SPC (Special Problems for Champions)

이과 공개 문항 For 2017 (1st)

정답 및 해설

이과정답

1	26	**2**	95	**3**	48	**4**	12	**5**	9
6	720	**7**	17						

문제에 대한 문의사항은

초성민

퓨에르

미천한수학자에게 쪽지나

댓글로 남겨주시기 바랍니다.

감사합니다.

이과 1번 (미적 Ⅱ)

해설)

실수 전체에서 연속인 함수 $g(x)=\ln f(x)$에서
$g(x)$는 실수전체에서 정의된 함수이어야 한다.
$g(x)$가 실수전체에서 정의된다는 말에서 $\cdots$ $f(x)>0$

각 조건을 통해 알 수 있는 사실을 따져보자.
(가) $g(x)=g(-x)$에서 $f(x)$ 역시 우함수가 되어야 한다.
<조건> 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 의하여
$f(x)=x^4+ax^2+b$이라 할 수 있고 그래프의 개형은
아래와 같이 두 가지가 나올 수 있다.

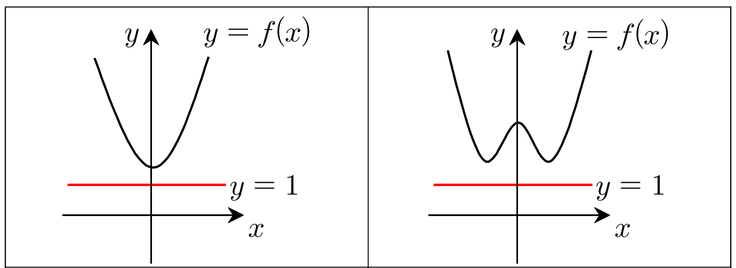
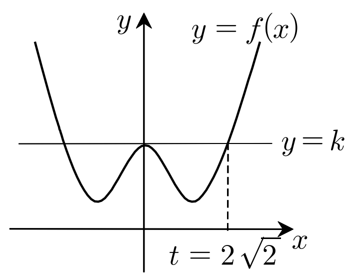


그림 1 | 그림 2

우선 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)>0)$이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 극값을 갖는 x값
이 같음을 알 수 있다.
또한 $x\to\infty$ 일 때, $f(x)\to\infty$이고, $g(x)\to\infty$
$x\to-\infty$ 일 때, $f(x)\to\infty$이고, $g(x)\to\infty$
이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 같은 그래프의 개형을 가짐을 알 수 있다.
(곡선을 증가와 감소의 입장에서만 생각해보면 같은 그래프이다. 물론 곡선의 요철은 다른 그래프가 될 것이다.)

조건 $|g(x)-g(t)|$가 미분이 가능하지 않은 x의 개수를 $h(t)$와
(다) $\lim\limits_{t\to 2\sqrt{2}-} h(t)=4$, $\lim\limits_{t\to 2\sqrt{2}+} h(t)=2$에서
이를 만족하기 위해 그림은 <그림2>로 확정됨을 알 수 있다.



즉, $f(x)-k=x^2(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$
$\Leftrightarrow$ $f(x)=x^4-8x^2+k$이다.

(나) $g(x)\geq 0$
- 이를 만족하기 위해서 $f(x)\geq 1$이어야 하고
  우리가 구하고자 하는 $f(3)$의 값이 최소가 되기 위해서는
  $f(x)$의 극솟값이 $y=1$과 접해야 한다.
  ($f(3)$이 최소가 되는 상황은 $f(x)$의 그래프가 최대한 내려와 있는 상황이다.)
- 즉, $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$이므로
  $f(2)=1$인 순간에 $f(3)$은 최솟값을 가진다.
  그러므로 $k=17$이고 $f(3)$의 최솟값은 26이다.

.

