1. ebs 수능완성 p.79 20번문제

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $f(1)=1, f(2)=0$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 (0, 2)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1번 해설

ㄱ. $f(-x)=-f(x)$는 기함수를 의미하며, x에 대해 홀수차항만 가지며, 상수항이 없어야 되기 때문에 $f(0)=0$이 됩니다.

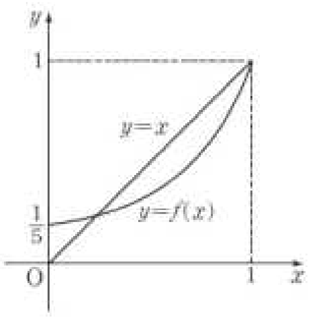
ㄴ. 함수 $f(x)$는 다항함수이기 때문에 $[0,2]$에서 연속이고, $(0,2)$에서 미분가능입니다. 평균값정리 적용하여, $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{0-0}{2}=f'(x)$를 만족하는 x가 (0,2)에서 적어도 하나 이상 존재합니다.
따라서 참입니다.

ㄷ. 두 개의 실근을 가지냐고 물었는데, 그러면 구간을 2개를 잡아서 평균값정리를 이용해야 합니다.
일단 $f(x)$는 $[-1,0]$에서 연속이고, $(-1,0)$에서 미분가능하므로 (다항함수이기 때문) $\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{0+f(1)}{1}=1=f'(x)$를 만족하는 x가 $(-1,0)$에 적어도 하나 이상 존재합니다.
$f(x)$는 $[0,1]$에서 연속이고, $(0,1)$에서 미분가능하므로, $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1=f'(x)$인 x가 $(0,1)$에 적어도 하나 이상 존재합니다.
따라서 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 가지며 참입니다.

답 5번입니다.

2. 2006 가형 9월 평가원 미분과적분 28번

오른쪽 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (4점)



보기
ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린 구간 $(0,1)$에 존재한다.
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=1$
ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가 열린 구간 $(0,1)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 열린 구간 (0,1)에서 $f'(c)=\frac{4}{5}$가 되는 c가 존재하는지 확인한다.

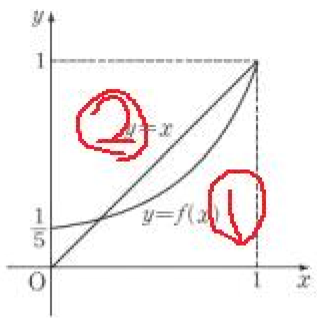
$[0,1]$에서 $f(x)$는 연속이고 $(0,1)$에서 $f(x)$는 미분가능하므로 평균값정리를 적용할 수 있습니다.

평균값 정리에 의해 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-\frac{1}{5}}{1}=\frac{4}{5}=f'(c)$가 되는 c가 (0,1)에 존재하므로 참입니다.

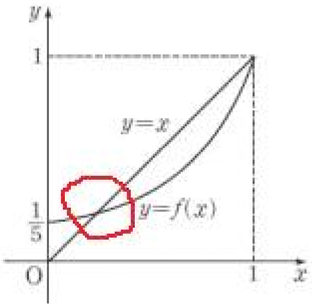
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx=$ 1번 체크 넓이

$\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=$ 2번 체크 넓이

1번 + 2번 = 정사각형 넓이이므로 ㄴ은 참입니다.



ㄷ. 열린구간 (0,1)에서 $g'(x)=1$인 x가 존재하는지 확인한다.



일단 [0 ,1] 에서 $f(x)$는 연속이고 $g(x)=f(f(x))$를 살펴야 되는데 $f(x)$는 다항함수이므로 $g(x)$는 [0,1]에서 연속이고 (0, 1)에서 미분가능입니다.
 따라서 평균값정리를 적용할 수 있습니다.
구간을 (0,1)로 잡으면, $\frac{f(f(1))-f(f(0))}{1-0}$을 구해야 하는데 $f(f(0))=f(\frac{1}{5})$이고 알 수가 없습니다.

 따라서 위의 그래프의 빨간원으로 표시한 점을 구간으로 잡아서 살펴야 합니다.
빨간원으로 표시한 점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이며, (a,a)로 둘 수 있습니다.
구간 $[a,1]$에서 연속이고, $(a,1)$에서 미분가능하므로,
 평균값정리에 의해 $\frac{f(f(1))-f(f(a))}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}=1=g'(x)$인 x가 존재합니다.
따라서 ㄷ은 참입니다.

답은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 5번입니다.