SPC (Special Problems for Champions)

이과 공개 문항 For 2017 (1st)

정답 및 해설

이과정답

1. 26 2. 95 3. 48

해설은 각자가 작업한 이후 통일 작업이전단계입니다.

궁금하신 점은 쪽지나 댓글로 문의바랍니다.

이과 1번 - SPC. 미천수

해설)

실수 전체에서 연속인 함수 $g(x)=\ln f(x)$에서
$g(x)$는 실수전체에서 정의된 함수이어야 한다.
$g(x)$가 실수전체에서 정의된다는 말에서 $\cdots$ $f(x)>0$

각 조건을 통해 알 수 있는 사실을 따져보자.
(가) $g(x)=g(-x)$에서 $f(x)$ 역시 우함수가 되어야 한다.

<조건>최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 의하여
$f(x)=x^4+ax^2+b$이라 할 수 있고 그래프의 개형은
아래와 같이 두 가지가 나올 수 있다.

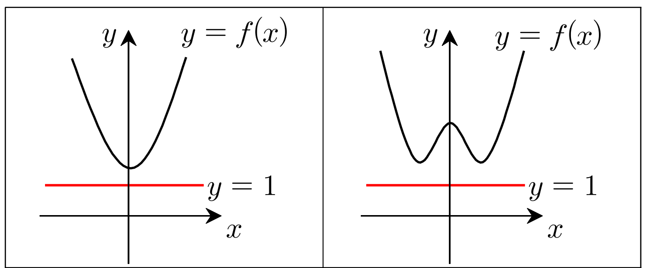


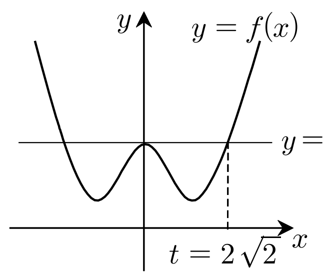
그림 1 그림 2

우선 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)>0)$이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 극값을 갖는 x값이 같음을 알 수 있다.

또한 $x\to\infty$ 일 때, $f(x)\to\infty$이고, $g(x)\to\infty$
$x\to-\infty$ 일 때, $f(x)\to\infty$이고, $g(x)\to\infty$

이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 같은 그래프의 개형을 가짐을 알 수 있다.
(곡선을 증가와 감소의 입장에서만 생각해보면 같은 그래프이다. 물론 곡선의 요철은 다른 그래프가 될 것이다.)

조건 $|g(x)-g(t)|$가 미분이 가능하지 않은 x의 개수를 $h(t)$와
(다) $\lim\limits_{t\to2\sqrt{2}-}h(t)=4$, $\lim\limits_{t\to2\sqrt{2}+}h(t)=2$에서
이를 만족하기 위해 그림은 <그림2>로 확정됨을 알 수 있다.



즉, $f(x)-k=x^2(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$
$\Leftrightarrow$ $f(x)=x^4-8x^2+k$이다.

(나) $g(x)\geq0$
- 이를 만족하기 위해서 $f(x)\geq1$이어야 하고
  우리가 구하고자 하는 $f(3)$의 값이 최소가 되기 위해서는
  $f(x)$의 극솟값이 $y=1$과 접해야 한다.
  ($f(3)$이 최소가 되는 상황은 $f(x)$의 그래프가 최대한 내려와 있는 상황이다.)
- 즉, $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$이므로
  $f(2)=1$인 순간에 $f(3)$은 최솟값을 가진다.
  그러므로 $k=17$이고 $f(3)$의 최솟값은 26이다.

이과 2번 - SPC. 미천수

해설)

(가) 조건에서

$h'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + f'(x)\cos x - f(x)\sin x$이므로

$h'(n\pi) = (n\pi)^2\cos n\pi + f'(n\pi)\cos n\pi = 0$

$\Leftrightarrow\ f'(n\pi) = -(n\pi)^2$이다.

$f(x)$는 삼차함수 이므로 $f'(n\pi) = -(n\pi)^2$이 모든 자연수 n에 대해서 성립하기 위해서는 $f'(x) = -x^2$이다.

