38. 2012학년도 9월 모의평가 가형 30번

자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는
가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

> (가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n,\ 2^n)$ 이다.
> (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 $(x,\ y)$ 중에서 x 가 자연수이고,
> $y=2^x$ 을 만족시키는 점은 3 개뿐이다.

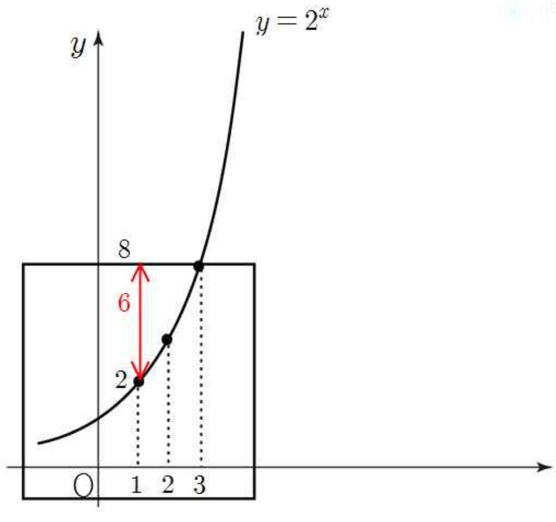
예를 들어 $a_1=12$ 이다. $\sum_{k=1}^{7} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

두 조건을 이용해서 a_n을 구해야 한다. a_1을 예시로 줬기 때문에 n에 1을 대입해서
12 가 맞는지 우선적으로 확인해보자.

구하는 것이 $\sum_{k=1}^{7} a_k$ 이기 때문에 a_n의 일반항을 한 번에 구하기보다는 n에 $1, 2, 3$ 등을
차례로 대입해서 귀납적으로 추론해 나가는 방법을 우선적으로 생각해야 한다.

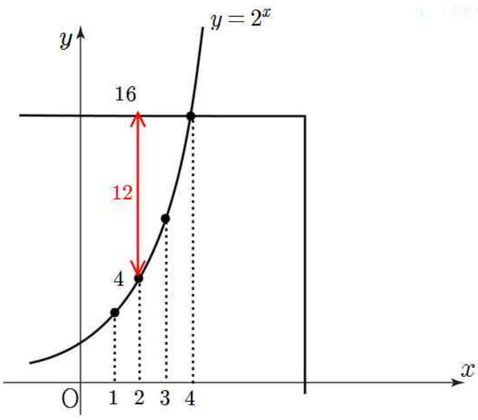
[의사소통능력]

$n=1$을 대입해서 12가 맞는지 확인해 보자. (의사소통작업)

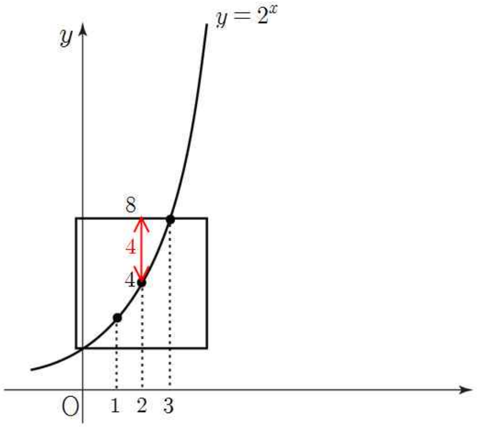


n에 1을 대입하면 **'조건 (가)'**에 의해 정사각형의 정 중앙에 있는 점이 $(1,\ 2)$이다.
그리고 추가로 점 $(2,\ 4)$와 $(3,\ 8)$을 포함해야 한다. 이렇게 형성될 수 있는 정사각형
중에서 가장 작은 정사각형은 윗변이 점 $(3,\ 8)$을 지날 때이다.
그러므로 한 변의 길이는 8−2=6 의 2배인 12가 맞다.