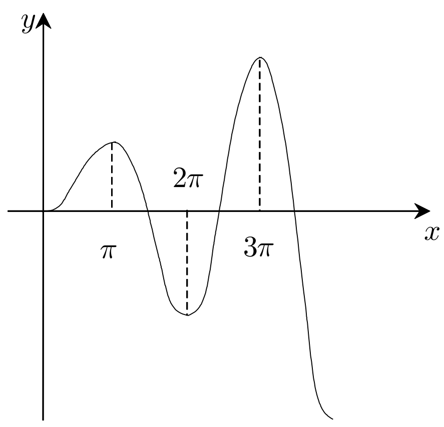
이과 2번 (미적 Ⅱ)

해설)
(가) 조건에서
$h'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + f'(x)\cos x - f(x)\sin x$이므로
$h'(n\pi) = (n\pi)^2\cos n\pi + f'(n\pi)\cos n\pi = 0$
$\Leftrightarrow\ f'(n\pi) = -(n\pi)^2$이다.
$f(x)$는 삼차함수 이므로 $f'(n\pi) = -(n\pi)^2$이 모든 자연수 n에 대해서 성립하기 위해서는 $f'(x) = -x^2$이다.
또한 $h(0) = 0$이므로 $f(0) = 0$ 즉, $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$

즉, $h(x) = x^2\sin x - \frac{1}{3}x^3\cos x$이고

$$h'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - x^2\cos x + \frac{1}{3}x^3\sin x$$
$$= 2x\sin x + \frac{1}{3}x^3\sin x$$
$$= x\left(2 + \frac{1}{3}x^2\right)\sin x \quad (x > 0)$$

이므로 $y = h(x)$는 다음 그림과 같은 그래프의 개형이다.
(물론 실제로는 훨씬 가파른 그래프가 그려지지만 지면상 이 정도로 표현하기로 한다.)



$g(x)$는 미분가능하며 (나)조건에 의하여 증가해야 한다.

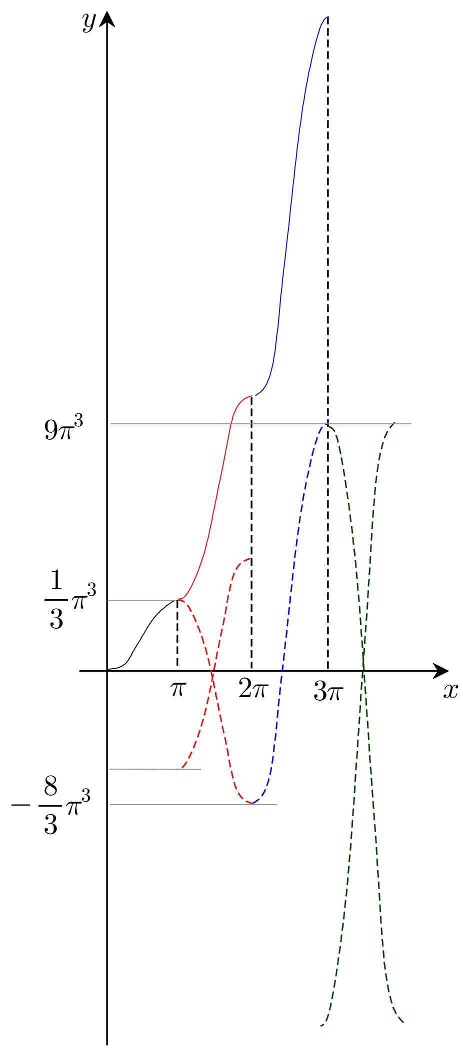
(다) 조건 구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi)$에서 $g(x) = h(x) + a_n$ 또는 $g(x) = -h(x) + a_n$이다.

에 의하여

$n = 1$일 때, $a_1 = 0$이므로 $0 \le x < \pi$

$g(x) = h(x)$ 또는 $g(x) = -h(x)$이다.
그런데 $g'(x) \ge 0$이므로 $g(x) = h(x)$이다.

$n = 2$일 때부터 미분가능하고 증가하려면 다음과 같은 그래프의 상황을 만족해야 한다.



$g(x) = h(x) + a_1 \quad (0 \le x < \pi)$
$g(x) = -h(x) + a_2 \quad (\pi \le x < 2\pi)$
$g(x) = h(x) + a_3 \quad (2\pi \le x < 3\pi)$
$g(x) = -h(x) + a_4 \quad (3\pi \le x < 4\pi)$
함수가 변하는 지점에서 $h(x)$는 극점이므로 연속이 되면 그 지점에서 미분이 가능해진다.
문제의 조건에서 $a_1 = 0$

$$h(\pi) = -h(\pi) + a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{2}{3}\pi^3$$