또한 $h(0) = 0$이므로 $f(0) = 0$ 즉, $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$

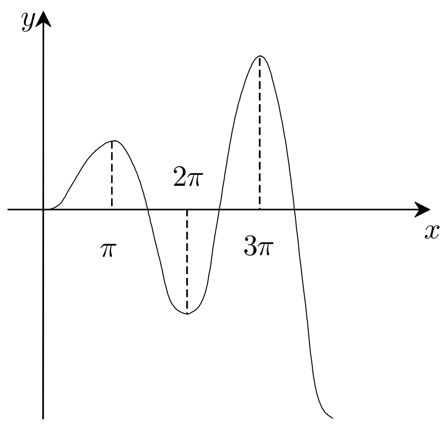
즉, $h(x) = x^2\sin x - \frac{1}{3}x^3\cos x$이고

$$h'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - x^2\cos x + \frac{1}{3}x^3\sin x$$

$$= 2x\sin x + \frac{1}{3}x^3\sin x$$

$$= x\left(2+\frac{1}{3}x^2\right)\sin x \quad (x>0)$$

이므로 $y=h(x)$는 다음 그림과 같은 그래프의 개형이다.
(물론 실제로는 훨씬 가파른 그래프가 그려지지만 지면상 이 정도로 표현하기로 한다.)



$g(x)$는 미분가능하며 (나)조건에 의하여 증가해야 한다.

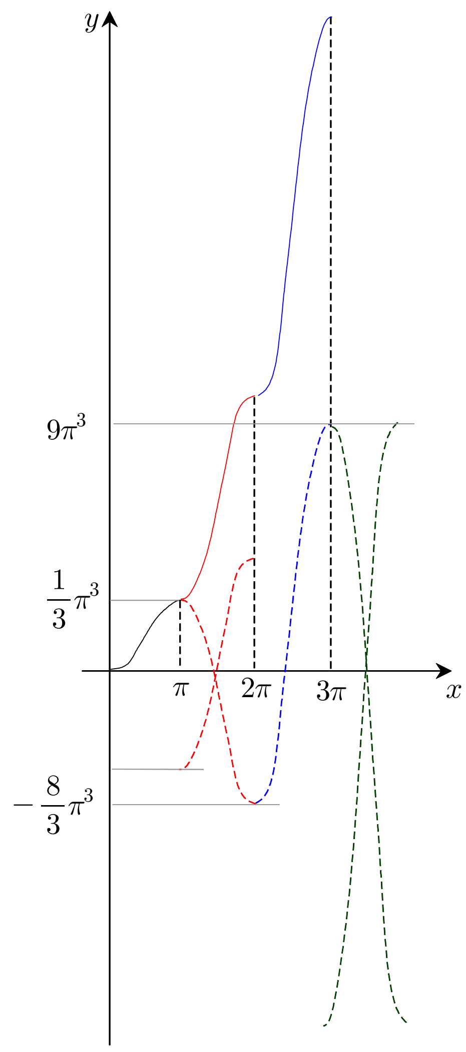
(다) 조건 구간 $[(n-1)\pi, n\pi)$에서 $g(x) = h(x) + a_n$ 또는 $g(x) = -h(x) + a_n$이다.

에 의하여

$n=1$일 때, $a_1 = 0$이므로 $0 \le x < \pi$

$g(x) = h(x)$ 또는 $g(x) = -h(x)$이다.
그런데 $g'(x) \ge 0$이므로 $g(x) = h(x)$이다.

$n=2$일 때부터 미분가능하고 증가하려면 다음과 같은 그래프의 상황을 만족해야 한다.



$g(x) = h(x) + a_1 \quad (0 \le x < \pi)$

$g(x) = -h(x) + a_2 \quad (\pi \le x < 2\pi)$

$g(x) = h(x) + a_3 \quad (2\pi \le x < 3\pi)$

$g(x) = -h(x) + a_4 \quad (3\pi \le x < 4\pi)$

함수가 변하는 지점에서 $h(x)$는 극점이므로 연속이 되면 그 지점에서 미분이 가능해진다.

문제의 조건에서 $a_1 = 0$

$$h(\pi) = -h(\pi) + a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$-h(2\pi) + a_2 = h(2\pi) + a_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{3}\pi^3 + \frac{2}{3}\pi^3 = -\frac{8}{3}\pi^3 + a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad a_3 = 6\pi^3$$

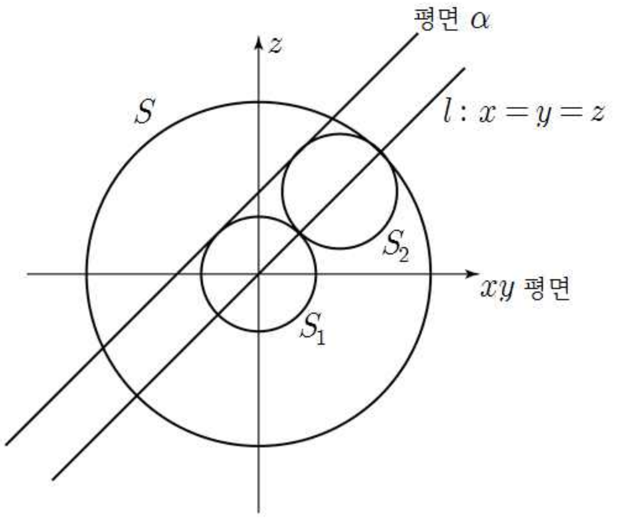
$$h(3\pi) + a_3 = -h(3\pi) + a_4 \quad \Leftrightarrow \quad 9\pi^3 + 6\pi^3 = -9\pi^3 + a_4$$