[문제해결력]
(그래프 이용)

<table>
<tr>
<td>

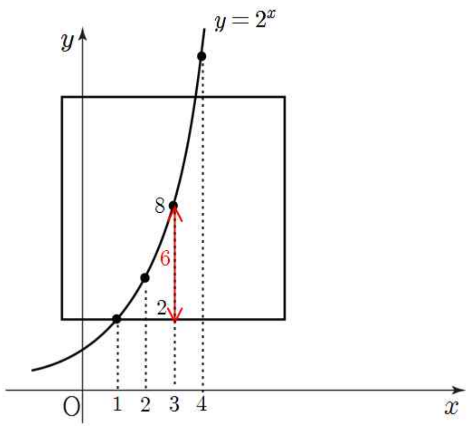
〈그림1〉



〈그림2〉</td>
<td>n에 2부터 7까지 대입하는 것을 두려워 말고 2를 집어넣자. 정사각형의 중심은 $(2,\ 4)$가 된다. 왼쪽 그림을 통해 확인해 보자.

우선, 그림1을 보자. 그림1에 정사각형은 중심이 $(2,\ 4)$고 $(3,\ 8)$과 $(4,\ 16)$을 두 점으로 가지며 한 변의 길이가 $2\times(16-4)=24$인 사각형이다. 그러나 이 사각형은 $(1,\ 2)$을 포함 할 수 밖에 없으므로 문제의 조건에 맞지 않다.

그래서, 시선을 돌려, 그림2의 정사각형은 중심이 $(2,\ 4)$고 $(3,\ 8)$과 $(1,\ 2)$을 두 점으로 가지며, 한 변의 길이가 최소이므로 주어진 조건에 부합하는 사각형이다. 따라서 한 변의 길이는

$2\times(8-4)=8$이다. 그러므로 $a_2=8$ 이다.</td>
<td>[문제해결력]
(그래프 이용)</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>n에 3을 대입해보자. 정사각형의 중심은 $(3,\ 8)$이 된다. 만약 나머지 두 점 중 하나가 $(4,\ 16)$이 된다면 위의 그림1과 같고 정사각형의 한 변의 길이가 16이 되므로 $(1,\ 2)$가 자동으로 포함된다. 따라서 문제의 조건에 맞지 않는다. 따라서 중심이 $(3,\ 8)$이고 나머지 두 점이 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 4)$인 왼쪽그림의 정사각형 이문제의 조건에 부합한다.

그러므로 $a_3=2\times(8-2)=12$이다.</td>
<td>[문제해결력]
(그래프 이용)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">n에 4를 대입해보자. 중심은 $(4,\ 16)$이다. 나머지 두 점을 결정해야 하는데, 만약 $(5,\ 32)$가 포함된다면 정사각형의 한 변의 길이가 무려 32가 된다. 따라서 $(1,\ 2)$부터 모든 점을 포함하게 되므로 문제의 조건에 맞지 않다. 따라서 정사각형 내부의 세 점은 $(2,\ 4)$, $(3,\ 8)$, $(4,\ 16)$이 된다.</td>
<td>[문제해결력]

[추론능력]</td>
</tr>
</table>

그러므로 한 변의 길이는 $a_4 = 2 \times (16 - 4) = 24$이다.	
이제부터는 일반화를 해도 된다. 왜냐하면 n에 5를 대입하면 중심은 $(5,\ 32)$가 되는데, 만약 다음 점인 $(6,\ 64)$를 포함한다면 정사각형의 한 변의 길이가 64가 돼서 $(1,\ 2)$부터 모든 점을 포함할 수밖에 없기 때문이다. 따라서 $(n,\ 2^n)$이 중심인 정사각형 중에서 가장 작은 정사각형은 두 점 $(n-2,\ 2^{n-2})$, $(n-1,\ 2^{n-1})$을 포함한다. 그러므로 한 변의 길이 $a_n = 2 \times (2^n - 2^{n-2})$ 이다. $\therefore$ 구하는 값 $\sum_{k=1}^{7} a_k$ 은 $12 + 8 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 = 392$이다. Comment : 평가원은 2^x을 좋아한다. 2배씩 커지다보니 $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}$ 이 항상 성립하며, 이 문제 역시, 정사각형의 길이를 $n = 3$ 부터 위로 잡는 순간 아래쪽에 있는 좌표들까지 모두 정사각형안에 들어가는 것이 확인될 것이다.	[추론능력] [계산능력]