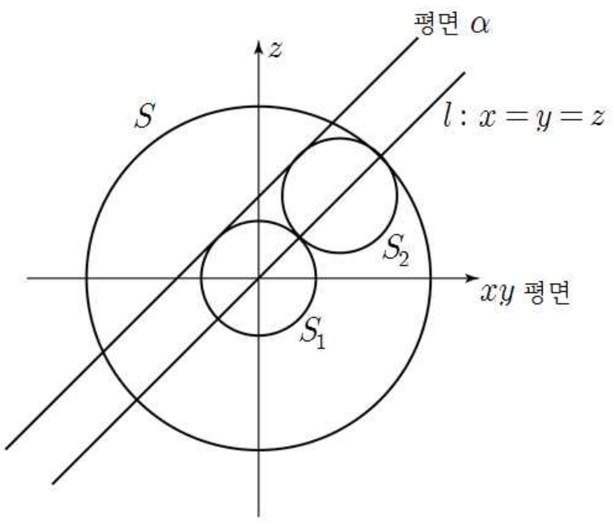
$$-h(2\pi) + a_2 = h(2\pi) + a_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{3}\pi^3 + \frac{2}{3}\pi^3 = -\frac{8}{3}\pi^3 + a_3$$
$$\Leftrightarrow \quad a_3 = 6\pi^3$$

$$h(3\pi) + a_3 = -h(3\pi) + a_4 \quad \Leftrightarrow \quad 9\pi^3 + 6\pi^3 = -9\pi^3 + a_4$$
$$\Leftrightarrow \quad a_4 = 24\pi^3$$

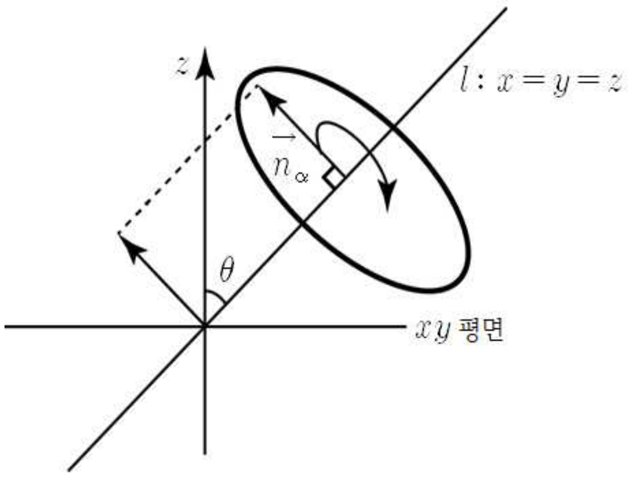
이므로 $a_2 + a_3 + a_4 = \frac{92}{3}\pi^3$

이과 3번 (기하와 벡터)

해설)
주어진 상황을 잘 살펴보면 다음과 같다.



구 S_1와 S_2에 동시에 접하는 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n_\alpha}$ 라 하자. 이때 $\vec{n_\alpha}$ 는 직선 $x=y=z$ 에 수직한 채로 회전한다.



($\vec{n_\alpha}$가 회전하는 상황을 그림에 표시)

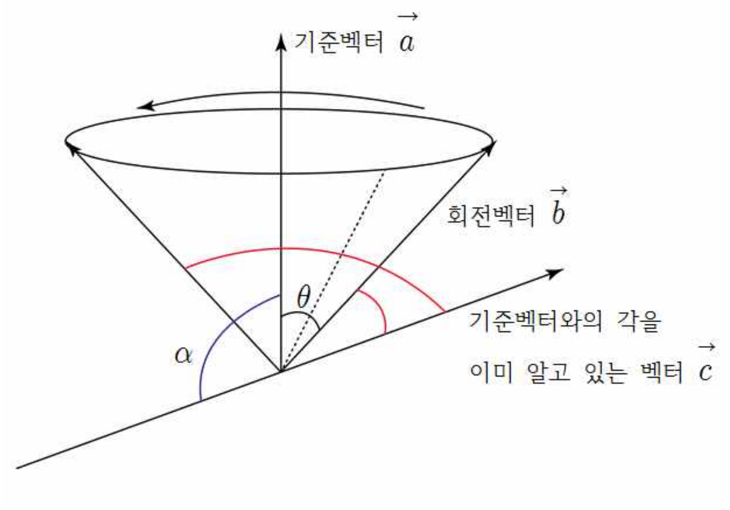
또한 직선 l의 방향벡터는 $(1,1,1)$이고, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이다. 직선 l과 xy 평면의 법선벡터가 이루는 각 θ는 $\sqrt{3}\cdot 1\cdot \sin\theta = 1$, $\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
그리고 직선 l과 $\vec{n_\alpha}$ 은 90°를 이루는 상태이다. 즉, xy평면과 $\vec{n_\alpha}$이 이루는 각도가 $90^\circ - \theta$ 일 때, 내적이 최소이다.