$$\Leftrightarrow \quad a_4 = 24\pi^3$$

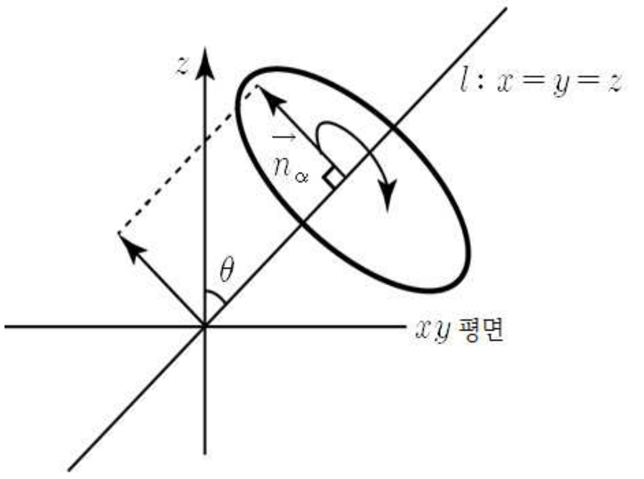
이므로 $a_2 + a_3 + a_4 = \frac{92}{3}\pi^3$

이과 3번 - 퓨에르

주어진 상황을 잘 살펴보면 다음과 같다.



구 S_1와 S_2에 동시에 접하는 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n_\alpha}$ 라 하자. 이 때 $\vec{n_\alpha}$ 는 직선 $x=y=z$ 에 수직한 채로 회전한다.



($\vec{n_\alpha}$가 회전하는 상황을 그림에 표시)

또한 직선 l의 방향벡터는 $(1,1,1)$이고, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이다. 직선 l과 xy 평면의 법선벡터가 이루는 각 θ는

$\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\theta=1,$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

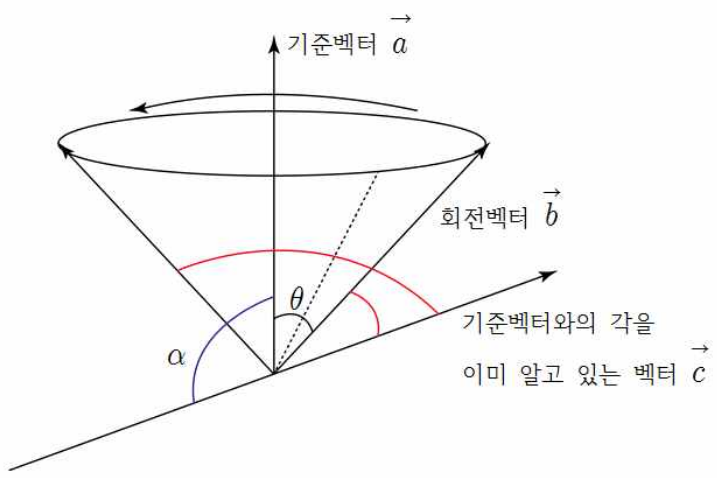
그리고 직선 l과 $\vec{n_\alpha}$ 은 90°를 이루는 상태이다. 즉, xy평면과 $\vec{n_\alpha}$이 이루는 각도가 $90^\circ-\theta$ 일 때, 내적이 최대이다.

평면 α와 구 S의 중심 간의 거리는 $\sqrt{3}$이다. 즉, 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 단면(원) 의 반지름은 $2\sqrt{6}$이며 그 넓이는 24π이다. 즉 α평면과 구 S가 만나 생기는 단면의 xy평면으로 정사영 넓이의 최댓값은

$24\pi\cdot\cos(90^\circ-\theta)=24\pi\cdot\sin\theta=\dfrac{24\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi=p\pi$

$\therefore \dfrac{p^2}{8}=\dfrac{24\cdot 24\cdot 2}{3\cdot 8}=48$

*Tip (공간 도형의 회전)



기준벡터 $\vec{a}$ 와 회전벡터 $\vec{b}$가 항상 이루는 각을 θ라고 하고, $\vec{a}$와의 각이 α인 또 다른 벡터 $\vec{c}$ 가 있다고 하자. 이 때, 벡터 $\vec{b}$와 벡터 $\vec{c}$의 각도의 최대, 최소는 두 벡터가 같은 평면에 있을 때 구할 수 있다.