x>0)$ 그런데 이 조건에다가 $g'(x)\neq 1$이므로, $a\geq 1$임을 알 수 있다.
$g(x)=\dfrac{1}{4}x^2+ax+b$ $(x>0)$인데, $g'(x)>0$이므로, $g(x)$는 증가함수입니다. 따라서 진수조건을 만족시키려면 $g(0)\geq 0$이어야 합니다. $b\geq 0$
마지막으로, $g(x)=\{g'(x)\}^2$임을 이용해 관계식을 구하면 $a^2=b$임을 알 수 있습니다.

다음으로, (다) 조건을 살펴보면, $\dfrac{x_1}{h(x_1)-h(0)}=\dfrac{x_2}{h(x_2)-h(0)}$이라고 되어 있는데, 이것의 역수를 취해보면, $\dfrac{h(x_1)-h(0)}{x_1}=\dfrac{h(x_2)-h(0)}{x_2}$입니다. 즉, $(x_1,h(x_1))$과 $(0,h(0))$사이의 기울기와 $(x_2,h(x_2))$와 $(0,h(0))$사이의 기울기가 항상 같다는 의미입니다. 이것이 $x<0$에서 항상 만족하려면, $h(x)$는 일차함수일 수 밖에 없습니다.

$g(0)=h(0)$, $g'(0)=h'(0)$이므로, $h(x)=ax+b$입니다.

$g(x)>0$이므로, x절편은 $h(x)$에서 가질 수 밖에 없습니다.

x절편은 $-\dfrac{b}{a}$ 즉, $-a$가 됩니다. 앞전에서, $a \geq 1$임을 구했으므로, x절편의 최댓값은 -1임을 알 수 있습니다. 따라서 $a=1, b=1$입니다.

$\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|dx$의 값을 구하면,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2+x+1 & (x>0) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$ 이므로,

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^2+x+1dx+\int_{-1}^{0} x+1dx+\int_{-2}^{-1} -x-1dx=\left(\frac{1}{12} \cdot 2^3+\frac{1}{2} \cdot 2^2+2\right)+1=\frac{17}{3}$$

따라서 구하고자 하는 $p+q$의 값은 $17+3=20$이다.