평면 α와 구 S의 중심 간의 거리는 $\sqrt{3}$이다. 즉, 평면 α와 구 S가 만나서 생기는 단면(원) 의 반지름은 $2\sqrt{6}$이며 그 넓이는 24π이다. 즉 α평면과 구 S가 만나 생기는 단면의 xy평면으로 정사영 넓이의 최댓값은

$$24\pi\cdot\cos(90^\circ - \theta) = 24\pi\cdot\sin\theta = \frac{24}{\sqrt{3}}\pi = p\pi$$

$$\therefore \frac{p^2}{8} = \frac{24\cdot 24}{3\cdot 8} = 24$$

*Tip (공간 도형의 회전)



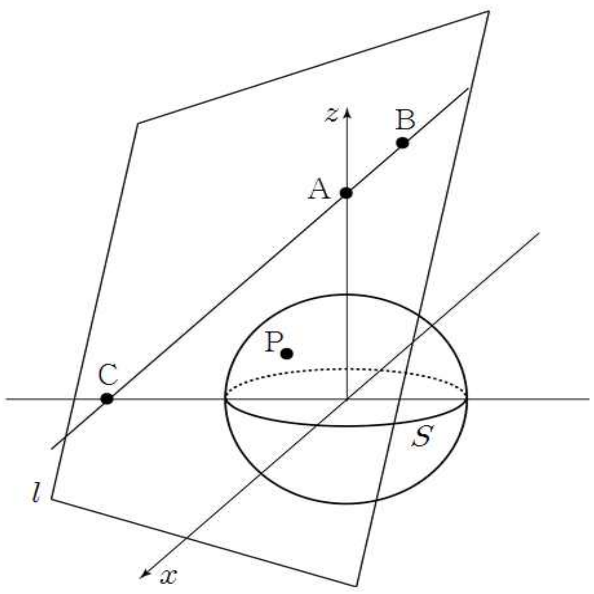
기준벡터 $\vec{a}$ 와 회전벡터 $\vec{b}$가 항상 이루는 각을 θ라고 하고, $\vec{a}$와의 각이 α인 또 다른 벡터 $\vec{c}$ 가 있다고 하자. 이 때, 벡터 $\vec{b}$와 벡터 $\vec{c}$의 각도의 최대, 최소는 두 벡터가 같은 평면에 있을 때 구할 수 있다.

이과 4번 (기하와 벡터)

해설)
우선 평면의 결정조건을 생각해보자
평면의 결정조건은
① 세 점이 주어졌을 때
② 직선과 점 하나
③ 서로 꼬여있지 않는 서로 다른 두 직선.

좌표공간에 이미 점 A와 점 B가 주어져있다. 또한 구 위의 동점 P가 주어졌으므로 이는 ①처럼, 세 점이 주어져서 평면이 결정된다고 생각할 수 있다.
혹은 ②처럼, 점 A와 점 B를 이은 직선이 이미 결정되어 있고, 구 위의 동점 P만 결정되면 평면이 결정된다고 생각할 수도 있다. 직선 AB와 xy평면 상의 교점을 점 C라고 하자. 이 때, 직선 AB를 포함하는 평면은 반드시 점 C도 포함해야한다.

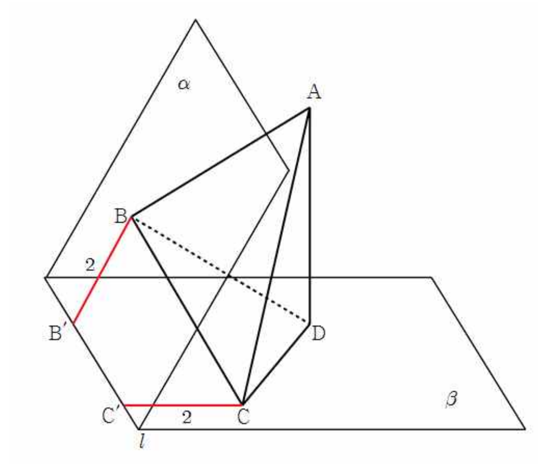
이러한 상황에서 생각해보면 동점 P에 따라 평면이 결정되고, 동시에 이 결정된 평면과 xy평면 사이의 교선도 결정된다. 문제에서는 이 교선 l이 도형 S와 한 점에서 만난다.



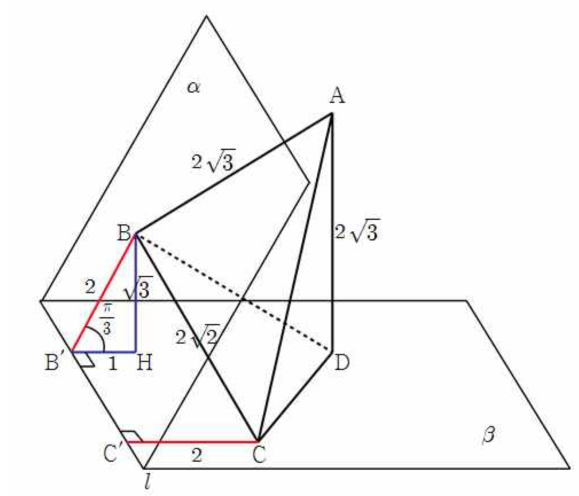
예를 들어 점 $\mathrm{A,B,P}$으로 이루어진 평면이 구에 접할 때, l은 xy평면과의 교선이다.

이과 5번 (기하와 벡터)

해설)
문제의 시작입니다.

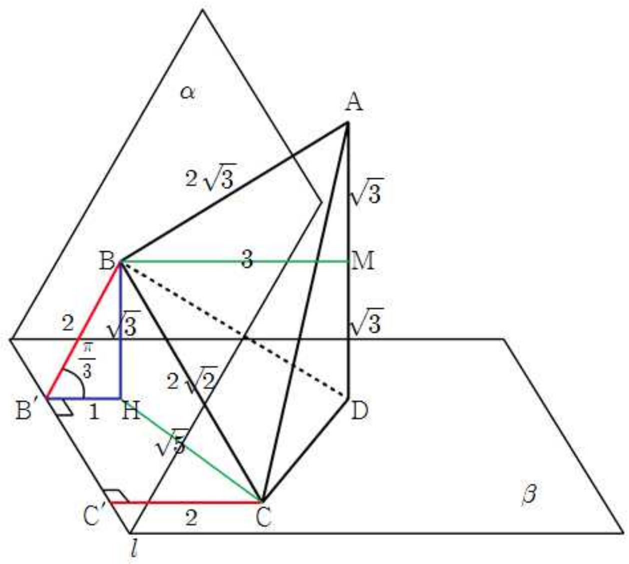


평면 α 위의 점 B와 평면 β위의 점 C에 대해, 교선 l 까지의 거리가 각각 2라고 제시되어 있기 때문에 이렇게 작도를 시작하셨을 겁니다. 점 B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 B', C' 이라고 합시다.



그 이후 점 B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라고 하면, 삼수선의 정리와 주어진 이면각을 활용해, 파란색 길이들을 찾을 수 있을 겁니다.

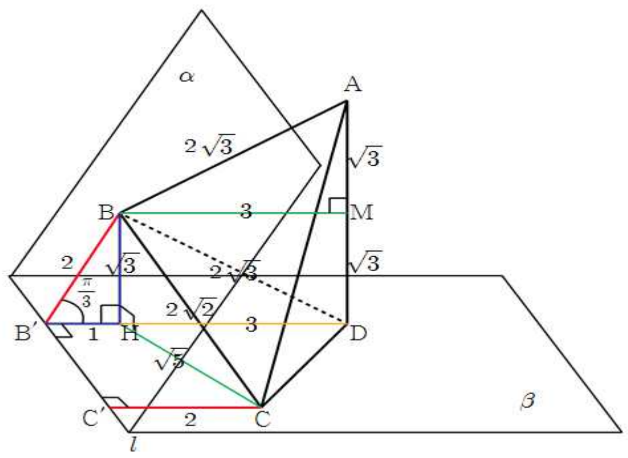
대부분 학생들께서 여기까지는 무난히 하셨으리라 예상합니다.



그 이후, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라 했을 때, $\overline{\mathrm{BH}} \perp \beta$ 이고, $\overline{\mathrm{AD}} \perp \beta$ 이기에, 선분 $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{AD}}$는 평행하고, 그러므로 M은 선분 AD의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MD}} = \sqrt{3}$ 이고 따라서 $\overline{\mathrm{BM}} = 3$입니다.

또한 $\overline{\mathrm{BH}}$는 평면 β에 수직하므로, β위의 모든 선분 혹은 직선과 수직합니다.

그러므로 삼각형 BHC는 직각삼각형. $\overline{\mathrm{HC}} = \sqrt{5}$



제가 이 문제에서 핵심이라고 생각했던 부분 중 하나인 부분이 이 부분입니다.

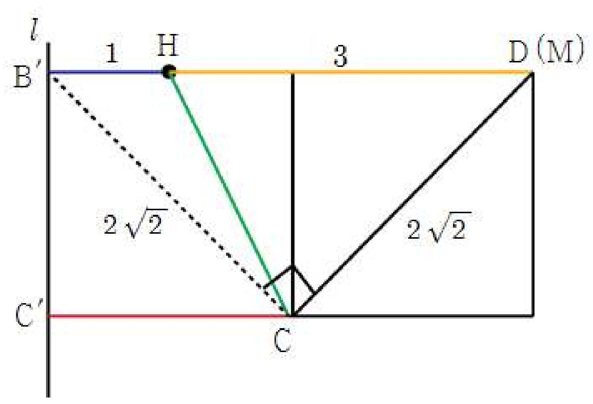
조건 (다) 에 의해, 직선 l 은 평면 ABD 에 수직이고, 직선 AD 또한 평면 β 에 수직이므로, 직선 l 은 평면 위의 모든 직선과 수직입니다. 그러므로 선분 $\overline{\mathrm{BM}}$ 은 직선 l 과 수직이므로 선분 $\overline{\mathrm{BM}}$ 은 $\overline{\mathrm{HD}}$ 와 동일하고 그 길이는 3 이고, 따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{3}$.

∴ 삼각형 ABD 는 정삼각형.

그 다음, 평면 ABD 와 평면 BCD 의 이면각을 구하기 위해선 여러 가지 방법이 있겠지만, 기본적으로는 평면의 교선에 각각 수선의 발을 내려 그 선분(or 직선) 끼리 이루는 각도를 찾아야 합니다.

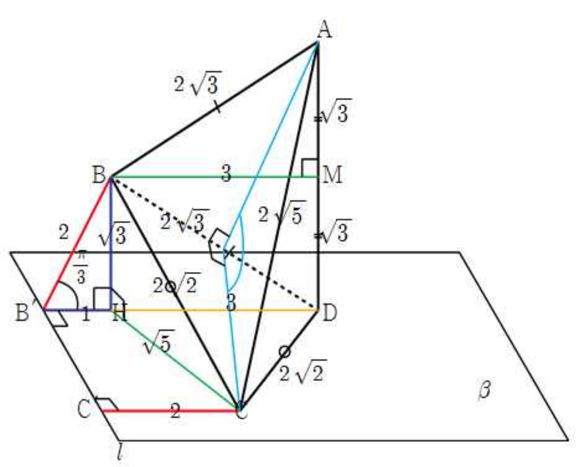
하지만 삼각형 ABD 의 길이는 전부 구했습니다만, 삼각형 BCD 의 길이를 우리는 전부 구하지 못했습니다. 선분 $\overline{\mathrm{CD}}$ 가 남았거든요.

이제 β 평면 위의 점들만을 관찰한다면 아래와 같습니다.



그러므로 우리는 $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$ 를 구했고, 삼각형 BCD 는 이등변삼각형임을

찾았습니다

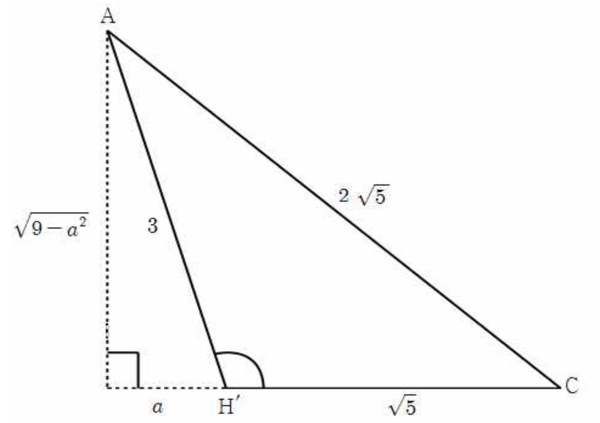


최종적으로, 삼각형 ABD 는 정삼각형, 삼각형 BCD 는 이등변삼각형이고, 두 평면의 교선은 직선 BD 입니다. 여기에서, 또 중요한 것은 각각의 삼각형이 정삼각형, 이등변 삼각형이기 때문에 점 A 에서 직선 BD 에 내린 수선의 발과, 점 C 에서 직선 BD 에 내린 수선의 발이 일치함을 알 수 있습니다. 이제 하늘색 선분 2개와 $\overline{\mathrm{AC}}$ 로 이루어진 삼각형의 각도 θ 를 구하면 끝입니다.

직선 BD 에 내린 수선의 발을 H′이라 했을 때, $\overline{\mathrm{AH'}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$

$\overline{\mathrm{H'C}}=\sqrt{5}$ 그리고 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$ 또한 평면 β 에 수직이기 때문에

삼각형 ACD 는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$.



$$9-a^2+(a+\sqrt{5})^2=(2\sqrt{5})^2,\quad 2\sqrt{5}a+14=20,\quad a=\frac{6}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{9-a^2}}{3}\quad \sin^2\theta=\frac{9-a^2}{9}=\frac{4}{5}$$

$\therefore \sin^2\theta=9$

이과 6번 - 확률과 통계

해설)

가방끼리 겹치는 경우 (여섯자리) 와
겹치지 않는 경우 (다섯자리) 로 나눈다.

㉠ 가방끼리 겹치지 않을 때

가방과 사람을 묶은 후 배열한다.

v (A+가방) v (B+가방) v (C+가방) v

- A.B.C 배열 3!
- 가방과 사람이 앉는 경우 2가지. 총 3명 2^3
- v 로 표시된 곳에 의자 두기. ${}_4\mathrm{H}_2$ (중복허락 2자리 고르기)

$$3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot {}_4\mathrm{H}_2 = 480$$

㉡ 가방끼리 겹칠 때.

1) v [사람+(가방2)+사람] v [사람+가방] v
2) v [사람+가방] v [사람+(가방2)+사람] v

- 사람 3명의 배치 x3!
- 단독으로 앉은사람 가방과 자리바꾸기 2가지
- 그리고 위 2가지의 형태가 경우의 수가
  같으므로 역시 x2 (앞에 두명이 겹칠 때 or 뒤에 두명이 겹칠 때)
- v 표시된 곳에 가방 둔 곳 ${}_3\mathrm{H}_3$

$$2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot {}_3\mathrm{H}_3 = 240$$

정답 720가지

이과 7번 - 확률과 통계

해설)

A주머니에 공 한개를 먼저 넣어두고 시작하자

그리고 흰공이 총 2개이므로
흰공을 기준으로 공을 어떻게 분배할지 생각하는
것이다.

1) A주머니 흰공 두 개

자연스럽게 B, C 주머니에는 검은 공이 2개씩은 들어가데 된다.
그리고 그 이후가 문제인데, 여기서 분배하는 아이디어는
자연수 분할이다.

어느곳이든 갈수는 있지만, 크기가 정해져있기에
남은 공들에 있어서 숫자적으로 어떻게 배분할것인지만 정해주면 크기
순서대로 공들이 가게 된다.

현재 검은공 3개가 남아있으므로
$\mathrm{P}(3,1)+\mathrm{P}(3,2)+\mathrm{P}(3,3)=3$ 이된다.

(예를 들어, $P(3,2)=1$, $(1+2=3)$가지 인데,
이는 남은 검은공 3개를 1개와 2개로 나누어서 A, B, C에 분배하는데,
문게가 정해져있으므로
자연스럽게 2개는 C 1개는 B에 들어갈 수 밖에 없는 구조이다.)

2) A에 흰고 한 개, B나 C에 흰공 한 개 (2가지)

A에 흰공 하나를 넣고 B에 흰공 하나를 넣자.
그러면 역시 C에는 검은공 하나가 들어가고

남은 검은공 6개를 A, B, C에 분배하는 구조이므로
$\mathrm{P}(6,1)+\mathrm{P}(6,2)+\mathrm{P}(6,3)$이 된다.
(위와 같은 원리이다.)

$\mathrm{P}(6,1)=1,\ \mathrm{P}(6,2)=3,\ \mathrm{P}(6,3)=3$
즉 총 7가지인데, B에 흰공이 아닌 C에 흰공을 넣는 경우도 같아 14
가지가 된다

따라서 $14+3=17$